*Journal of Statistical*
*Theory & Methods*
*1997, Vol. 8, No. 2, pp. 143 ~ 152*

# 중단자료를 갖는 이변량 지수 모형에서 $P(X_1 < X_2)$에 대한 검정 [1]

박진표 [2] · 조장식[3]

**요약**

본 논문에서는, Marshall-Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 개의 부품으로 이루어진 시스템에서 두 부품의 수명 $(X_1, X_2)$들이 이변량 1종 중단된 자료로 관찰되는 경우, $P(X_1 < X_2)$에 대한 최우추정량을 구하고 근사적 정규성을 밝힌다. 그리고 그 추정량을 기초로 $P(X_1 < X_2)$에 대한 근사적 검정법을 제안하고, 몬테칼로 모의실험을 통하여 여러가지 상황에서 제안된 추정량의 근사적 검정력을 계산하여 비교하였다.

주제어 : 이변량 지수모형, 일변량 중단자료, 이변량 중단자료, 최우추정량.

## 1. 서론

수명검정이나 신뢰도 분석을 다루는 많은 분야에서, 두 개의 부품으로 이루어진 시스템에서 스트레스-스트레스 모형의 신뢰도에 대한 추정문제는 1950년대에 처음으로 소개되면서 많은 사람에 의해 연구되었다. 그러나 공통의 환경적 요인이나 영향에 의해서 두 부품의 수명은 일반적으로 서로 상관관계가 있는 종속적인 확률변수인 경우가 많다. 예를 들어 사람의 양쪽 눈, 양쪽 콩팥등 쌍으로 이루어진 시스템을 생각한다면 각 쌍들의 수명은 서로 종속적인 관계가 있다. 이와같이 두 부품의 수명이 서로 상관관계가 있는 두 확률변수에 대한 모형으로서 Marshall과 Olkin(1967)은 이변량 지수모형을 제안하면서, 그 모형의 여러가지 중요한 성질을 밝혔다. 확률변수$(X_1, X_2)$가 다음과 같은 결합생존함수로 주어진다면 모수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 를 갖는 Marshall과 Olkin의 이변량 지수모형을 따른다고 한다.

$$\begin{aligned}\overline{F}(s,t) &= P(X_1 > s,\ X_2 > t) \\ &= \exp\{-\lambda_1 s - \lambda_2 t - \lambda_3 \max(s,t)\}, \quad s,\ t \geq 0, \qquad (1)\end{aligned}$$

[1]이 논문은 1996년도 경남대학교 학술연구비 지원에 의한 것임

[2]경남대학교 공과대학 컴퓨터공학과 (631-701 경남 마산시 합포구 월영동 449번지) 부교수
[3]경성대학교 이과대학 전산통계학과(608-736 부산광역시 남구 대연동 110번지) 전임강사

여기서 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ 이다. 그리고, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 이라 하면, $\lambda_3/\lambda$ 는 이변량 지수모형에서 $X_1$ 와 $X_2$ 의 상관계수가 되고, 두 부품이 동시에 고장날 확률 $P(X_1 = X_2)$과도 같음은 잘 알려져 있다. 그래서 모수 $\lambda_3 = 0$인 것은 두 부품의 수명 시간이 서로 독립이라는 것과 동일하다. 또한 $\lambda_1$ 과 $\lambda_2$가 같다는 것은 두 부품의 수명 시간에 대한 분포가 동일하다는 것을 의미한다.

완전한 자료가 관찰되는 경우, Arnold(1968)는 이 모수들에 대한 점추정치를 계산하였고, Bemis, Bain과 Higgins(1972) 그리고 Bhattacharyya와 Johnson(1973)은 $\lambda_1$ 과 $\lambda_2$가 같다는 가정하에서 두 부품의 수명에 대한 독립성 검정법을 연구하였다. 그리고 Hanagal과 Kale(1991)은 $\lambda_1$ 과 $\lambda_2$가 같다는 가정이 없는 경우에 최우추정량의 근사적 정규성을 이용하여 몇 가지 독립성및 동일성검정법에 관한 연구를 하였다. 한편 두 부품에 대한 중단시간이 동일한 일변량 중단된 자료(univariate censored data)로 관찰되는 경우 그들은(1992) 모수에 대한 최우추정량을 구하고, 근사적 독립성 및 동일성 검정법을 제안하였다.

그러나 현실적으로, 부품들의 수명이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품에 대한 중단시간이 다른 이변량 1종 중단된 자료(bivariate type 1 censored data)로 관찰되는 경우가 많이 발생한다. 예를 들어 두 부품의 수명에 대한 고장률(failure rate)이 동일하지 않는 경우, 두 부품의 중단시간을 일변량 중단모형보다 이변량 중단모형으로 하는 것이 더 타당하다.

본 논문에서는 Marshall-Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 부품의 수명이 이변량 1종 중단된 자료로 관찰되는 경우,스트레스-스트레스 모형의 신뢰도, $R$에 대한 최우추정량을 구하고 그 추정량의 근사적 정규성을 밝힌다. 그리고 추정량의 근사적 정규성을 이용하여 $R$에 대한 근사적 검정법을 제안하고, 몬테칼로 모의실험을 통하여 여러가지 중단시간하에서 검정력을 계산하여 비교하였다.

## 2. 모형의 개요

식 (1)의 Marshall과 Olkin의 이변량 지수모형에 대해서, 결합 확률밀도함수 $f(s,t)$와 각 부품에 대한 조건부 생존함수는 다음과 같이 각각 주어진다.

$$f(s,t) = \begin{cases} \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\exp(-\lambda_1 s - (\lambda_2+\lambda_3)t), & t > s \\ \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)s - \lambda_2 t), & s > t \\ \lambda_3\exp(-\lambda s), & s = t. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1|X_2=t}(s) &= P(X_1 > s | X_2 = t) \\ &= \begin{cases} \exp(-\lambda_1 s), & t > s \\ \lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)s + \lambda_3 t), & s \ge t, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_2|X_1=s}(t) &= P(X_2 > t|X_1 = s) \\ &= \begin{cases} \exp(-\lambda_2 t), & s > t \\ \lambda_1(\lambda_1+\lambda_3)^{-1}\exp(-\lambda_3(t-s)-\lambda_2 t), & s \le t\ . \end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

또한 스트레스-스트레스의 신뢰도, $R$은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R = \lambda_1/\lambda, \tag{5}$$

여기서 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 이다.
그리고 본 논문에서 사용되는 기호들을 소개하면 다음과 같다.
$t_{x_{1i}},\ i = 1, 2, \cdots, n : X_1$에 대한 $i$번째 관찰치의 중단시간.
$t_{x_{2i}},\ i = 1, 2, \cdots, n : X_2$에 대한 $i$번째 관찰치의 중단시간.
$C_{1i} = I(X_{1i} > t_{x_{1i}}),\ C^*_{1i} = 1 - C_{1i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$
$C_{2i} = I(X_{2i} > t_{x_{2i}}),\ C^*_{2i} = 1 - C_{2i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$
$D_{1i} = I(X_{1i} < X_{2i}),\ D^*_{1i} = 1 - D_{1i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$
$D_{2i} = I(X_{1i} > X_{2i}),\ D^*_{2i} = 1 - D_{2i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$
$D_{3i} = I(X_{1i} = X_{2i}),\ D^*_{3i} = 1 - D_{3i},\ i = 1, 2, \cdots, n.$

## 3. $P(X_1 < X_2)$에 대한 최우추정량

이변량 1종 중단된 자료가 관찰되는 경우, 각 각의 부품들에 대해서 다음과 같은 세가지 경우가 발생할 수 있다.

(1) 두 개의 부품들이 모두 관찰되는 경우($C^*_{1i}C^*_{2i} = 1$).

(2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우($C_{1i}C^*_{2i} + C^*_{1i}C_{2i} = 1$).

(3) 두 개의 부품들이 모두 중단되는 경우($C_{1i}C_{2i} = 1$).

따라서 부품들의 $i$번째 관찰된 수명시간 $(s^*_i, t^*_i)$은 다음과 같이 관찰된다.

$$(s^*_i, t^*_i) = (\min(s_i, t_{x_{1i}}),\ \min(t_i, t_{x_{2i}})) \tag{6}$$

여기서 중단시간 $t_{x_{1i}}$와 $t_{x_{2i}},\ i = 1, 2, \cdots, n$는 미리 정해진 값이며, 같은 값으로 하는 경우가 많다. 특히, $t_{x_{1i}} = t_{x_{2i}}$인 경우는 일변량 1 종 중단모형이 된다.
그러면 우도함수는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n}\{[f(s_i^*,t_i^*)]^{C_{1i}^*C_{2i}^*}\cdot[\overline{F}(s_i^*,t_i^*)]^{C_{1i}C_{2i}}\cdot \\ &\quad [\overline{F}_{X_1|X_2=t}(s_i^*)f_{X_2}(t_i^*)]^{C_{1i}C_{2i}^*}\cdot[\overline{F}_{X_2|X_1=s}(t_i^*)f_{X_1}(s_i^*)]^{C_{1i}^*C_{2i}}\}^{(D_{1i}+D_{2i}+D_{3i})} \\ &= \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\lambda_3^{n_3}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_4}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_5}\exp[-\lambda_1 s_s-\lambda_2 t_s-\lambda_3(s_s+t_s-m_s)]. \end{aligned} \tag{7}$$

여기서

$$n_1=\sum_{i=1}^{n}(D_{1i}C_{1i}^*C_{2i}^*+D_{2i}^*C_{1i}^*C_{2i}),\quad n_2=\sum_{i=1}^{n}(D_{2i}C_{1i}^*C_{2i}^*+D_{1i}^*C_{1i}C_{2i}^*),$$

$$n_3=\sum_{i=1}^{n}D_{3i}C_{1i}^*C_{2i}^*,\quad n_4=\sum_{i=1}^{n}D_{2i}C_{1i}^*,\quad n_5=\sum_{i=1}^{n}(D_{1i}C_{1i}^*C_{2i}^*+D_{1i}C_{1i}C_{2i}^*),$$

$$s_s=\sum_{i=1}^{n}s_i^*,\quad t_s=\sum_{i=1}^{n}t_i^*,\quad m_s=\sum_{i=1}^{n}\min(s_i^*,t_i^*),\quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\text{이다}$$

따라서 로그-우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \log L(\lambda) &= n_1\log\lambda_1+n_2\log\lambda_2+n_3\log\lambda_3+n_4\log(\lambda_1+\lambda_3) \\ &\quad +n_5\log(\lambda_2+\lambda_3)-\lambda_1 s_s-\lambda_2 t_s-\lambda_3(s_s+t_s-m_s), \end{aligned} \tag{8}$$

(8)의 로그-우도함수를 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$에 대해서 각각 일차 편미분한 우도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\log L(\lambda)=\frac{n_1}{\lambda_1}+\frac{n_4}{\lambda_1+\lambda_3}-s_s=0. \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\log L(\lambda)=\frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_5}{\lambda_2+\lambda_3}-t_s=0. \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\log L(\lambda)=\frac{n_3}{\lambda_3}+\frac{n_4}{\lambda_1+\lambda_3}+\frac{n_5}{\lambda_2+\lambda_3}-(s_s+t_s-m_s)=0. \tag{11}$$

모수 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$에 대한 최우추정량, $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2,\widehat{\lambda}_3)$ 위의 우도방정식을 뉴턴-랍슨의 반복적 방법에 의해 얻을 수 있다.

한편 $\sqrt{n}\,(\widehat{\lambda}-\lambda)$의 분포는 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\lambda_1,$

$\lambda_2, \lambda_3$) 인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다. 즉,

$$\sqrt{n}\left((\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3)^T - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T\right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}\ ,\ \mathbf{I}^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), \mathbf{n} \rightarrow \infty, \tag{12}$$

여기서 $I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\log L(\lambda)\right] = ((I_{ij}));\ i, j = 1, 2, 3$ 이며 $I_{11} = E(n_1)/\lambda_1^2 + E(n_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2,\ I_{12} = 0, I_{13} = E(n_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2, I_{22} = E(n_2)/\lambda_2^2 + E(n_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2, I_{23} = E(n_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2, I_{33} = E(n_3)/\lambda_3^2 + E(n_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2 + E(n_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2$ 이다.

그리고 $n_1, n_2, \cdots, n_5$는 확률변수이며, 많은 계산후에 $n_1, n_2, \cdots, n_5$의 기대값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
E(n_1) &= \sum_{i=1}^{n}\{\lambda_1/\lambda - \lambda_1\exp(-\lambda t_{x_{1i}})/\lambda + \exp(-\lambda t_{x_{2i}}) - \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{x_{2i}}) \\
&\quad +(1-\exp(-\lambda_1 t_{x_{1i}}))\cdot\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{x_{2i}})\cdot I(t_{x_{1i}} < t_{x_{2i}}) \\
&\quad +\lambda_3(\exp(-\lambda t_{x_{2i}}) - \exp(-\lambda t_{x_{1i}}))/\lambda\cdot I(t_{x_{2i}} < t_{x_{1i}})\}, \\
E(n_2) &= \sum_{i=1}^{n}\{\lambda_2/\lambda - \lambda_2\exp(-\lambda t_{x_{2i}})/\lambda + \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_{1i}} - \lambda_2 t_{x_{2i}}) \\
&\quad -\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_{1i}}) + (1-\exp(-\lambda_2 t_{x_{2i}}))\cdot\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_{1i}})\cdot I(t_{x_{2i}} < t_{x_{1i}}) \\
&\quad +\lambda_3(\exp(-\lambda t_{x_{1i}}) - \exp(-\lambda t_{x_{2i}})))/\lambda\cdot I(t_{x_{1i}} < t_{x_{2i}})\}, \\
E(n_3) &= \sum_{i=1}^{n}\{(\lambda_3 - \lambda_3\exp(-\lambda\min(t_{x_{1i}}, t_{x_{2i}})))/\lambda\}, \\
E(n_4) &= \sum_{i=1}^{n}\{\lambda_2/\lambda - \lambda_2\exp(-\lambda t_{x_{2i}})/\lambda + \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_{1i}} - \lambda_2 t_{x_{2i}}) \\
&\quad -\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_{1i}}) + [\exp(-\lambda_2 t_{x_{2i}})\cdot[1-\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_{1i}})] \\
&\quad +(\lambda_1+\lambda_3)\cdot(\exp(-\lambda t_{x_{1i}}) - 1)/\lambda]\cdot I(t_{x_{1i}} > t_{x_{2i}})\}, \\
E(n_5) &= \sum_{i} = 1^n\{\lambda_1/\lambda - \lambda_1\exp(-\lambda t_{x_{1i}})/\lambda + \exp(-\lambda t_{x_{2i}}) - \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{x_{2i}}) \\
&+ \lambda_1\exp(-\lambda t_{x_{1i}})/\lambda - \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{x_{2i}} - \lambda_1 t_{x_{1i}})\}\text{이다.}
\end{aligned}$$

최우추정량의 불변성(invariance property)에 의해, $R$에 대한 최우추정량은 다음과 같이 주어진다.

$$\widehat{R} = \widehat{\lambda}_1/\widehat{\lambda}, \tag{13}$$

여기서 $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_3$이다.

한편, (12)과 Delta방법을 이용한다면, $\widehat{R}$에 대한 극한분포는 다음과 같음을 알 수있다.

$$\sqrt{n}\,(\widehat{R} - R) \ \rightarrow \ N(0, \Delta), \tag{14}$$

여기서 $\Delta = \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial R}{\partial \lambda_3}\right) \cdot I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial R}{\partial \lambda_3}\right)^T$ 이며 $\frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = (\lambda_2 + \lambda_3)/\lambda^2$, $\frac{\partial R}{\partial \lambda_2}$ $= -\lambda_1/\lambda^2$, $\frac{\partial R}{\partial \lambda_3} = -\lambda_1/\lambda^2$ 이다.

따라서 스트레스-스트레스의 신뢰도 $R = P(X_1 < X_2)$에 대해서 유의수준 $\alpha$인 가설 $H_0$ : $R = R_0$ 대 $H_1 : R < R_0$에 대한 검정함수는 다음 과 같이 주어진다.

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \frac{\widehat{R} - R_0}{\sqrt{\widehat{\Delta}/n}} \geq z_{1-\alpha} \\ 0, & \text{그외} \end{cases} \tag{15}$$

여기서 $\widehat{\Delta} = \Delta|_{\lambda = \widehat{\lambda}}$이며 $z_{1-\alpha}$는 표준정규분포의 오른쪽 꼬리면적이 $\alpha$가 되는 값이다.

## 4. 모의실험

이 장에서는 3장에서 구한 스트레스-스트레스의 신뢰도에 대한 가설 $H_0 : R = R_0$ 대 $H_1 : R < R_0$에 대한 검정력을 계산하고자 한다. 우선 Marshall-Olkin의 이변량 지수분포의 난수는 Friday와 Patil(1977)이 제안한 방법으로 생성하였으며, 사용된 모수는 $\lambda_3 = 0.03, 0.06, 0.09$ 각각에 대해서, $\lambda_1 = 0.13$으로 고정시켜 놓고, $\lambda_2 = 0.08, 0.16$ 으로 변화시켜 가면서 스트레스- 스트렝스의 신뢰도에 대한 가설검정의 검정력을 유의수준 0.10, 0.05에 대하여 각각 계산하였다. 그리고 각 모수들에 대하여 표본의 수는 30, 50, 100개를 생성하였으며, 각각의 표본의 수에서 500번 반복하여 검정력을 계산하였다. 이변량 1종 중단시간은 $\lambda_2 = 0.08$ 일 때 모든 $i$에 대해, $(t_{x_{1i}}, t_{x_{2i}}) = (12, 17)$, $(16, 22)$, $(25, 35)$ 을 사용했으며, $\lambda_2 = 0.16$일 때 모든 $i$에 대하여, $(t_{x_{1i}}, t_{x_{2i}}) = (15, 11)$, $(20, 14)$, $(30, 20)$을 사용하였다. 여기에 대한 결과 는 <표 1>과 <표 2>에 나타나 있다. <표 1>과 <표 2>에 의하면 각각의 이변량 중단시간에 대하여,시스템의 신뢰도의 값이 $H_0 : R = R_0$에서 멀어질수록 모든 경우에 검정력이 향상됨을 알 수 있다. 또한 각 표본의 크기에 대하여, 중단시간이 증가할수록(중단비율이 낮을수록) 검정력이 향상됨을 알 수 있다. 그리고 모든 경우에 표본의 크기가 증가할수록 검정력이 향상됨을 알 수 있다.

<표 1> 가설 $H_0 : R = 0.55$ 대 $H_1 : R < 0.55$에 대한 검정력
($\lambda_1 = 0.13$이고 $\lambda_2 = 0.08$인 경우)

| $\lambda_3$ 의 값 | 시스템 신뢰도 | 표본의 크기 | 유의수준 | 이변량 중단시간 (25.0,35.0) | (16.0,22.0) | (12.0,17.0) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.03 | 0.5417 | 30 | 0.10 | 0.1140 | 0.1260 | 0.1240 |
| | | | 0.05 | 0.0740 | 0.0740 | 0.0700 |
| | | 50 | 0.10 | 0.1220 | 0.1100 | 0.1080 |
| | | | 0.05 | 0.0700 | 0.0600 | 0.0480 |
| | | 100 | 0.10 | 0.1460 | 0.1340 | 0.1420 |
| | | | 0.05 | 0.0700 | 0.0760 | 0.0660 |
| 0.06 | 0.4815 | 30 | 0.10 | 0.3880 | 0.3600 | 0.3500 |
| | | | 0.05 | 0.2620 | 0.2460 | 0.2380 |
| | | 50 | 0.10 | 0.4280 | 0.4180 | 0.4060 |
| | | | 0.05 | 0.2960 | 0.2880 | 0.2640 |
| | | 100 | 0.10 | 0.6500 | 0.6240 | 0.6160 |
| | | | 0.05 | 0.4960 | 0.4800 | 0.4460 |
| 0.09 | 0.4333 | 30 | 0.10 | 0.6020 | 0.5960 | 0.5680 |
| | | | 0.05 | 0.4580 | 0.4520 | 0.4460 |
| | | 50 | 0.10 | 0.7400 | 0.7380 | 0.7080 |
| | | | 0.05 | 0.6060 | 0.5960 | 0.5820 |
| | | 100 | 0.10 | 0.9280 | 0.9220 | 0.9140 |
| | | | 0.05 | 0.8660 | 0.8540 | 0.8480 |

<표 2 > 가설 $H_0 : R = 0.45$ 대 $H_1 : R < 0.45$에 대한 검정력
($\lambda_1 = 0.13$이고 $\lambda_2 = 0.16$인 경우)

| $\lambda_3$ 의 값 | 시스템 신뢰도 | 표본의 크기 | 유의수준 | 이변량 중단시간 (20.0,14.0) | (15.0,11.0) | (30.0,20.0) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.03 | 0.4063 | 30 | 0.10 | 0.2580 | 0.2400 | 0.2360 |
| | | | 0.05 | 0.1680 | 0.1660 | 0.1520 |
| | | 50 | 0.10 | 0.2840 | 0.2720 | 0.2500 |
| | | | 0.05 | 0.1780 | 0.1740 | 0.1700 |
| | | 100 | 0.10 | 0.4140 | 0.3900 | 0.3840 |
| | | | 0.05 | 0.2740 | 0.2720 | 0.2460 |
| 0.06 | 0.3714 | 30 | 0.10 | 0.4400 | 0.4280 | 0.4240 |
| | | | 0.05 | 0.2920 | 0.2720 | 0.2800 |
| | | 50 | 0.10 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4560 |
| | | | 0.05 | 0.3720 | 0.3580 | 0.3380 |
| | | 100 | 0.10 | 0.7400 | 0.7080 | 0.6580 |
| | | | 0.05 | 0.5720 | 0.5660 | 0.5420 |
| 0.09 | 0.3421 | 30 | 0.10 | 0.5640 | 0.5520 | 0.5520 |
| | | | 0.05 | 0.4460 | 0.4380 | 0.4280 |
| | | 50 | 0.10 | 0.6980 | 0.6800 | 0.6580 |
| | | | 0.05 | 0.5460 | 0.5420 | 0.5240 |
| | | 100 | 0.10 | 0.9060 | 0.8980 | 0.8740 |
| | | | 0.05 | 0.8200 | 0.8060 | 0.7820 |

## 참 고 문 헌

1. Arnold, B. C. (1968). Parameter Estimation for a Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association,* 62, 848-852.

2. Bemis, B. M., Bain, L. T. and Higgins, J. J. (1972). Estimation and Hypothesis Testing for the Parameters of a Bivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association,* 67, 927-929.

3. Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R. A. (1973). On Test of Independence in a Bivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association,* 68, 704-706.

4. Friday, D. S. and Patil, G. P. (1977). A Bivariate Exponential Model with Applications to Reliability and Computer Generation of Random Variables, *The Theory and*

*Applications of Reliability,* ed. Tsokos, C. P. abd Shimi, I. N., Academic, 527-549.

5. Hanagal, D. D. and Kale, B. K. (1991). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Models, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* 20(9), 2625-2643.

6. Hanagal, D. D. and Kale, B. K. (1992). Some Inference Results in Bivariate Exponential Distributions Based on Censored Samples, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* 21(5), 1273-1295.

7. Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association,* 62, 30-44.

# Testing for $P(X_1 < X_2)$ in Bivariate Exponential Model with Censored Data [3]

**Jin Pyo Park and Jang Sik Cho**

**Abstract**

In this paper, we obtain maximum likelihood estimators for $P(X_1 < X_2)$ in the Marshall and Olkin's bivariate exponential model with bivariate censored data. The asymptotic normality of the estimator is derived. Also we propose approximate testing for $P(X_1 < X_2)$ based on the M.L.E. We compare the test powers under various conditions through Monte Carlo simulation.

[3]This research was supported by a Kyungnam University Faculty Research Grant for 1996. Jin Pyo Park is a associate professor, Department of Computer Engineering, Kyungnam University, Masan, 631-701, Korea. Jang Sik Cho is a Full-time lecturer, Department of Computer Science and Statistics, Kyungsung University, Pusan, 608-736, Korea.