# 중등 과정에서의 무리수 개념의 지도에 관한 소고

서 봉 하 (경성대학교 교육대학원)

## I. 서 론

현대인에게 수가 존재하지 않는 세계를 생각한다는 것은 불가능하다. 옛 그리스의 수학자 피타고라스는 "모든 것은 수이다."라고 주장했는데 오늘날 그의 주장은 그대로의 뜻처럼 누구나가 아는 상식이 되어버렸다.

그러나 자연수에서 정수, 정수에서 유리수, 유리수에서 실수로 확장되어 나오는 수 체계의 과정을 정확하게 알고 학생들에게 지도하는 것은 그렇게 쉽지가 않다.

단순한 계산 문제를 기계적으로 활용하는 것이 아닌 수학적 사고나 논리적 사고력을 기르는데 필요한 올바른 수의 개념에 대한 지도는 실제 수업에서도 매우 중요하다.

특히 유리수에서 실수로 확장되는 과정에서 다루어지는 무리수 단원은 현 중학교 3학년 교과 과정에 처음으로 도입되어 있고 학생들이 학습시 개념의 이해와 적용에 많은 어려움과 혼돈을 겪고 있다.

본 논문은 4장으로 구성되어 있는데 제1장은 서론이고 제2장은 이론적 배경으로 직관주의와 발생적 원리를 바탕으로 한 수학교육의 지도의 의미에 관해서 알아 보았다.

제3장은 무리수의 도입과 지도계통으로 1절에서는 무리수의 도입을, 2절에서는 직관주의와 발생적 원리에 입각한 무리수 $\sqrt{2}$의 존재성에 관한 수업실제를, 제3절에서는 지도의 실제로서 교사의 역할과 학생들의 반응을 알아 보았고 제4장은 결론으로 되어있다.

## II. 이론적 배경

직관주의와 발생적 원리를 바탕으로 한 수학교육의 지도의 의미

수학을 가르치기 위해서는 "수학적으로 보는 방법, 수학적으로 생각하는 방법"을 살펴볼 필요가 있는데 이것은 다음과 같이 정리할 수가 있다.

① 기호나 문자를 이용하거나 도형적인 표를 이용하여 개념과 관계의 본질적인 면을 추상화하고 단순화하여 표시한다.

② 사고의 과정을 기호의 조작으로 바꾸어 놓아 형식의 통일을 기하고 사고의 능률화를 기한다.

③ 함수적인 관계, 통계적 또는 확률적인 관계, 그 밖의 수량적인 관계에서 생각한다.

④ 엄밀하게 논리적이고 체계적으로 생각한다.

이러한 수학적 사고에는 직관으로서 체계를 세우는 것과 논리적으로 생각하는 것이 포함되어 있는데, 수학교육에서 직관적이라 함은 사물의 본질이나 또는 알고자 하는 대상등을 직접 파악하는 것 뿐만 아니라 경험으로써 느낀 것은 물론 주어진 조건을 명확하게 하고 때로는 그것을 변화시키든지 혹은 시행착오에 의하여 그 안에서 발견해 내는 아이디어도 포함된다고 할 것이다.[1)]

따라서 학생들은 과거의 지식이나 경험에 근거하여 해석하고 기억하는 것으로써 개념과 절차 사이를 연결짓고, 조작적, 시각적, 추상적 표상들 내에서의 관계를 설계하거나 조직함으로 수학적 이해가 이루어진다.[2)]

학습자의 수학적 이해의 달성은 수학 교실의 환경에 부합되는 교사의 교수법에 의해서 좌우되는데 발생적 원리에 입각한 수학 교육의 교수법은 매우 의미있는 것으로, 학생들이 스스로의 사고 경험을 통해서 지식을 얻는 과정에 참여함으로써 자연스럽게 수학적 사실의 이해가 이루어진다는 것이다.

발생적 원리에 입각한 수학교육의 교수법의 기원은 플라톤(plato)의 대화편(對話篇) 중의 하나인 '메논(Menon) 篇'에 예시되어 있는 소크라테스(Socrates)의 산파법에서 찾아 볼 수 있는데 그 내용은 아동에게 직접 '가르쳐 주거나 설명하는 것이 아니라' 단지 질문만을 통해서 아동의 영혼에 내재된 진리를 상기(想起)하도록 도와 준다는 것이다.

현대 수학 교육자들은 아직도 소크라테스(Socrates)가 메논(Menon)의 사동을 학습시킨 발견 교수법에서 수학 학습-지도의 典型을 구하고 있음을 주목할 만한 일이다.

20세기에 들어와 발생적 원리는 수학교육 근대화 운동의 선구자인 클라인(F·Klein)에 의해서 강조되었는데 그는 중등학교 교사를 위한 강연 원고를 모은 Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus 가운데서 다음과 같이 주장했다.

오늘날 수학교육에 있어서 지도기술은 '직관적이고 발생적'이란 표어를 통해 가장 잘 특정지어질 것이라고 했고 전체적인 지도 체계는 잘 알려진 직관적인 사물을 바탕으로 아주 점진적으로 아래에서부터 구성되어야 하는데, 이 점에서 교사의 주도하에서

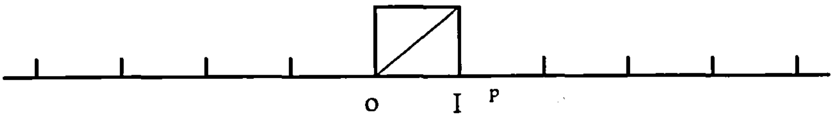
1) 이충걸, 신 수학 교육, 신한 출판사, 1981.
2) 대한 수학 교육학회, Research Ideas for the Classroom Middle Grades Mathematics, 1995.

이루어지는 '논리적이고 체계적'인 지도와는 매우 대조적이라고 했다.[3)]

## Ⅲ. 무리수의 도입과 지도계통

### 1. 무리수의 도입

유리수는 간단한 기하학적 해석을 갖는다.



수평선 위에 서로 다른 두 점 0와 I를 표시하자. 이때 I가 0의 오른쪽에 오도록 하고 선분0I를 길이의 단위로 취한다. 만일 0와 I가 각각 수 0과 1을 나타내도록 하면 양의 정수와 음의 정수는 모두 이 직선 위의 한 점으로 나타낼 수가 있다. 이때 양의 정수는 0의 오른쪽에 음의 정수는 0의 왼쪽에 위치하도록 나타내자. 그러면 분모가 q(≠0)인 분수는 단위 구간을 q등분할 때의 각 분점에 의해 표현된다. 그래서 각 유리수는 이 직선상의 한 점이 될 것이다. 초기 수학에서는 직선 위의 모든 점이 이런 식으로 완전히 덮혀질 수 있을 것으로 생각하였다. 그러므로 직선 위에 어떤 유리수에도 대응되지 않는 $\sqrt{2}$에 대응되는 점 p가 존재함을 알았을 때 그 충격이 얼마나 큰 것이었는지는 상상하고도 남을 것이다.

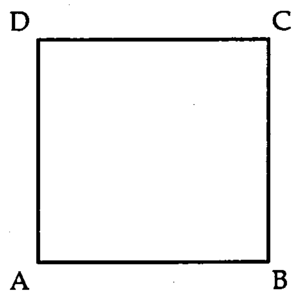
피타고라스 (Pythagoras ; 572?~492? B. C. )는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이를 제곱하면 2가 된다는 것과 그러한 길이는 유리수로 나타낼 수 없다는 사실을 알았다. 따라서 그런 점에 대응하는 새로운 수가 도입되어야 했고 이러한 수는 유리수가 아니므로 무리수라고 부르게 되었다.

결국 $\sqrt{2}$의 무리수성에 대한 발견은 피타고라스 학파의 사람들에게 심한 놀라움과 충격을 안겨 주었고, 모든 것이 정수에 따른다는 그들의 기본적인 가정을 뒤엎는 것일 뿐만 아니라 (비례에 대한 정의가 같은 표준으로 재어질 수 있다는 가정의 바탕 위에 있었으므로) 피타고라스의 비례론에서의 제한을 가져와 닮은 도형에 대한 일반화가 성립되지 않게 되었다. 그래서 그들은 얼마동안 이 문제를 비밀로 감추려고 애썼다고 한다.

3) 김응태, 박한식, 우정호, 수학 교육학 개론, 서울 대학교 출판부, 1996.

한동안 $\sqrt{2}$가 사람들에게 알려진 유일한 무리수였으나, 그 후에 플라톤은 키레네(Cyrene) 학파의 테오도로스(Theodorus : B.C. 425년경)가 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$이 역시 무리수임을 보였다고 전했다.[4)]

2. 직관주의와 발생적 원리를 바탕으로한 무리수 $\sqrt{2}$의 존재성에 관한 수업실제의 교수와 학습




(교사는 칠판에 위의 그림과 같이 한 변의 길이가 2cm인 정사각형 ABCD를 그린다.)

교 사 : 정사각형 ABCD의 넓이는 얼마이지요?

학생들 : 4cm$^2$입니다.

(학생들은 넓이가 4cm$^2$인 정사각형의 한변의 길이는 2cm임을 알고 있다.)

교 사 : 그러면, 넓이가 2cm$^2$인 정사각형의 한 변의 길이는 얼마 일까요?

(학생들 끼리 웅성거리면서 자신의 생각을 교환한다.)

몇몇 학생들 : 1cm입니다.

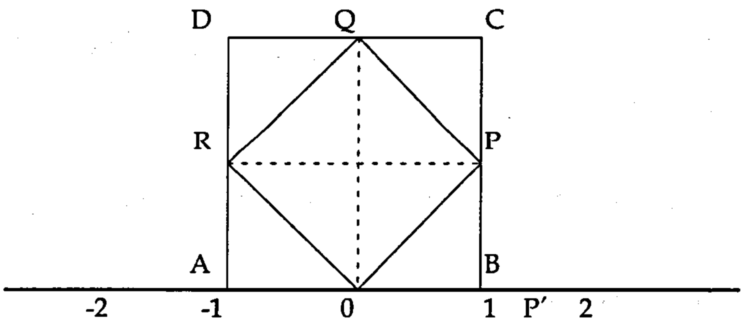
(다른 몇 학생들은 자리에서 1cm가 아니라고 말한다.)

교 사 : 한 변의 길이가 1cm인 정사각형의 넓이는 얼마이지요?

(학생들은 1cm$^2$라고 모두 대답하고 앞의 답이 틀렸다는 것을 알게 된다.)

(교사는 수직선 위에 다음과 같은 그림을 그린다.)

4) 신항균, 이우영, 수학사, 경문사, 1995.




교 사 : 정사각형 OPQR의 넓이= $\frac{1}{2}$ ×정사각형 ABCD이지요?

학생들 : 예.

교 사 : 그러면, 정사각형 OPQR의 넓이는 얼마가 되지요?

학생들 : $2cm^2$가 됩니다.

교 사 : 정사각형 OPQR의 한변의 길이 $\overline{OP}$ 를 반지름으로 하고 점 O를 중심으로 원을 그려 수직선과 만나는 점을 $P'$라고 하면 $\overline{OP} = \overline{OP'}$가 되지요?

학생들 : 예.

교 사 : $\overline{OP'}$ 에 대응하는 수는 수직선 위에서 1과 2사이에 존재하게 됩니까?

학생들 : 예.

교 사 : 정사각형 OPQR의 한 변의 길이 $\overline{OP} = x(x>0)$ 이라고 합시다.
그러면 $x^2 = 2(x>0)$ 인 $x$가 바로 점 $P'$에 대응하는 수이지요?

학생들 : 그렇습니다.

교 사 : 이제, $x^2 = 2(x>0)$인 수 $x$가 유리수가 되는가를 알아 보도록 합시다.
먼저, 정수에서 살펴보겠어요.
$x>0$이므로 양의 정수에서 생각해 봅시다.

학생들 : 양의 정수 1, 2, 3, 4…의 제곱은 1, 4, 9, 16…이므로 $x^2=2(x>0)$인 $x$는 정수로 나타낼 수 없습니다.

교 사 : 다음에는 정수가 아닌 유리수에서 살펴 봅시다.

정수가 아닌 유리수는 기약분수인 $\frac{q}{p}$( $p$ 와 $q$ 는 서로 소인 정수, $p\neq0$) 의 꼴로 나타낼 수 있습니까?

학생들 : ……

(다수의 학생들은 수와 식의 기호화에 익숙하지 않으므로 잘 이해 하지 못 한다.)

교 사 : 자, 예를 하나 들어 보겠어요.

$(\frac{7}{5})^2=\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}=\frac{7\times7}{5\times5}$ 입니다.

여기서 5와 7이 서로 소이므로 $\frac{7\times7}{5\times5}$은 기약분수이고,

$\frac{7\times7}{5\times5}\neq2$ 이므로 $(\frac{7}{5})^2\neq2$이지요?

학생들 : 예.

교 사 : 마찬가지로, $\frac{q\times q}{p\times p}$도 기약분수이므로 $(\frac{q}{p})^2\neq2$입니까?

학생들 : 그렇습니다.

교 사 : $x^2=2(x>0)$인 $x$는 정수가 아닌 유리수로도 나타낼 수가 없습니다.

이상에서 $x^2=2(x>0)$인 $x$는 유리수가 아님을 알아 보았습니다.

그래서 $x^2=2(x>0)$인 $x$를 나타내기 위한 새로운 수를 도입해야 할 필요가 있습니다.

학생들은 자연스럽게 새로운 수인 무리수 도입의 필요성을 느낀다. 교사는 $x^2=2(x>0)$인 새로운 수 $x$는 근호($\sqrt{\ }$)를 사용하여 $\sqrt{2}$로 나타낸다고 설명하고 이 수는 유리수가 아닌수 즉, 무리수라고 설명한다.

학생들은 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 자연스럽게 상기(想起)하게 되고 무리수의 존재성을 인식하게 된다.

3. 지도의 실제

(1) 제곱근과 그 성질

<지도목표>

① 제곱근의 뜻을 알게한다.

② 근호( $\sqrt{\ }$ )를 사용하고 읽을 수 있게 한다.

③ 제곱과 제곱근의 관계를 이해하여 제곱근의 성질을 알게한다.

<지도의 현황>

| 구 분 | 제 곱 근 | 제 곱 |
|---|---|---|
| I | 2와 $-2$<br>$\left(\frac{1}{2}\right)$과 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ | 4<br>$\frac{1}{4}$ |
| (정의 3-1) | 어떤 수 $x$를 제곱하여 $a$가 될 때 이 수 $x$를 $a$의 제곱근 이라고 한다. | |
| II | 0 | 0 |
| III | 없다 | 음수 |
| IV | $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$<br>$(\sqrt{5})$와 $(-\sqrt{5})$ | 2<br>5 |
| 정의 (3-2) | 유리수가 아닌 수를 무리수라고 정의 한다. | |
| V | $\sqrt{a}$ ( $a$의 양의 제곱근)<br>$-\sqrt{a}$ ( $a$의 음의 제곱근) | $a$ $(a>0)$ |
| VI | 양수 $a$의 양의 제곱근, 음의 제곱근은 각각 1개씩만 존재한다. | |

▸ 교사의 역할

① 학생들이 I 단계를 이해하였을 때 제곱근의 정의를 제시한다.

② II, III단계에서 0의 제곱근은 0(1개)뿐이고 음수의 제곱근이 없음을 이해시킨다.

③ IV단계에서 새로운 기호 $\sqrt{\ }$ 의 사용에 거부감을 갖지 않도록 유의하여 지도한다.

④ IV단계에서 나타난 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$등이 무리수임을 알게하고 무리수의 정의를 제시한다.

⑤ V단계에서 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 함께 $\pm\sqrt{a}$로 쓰기도 한다는 것을 지도하고 2의

제곱근과 $\sqrt{2}$를 혼동하지 않도록 유의시킨다.

⑥ Ⅴ단계에서 4의 양의 제곱근 $=\sqrt{4}$, Ⅰ단계에서 4의 양의 제곱근 = 2임을 상기시켜 Ⅵ단계에서 $\sqrt{4}=2$임을 알게한다.

⑦ Ⅰ, Ⅴ, Ⅵ단계를 거쳐 $(\sqrt{2})^2=2$, $(-\sqrt{2})^2=2$임을 이해시키고 다음 성질을 제시한다.

양수 $a$에 대하여,

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\sqrt{a})^2=a, & (-\sqrt{a})^2=a \\ \sqrt{a^2}=a, & \sqrt{(-a)^2}=a \end{array}}$$

▸학생들의 반응

① 학생들은 Ⅰ, Ⅳ단계에 집착하여 모든 수의 제곱근은 반드시 2개가 있다는 오류에 빠지기 쉽다.

② 학생들은 Ⅳ단계에서 보다는 Ⅰ단계에서 제곱근의 뜻을 잘 파악한다.

③ Ⅳ단계의 지도가 잘못되면 $-\sqrt{4}$가 4의 음의 제곱근이므로 직관적인 오류를 일으켜 $-4$의 제곱근이 존재하는 것으로 생각하는 경향이 있다.

④ 제곱근의 정의를 잘 이해하지 못하는 학생들은 $\sqrt{5^2}=5$이므로 $\sqrt{(-5)^2}=-5$로 착각하기 쉽다.

⑤ 학생들은 제곱근 만으로 무리수를 나타낼 수 있다는 오류에 빠지기 쉽다.

(2) 제곱근의 사칙연산

(지도목표)

① 제곱근의 성질을 알게하여 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

② 분모의 유리화의 방법을 알게한다.

③ 문자가 있는 식의 계산을 도입하여 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

<지도의 현황>

| 구 분 | 제곱근의 성질 |
|---|---|
| Ⅰ | 두 양수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ |
| Ⅱ | 두 양수 a, b에 대하여 $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$ |
| Ⅲ | 두 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$ (분모의 유리화) |
| Ⅳ | a>0이고 m, n이 유리수일 때 $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$ $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$ |

▶교사의 역할

① Ⅰ단계의 성질이 성립함을 보인다.

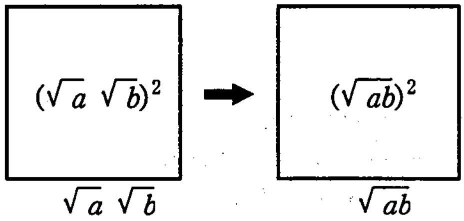
a > 0, b > 0 일 때

(ⅰ) $(\sqrt{a}\ \sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$

$$=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})$$
$$=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$
$$=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}$$
$$=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2$$
$$=a\times b$$
$$=ab$$

$\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ 는 ab의 양의 제곱근 이므로

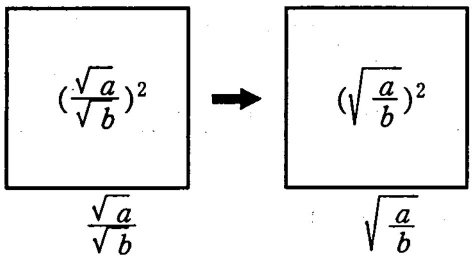
$\therefore\sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$




(ii) $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 는 $\frac{a}{b}$ 의 양의 제곱근이므로,

$\therefore\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$




② $\sqrt{5}\ \sqrt{7}=\sqrt{5\times7}=\sqrt{35}$, $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{21}{3}}=\sqrt{7}$을 학생들에게 제시하여 해결하게 함으로써 I 단계의 성질을 알 수 있도록 한다.

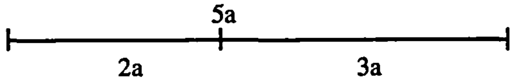
③ II 단계에서 $-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2}\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\times3}=-\sqrt{12}$임을 해결하도록 하여 $a\sqrt{b}$ 에서 $a=-2$라는 오류를 범하지 않도록 한다.

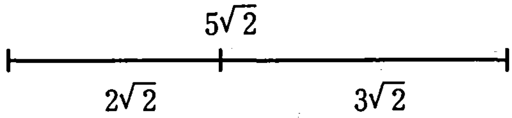
④ III단계에서 분모에 무리수가 있을 경우에는 유리수로 고쳐서 나타낸다는 것을 주지시킨 다음, I 단계와 결부시켜 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5\times3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$와 같이 해결하도록 조장한다.

⑤ IV단계에서는 문자가 있는 식의 덧셈과 뺄셈을 도입하여 다음과 같이 지도한다.

$2a+3a=5a$ 와 같이 $a=\sqrt{2}$ 라 두면,

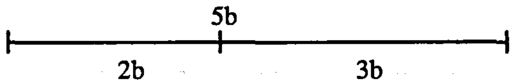
$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

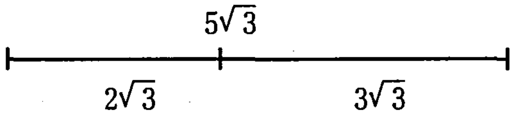



$5b-2b=3b$ 에서 $b=\sqrt{3}$ 이라 두면,

$5\sqrt{3}\ -\ 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$




▸ 학생들의 반응

① Ⅰ단계의 성질을 잘 이해하지 못하는 학생들은 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{3}$대신에 Ⅱ, Ⅲ 단계를 거쳐 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\dfrac{\sqrt{2^2\times3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$으로 계산하는 경우가 있다.

② Ⅱ단계에서 $-2\sqrt{3}=\sqrt{\ }$로 나타낼 경우

$a=2,\ b=3$으로 대입하지 않고 $a=-2,\ b=3$으로 두어서

$-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\times3}=\sqrt{12}$인 오류에 빠지는 경우가 있다.

③ Ⅳ단계에서 $4+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$4-3\sqrt{2}=\sqrt{2}$인 오류를 범할 수 있다.

(3) 실수와 수직선

(지도 목표)

수직선은 실수에 대응하는 점들로 이루어져 있다는 것을 알게 한다.

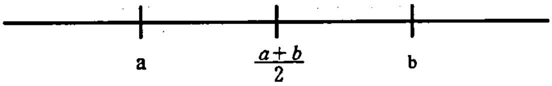
<지도의 현황>

수직선 위에 a < b 인 두 유리수 a, b에 대하여

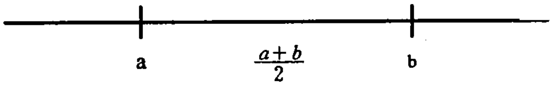
$$\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}>0 \quad \therefore a<\frac{a+b}{2}$$

$$b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}>0 \quad \therefore \frac{a+b}{2}<b$$

즉, $a<\frac{a+b}{2}<b$ 이고, $\frac{a+b}{2}$ 는 수직선위에서 $a$, $b$에 대응하는 두 점의 중점임을 알 수 있다.




같은 방법으로, 수직선위에 중점들을 아래 그림과 같이 대응시킬 수 있다.




각 구간의 중점을 계속하여 대응시켜보면 두 유리수 a, b (a < b) 사이에는 무수히 많은 유리수가 있게 되므로 (유리수의 조밀성), 수직선위에는 유리수에 대응하는 점들이 무수히 많음을 알 수 있다.

학생들은 직관적인 오류를 통해서 수직선은 유리수에 대응하는 점들로 만 가득차 있다고 생각한다.

따라서 데데킨트의 "유리수의 절단"이라는 방법을 소개하여 그 오류를 지도할 필요가 있다.

유리수 전체의 집합 Q를 두 개의 부분집합 A와 B로 다음과 같이 나눈 것을 "유리수의 절단" 이라고 한다.

① A ∪ B = Q

② A ∩ B = ∅

③ $a \in A$, $b \in B$이면 $a < b$

이 유리수의 절단에서는 다음 4가지 경우를 생각할 수가 있는데,

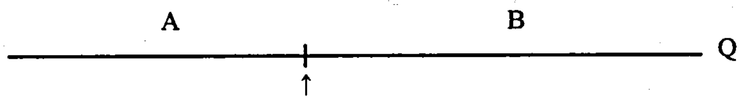
(가) A에 최대의 수가 있고, B에 최소의 수가 없을 때,

(나) A에 최대의 수가 없고, B에 최소의 수가 있을 때,

(다) A에 최대의 수가 있고, B에도 최소의 수가 있을 때,

(라) A에 최대의 수가 없고, B에도 최소의 수가 없을 때,

여기에서 (다)의 경우는 있을 수 없으므로 제외를 시키면 (라)의 경우에서 나타나는 수가 무리수인 것이다.5)




<이점이 바로 무리수이다>

(예) $A = \{ x \in Q \mid x^2 \le 2\}$

$B = \{ x \in Q \mid x^2 > 2\}$라고 하면,

① $A \cup B = Q$

② $A \cap B = \varnothing$

③ $a \in A$, $b \in B$이면 $a < b$이다.

여기서 $p = \sqrt{2}$로 잡으면 $p \notin A$, $p \notin B$이므로 유리수의 부분집합 A와 B는 점 p에 대응하는 무리수 $\sqrt{2}$에 의해서 절단되어 있다.

실제로 학생들은 "유리수의 절단"을 쉽게 인식하지 못한다.

그러나 위의 (예)처럼 직관적인 측면에서 지도함으로써 보다 쉽게 이해를 시킬수가 있다.

따라서 유리수의 집합은 연속된 것이 아니라 무리수에 의해서 절단되어 있고 유리수와 무리수를 합친 실수의 집합이 연속이며 수직선은 실수에 대응하는 점들로 이루어져 있다는 것을 유의하여 지도해야 한다.

## V. 결 론

수, 점, 직선 등은 인간의 사고 속에서 존재하는 추상적인 개념이다. 이런 추상적인 개념을 바탕으로 문제를 연구하는 것은 인간사고의 계발을 위해서 꼭 필요한 일이다.

본 논문은 이론적 배경으로 소크라테스(Socrates)의 산파법에 기술되어 있는 $\sqrt{2}$의 존재성을 '가르쳐 주거나 설명하는 것이 아니라' 단지 질문만을 통해서 아동의 영혼에 내재되어 있는 진리를 스스로 상기(想起)할 수 있도록 도와주는 발생적 원리와 직관주

5) 김용운, 김용국, 수학서설, 우성 문화사, 1995.

의에 입각한 교수와 학습의 실제를 살펴보았고, 수직선에서 각 점에 대응하는 수의 직관적인 측면에서 학생들에게 무리수 단원을 지도할 내용을 알아보았다. 사실 수직선에서 점이나 직선 그 자체의 직관적인 것 만으로 연관을 지어서 실수를 생각해 볼 때 바탕되는 개념이 애매하기 때문에 명확한 결과를 얻을 수 없다. '직관' 그 자체가 때로는 우리를 속일 수도 있는 것이다. 적어도 '수'를 엄격히 정의할 때는 직선과 같은 직관적인 이미지를 바탕으로 해서 생각한다는 것은 다소 위험한 측면이 있다.

그러나 논리적 사고력이 부족한 중학교 3학년 학생들에게는 실수로의 확장과정에서 도입되는 무리수를 지도할 때 직관적인 측면을 고려하여 출발함으로서 단원의 내용 이해는 물론, 학습에 상당한 흥미를 부여할 수 있다는 것이다.

이런 관점에서 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, … 등을 지도할 때 수에 대한 정의와 각 정리들을 제시하여 논리적으로 지도한다는 것 보다는 $x^2=2$인 양수 $x=\sqrt{2}$ 가 넓이가 2가 되는 정사각형의 한 변의 길이 임을 알게하여 수직선 위에 대응시켜 봄으로서 수직선은 유리수가 아닌 무리수도 대응된다는 사실을 쉽게 받아들이수 있다는 것이다.

그리하여 유리수가 조밀함에도 불구하고 연속이 아니라는 사실을 이해하게 되고 유리수와 무리수를 합쳐 실수라는 수체계의 개념이 형성되어 결국 수직선은 실수에 대응하는 점들로 이루어져 있음을 알 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

1. 김연식, 김흥기, 중학교 수학 3, 동아 출판사, 1996.
2. 김연식, 김흥기, 중학교 수학 3, 교사용 지도서, 동아 출판사, 1996.
3. 김용운, 김용국, 數學序說, 祐成文化社, 1995.
4. 김응태, 박한식, 우정호, 수학교육학 개론, 서울대학교 출판부, 1996.
5. 대한 수학 교육학회, Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics, 1995.
6. 신항균, 이우영, 수학사, 경문사, 1995.
7. 이충결, 신 수학 교육, 신한 출판사, 1981.