Journal of Statistical
Theory & Methods
1997, Vol. 8, No. 2, pp. 183 ~ 194

가속수명자료에 대한 경험적 베이즈 비교연구[1]

조건호 · 이우동[2]

요약

이 논문의 목적은 제2종 중도절단자료된 가속수명 자료가 형상모수를 고정시킨 와이블분포를 한다는 가정에서 데이터에 대한 경험적베이즈 방법을 이용하여 분석하는데 있다. 이 논문에서는 적률추정법과 최우추정법을 이용한 경험적 베이지안 방법을 제안하고, Pathak등에 의해 제안된 경험적베이지안 방법과 비교한다. 특히, 인위적 자료를 이용한 모의 실험을 통하여 추정량들을 추정된 베이즈위험측면에서 비교 한다.

주제어: 분산함수, 일반화 선형 모형, 준-우도, 평균과 산포의 동시 모형화, 편차잔차

1. 서론

수명모형(lifetime model)은 1960년대 이후 공학분야에서 광범위하게 적용되어 왔으며 특히 응용 면에 탁월한 결과를 얻게 되어 이에 대한 연구가 국내외의 많은 학자들에 의해 활발하게 진행되어 오고 있으며 기계장치의 부품에 대한 수명이나 신뢰성에 대한 문제를 다루는 신뢰수명(reliability and life testing)분야에 많이 사용되고 있다. 현대과학의 발달로 기계나 그 부품의 평균수명(mean lifetime)이 길어졌기 때문에 신뢰수명모형의 분석을 위한 자료를 수집하는 데는 많은 경비와 시간이 요구된다. 이러한 어려움을 극복하는 한 방법으로 정상적인 환경조건보다는 더 강하거나 열악한 조건(accelerated condition)에서 시험을 하여 부품의 수명시간을 단축시켜 시험시간을 짧게 하는 방법으로 가속수명시험(accelerated life tests)이 개발되었다. 이러한 수명시험시 일정충격(constant stress)방법으로 가속수명자료에 대한 통계적 분석이 Kielpinski와 Nelson(1975), Meeker와 Nelson(1975, 1978), Nelson(1990) 그리고 Viertl(1988)등에 의해 진행되었으며, 그들의 관심은 가속수명자료를 이용하여 정상상태에서 기계 부품의 신뢰도함수(reliability function), 고장률함수(failure rate function) 그리고 평균수명등을 추론 하는데 있었다. 그러나, 신뢰수명분야에서 이용되는 기존의 고전적인 통계적 분석방법(classical statistical method)은 누적된 경

[1]이 논문은 1996년도 경산대학교 기린 연구비 지원에 의한 것임
[2]경산대학교 자연과학대학 통계학과

험과 유사제품 또는 예비시험자료(과거자료)를 충분히 이용하지 못하는 단점이 있다. 따라서, Pathak과 Zimmer(1981)는 이러한 과거자료를 활용하기 위하여 베이지안 접근방법을 통하여 정상상태에서 부품의 평균수명을 추정하기 위하여 수명분포가 고장율 λ 인 지수분포(exponential distribution)이고 가속효과가 $\theta\lambda, \theta > 1$ 인 가정하에서 λ의 베이즈 추정량(Bayes estimator)이 가속모수(acceleration parameter) θ의 함수인 점을 고려하여 과거자료를 이용한 가속모수 θ 를 추정하는 방법을 제시하였다. 위의 제시된 방법을 토대로 Pathak, Singh과 Zimmer(1987)는 수명분포가 고장율 λ 인 지수분포이고 λ의 공액사전분포(conjugate prior distribution)의 평균이 알려져 있을 때, 가속수명시험에서 얻은 완전자료(complete data)를 이용한 부품의 평균성능을 추정하였다.

본 연구에서는 형상모수가 고정된 경우의 와이블 수명모형을 가정 했는데, 실제 시험에 있어 고장이 발생하지 않거나 거의 발생하지 않는 경우에는 추정량을 구하지 못한다. 이러한 경우 와이블분포의 형상모수를 가정하고 자료분석을 실시하면 상당히 정확한 추정량을 구할 수 있다(윤상운(1994),p260). 그리고, Robbins(1964)에 의해 소개된 경험적 베이지안 방법(empirical Bayesian method)을 가속수명자료의 분석에 이용하는 방법을 소개하고, 이러한 방법을 토대로 가속수명자료를 분석하기 위하여 다음 두 측면에서 연구하였다.

(1)Pathak, Singh 그리고 Zimmer에 의한 지수수명모형(exponential lifetime model)에 대한 연구를 형상모수를 고정시킨 와이블분포수명모형에 대해 연구를 진행하고, 가속수명시험에서 얻은 자료가 완전자료라는 가정보다는 실제의 실험에서 흔히 얻을 수 있는 제2종 중도절단자료(type II censored data)로 모형을 확장시킨다.

(2)열악한 조건하에서 제2종 중단모형에서 관측된 부품들의 고장시간이 $m + 1$개의 자료집합(data set)으로 주어질 때, 이러한 부품들의 고장시간에 대한 수명분포를 와이블(Weibull)분포로 가정하고 이 분포의 모수에 대한 사전분포가 알려져 있지 않은 모수들을 가지는 분포일 때, m개의 자료집합을 이용하여 이 모수들에 대한 다양한 경험적 베이즈 추정방법들을 연구한다. 위의 방법을 토대로 얻은 척도모수에 대한 여러 개의 경험적 베이즈 추정량(empirical Bayes estimator)들을 베이즈위험(Bayes risk) 측면에서 비교하고자 한다.

2. 경험적 베이즈 추정

2.1 모형

일반적으로 열악한 조건에서 실험한 기계수명에 대한 고장률은 정상조건에서 실험한 기계수명에 대한 고장률보다 비례적으로 증가할 것이다. 이러한 측면을 고려하면, 정상조건에서 고장률함수를 $h_0(t)$라 하고 열악한 조건에서 고장률함수를 $h(t)$라 하면 두 고장률함수에 대한 표현식은 아래와 같이 표현된다.

$$h(t) = \theta h_0(t)$$

여기서 $\theta > 1$, θ는 알려져있지 않은 고정된 상수(unknown fixed constant)인 가속계수이다.

가속수명시험에서 얻은 m+1개의 자료집합에 대해, n_i개의 부품에 대한 임의표본(random sample)중에서 처음 r_i개의 부품이 고장난 관측시간은 다음과 같다.

$$X_{i1} < X_{i2} < \cdots < X_{ir_i}, i = 1, 2, \cdots, m + 1.$$

여기서 m개의 자료집합은 과거의 정보이며 $m+1$번째 자료집합은 현재의 정보라 하자. 위와같은 형태의 제2종 중도절단된 가속수명자료가 주어졌을 때, 위의 자료는 자료집합i에 대해 독립이고 동일한 분포를 가지고 모수$\underline{\delta}$를 갖는 확률밀도함수$f(x|\underline{\delta})$로 부터 얻어진 확률표본이라 하자. 그리고 가속수명자료들이 정상조건에서 와이블분포를한다고 가정하면 고장률함수는 $h_0(x|\lambda) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}$이고, 확률밀도함수(probability density function, p.d.f.)와 신뢰도함수는 각각,

$$f_0(x|\lambda) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-x^{\alpha}\lambda), x > 0$$

그리고

$$R_0(x\ |\lambda) = \exp(-x^{\alpha}\lambda)$$

이다. 특히, i번째 자료집합에 대한 모수를 λ_i라 두고 형상모수α는 알려져 있는 고정된 상수(known and fixed constant)라 가정하자. 그러면 열악한 환경에서의 고장률함수는

$$h(x|\theta\lambda_i) = \theta\alpha\lambda_i x^{\alpha-1}$$

이며, 신뢰도함수와 확률밀도함수는 각각

$$R(x|\theta\lambda_i) = \exp(-\theta\lambda_i x^{\alpha})$$

와

$$f(x|\theta\lambda_i) = \theta\alpha\lambda_i x^{\alpha-1}\exp(-\theta\lambda_i x^{\alpha}), 1 < \theta, 0 < x < \infty, 0 < \lambda_i < \infty$$

이다.

위의 가정으로 부터, i번째 자료집합에서의 우도함수(likelihood function)는

$$L = \frac{n_i!}{(n_i - r_i)!}(\prod_{j=1}^{r_i} {x_{ij}}^{\alpha-1})(\theta\alpha\lambda_i)^{r_i}\exp[-\theta\lambda_i\{\sum_{j=1}^{r_i} {x_{ij}}^{\alpha} + {x_{ir_i}}^{\alpha}(n_i - r_i)\}]$$

이며

$$S_i = \sum_{j=1}^{r_i} {X_{ij}}^{\alpha} + (n_i - r_i){X_{ir_i}}^{\alpha}$$

라 하면, S_i는 모수 λ_i의 충분통계량(sufficient statistic)이 되며, 주어진 λ_i에 대한 S_i의 조건부 확률밀도함수(conditional p.d.f.)는 다음과 같다.

$$f(s_i|\lambda_i) = (\theta\lambda_i)^{r_i}/\Gamma(r_i){s_i}^{r_i-1}\exp(-\theta s_i\lambda_i), s_i > 0 \tag{1}$$

베이지안 모형에서 λ_i에 대한 공액사전분포는 감마분포(gamma distribution)이며, ($\lambda_i \sim \Gamma(a,b)$), 그 때 모수를 a,b라 한다면 사전분포는

$$\pi(\lambda_i|a,b) = b^a/\Gamma(a)(\lambda_i)^{a-1}\exp(-b\lambda_i), \lambda_i > 0, a, b > 0 \tag{2}$$

이다. 위의 사전분포와 우도함수를 이용하여 사후분포(posterior distribution)를 구해보면 아래와 같다.

$$p(\lambda_i|s_i) = \frac{\pi(\lambda_i)f(s_i|\lambda_i)}{\int_0^\infty \pi(\lambda_i)f(s_i|\lambda_i)d\lambda_i}$$

먼저, S_i에 대한 주변확률밀도함수(marginal p.d.f.),

$$f(s_i|\theta) = b^a\theta_i^r s_i^{r_i-1}\Gamma(r_i+a)(\theta s_i+b)^{-(r_i+a)}/(\Gamma(r_i)\Gamma(a)) \tag{3}$$

는 쉽게 계산된다. 그러므로 사후확률밀도함수(posterior p.d.f.)는 $\lambda_i > 0$일 때,

$$p(\lambda_i|s_i) = (\theta s_i+b)^{r_i+a}\lambda_i^{r_i+a-1}\exp\{-\lambda_i(\theta s_i+b)\}/\Gamma(r_i+a) \tag{4}$$

이다. S_i에 대한 모수 λ_i에 대한 사후분포는 모수 r_i+a와 θS_i+b 를 갖는 감마분포($\lambda_i|S_i \sim \Gamma(r_i+a, \theta S_i+b)$)이다.

손실함수 (loss function)가 제곱오차손실함수 (squared error loss function),

$$L(\hat{\lambda},\lambda) = (\hat{\lambda}-\lambda)^2$$

인 경우, 식(4)를 이용하면 λ_i에 대한 사후평균(posterior mean)은

$$\begin{aligned} E[\lambda_i|S_i] &= \int_0^\infty \lambda_i p(\lambda_i|S_i)d\lambda_i \\ &= (r_i+a)/(b+\theta S_i) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서, 현재의 자료집합을 이용한 λ_m+1에 대한 베이즈 추정량은

$$E[\lambda_{m+1}|S_{m+1}] = (r_m+1+a)/(\theta S_{m+1}+b) = \hat{\lambda}_{m+1}$$

이다.

2.2 모수의 경험적 베이즈 추정

모수 λ_i의 사전분포의 평균을 알고 있는 경우, 추정량 $\hat{\lambda}_{m+1}$에 포함된 a,b,θ에 대한 적절한 추정량들을 얻기 위하여 다양한 추정방법들을 이용하여 λ_{m+1}에 대한 경험적 베이즈 추정량들을 구해보자.

2.2.1 방법 A

λ_i에 대한 사전확률분포의 평균($\eta_0 = a/b$)을 알고 있는 경우에, Pathak, Singh과 Zimmer에 의해 제안된 방법을 이용하여 i번째 자료집합으로 부터 θ에 대한 불편추정량 (unbiased estimator)을 구해보자. 식(3)으로부터, S_i의 α차 적률(moment)을 구하면

$$E[S_i^\alpha|\theta] = \Gamma(a-\alpha)\Gamma(r_i+\alpha)(b/\theta)^\alpha/[\Gamma(a)\Gamma(r_i)] \tag{5}$$

이다. $\alpha = -1$을 식(5)에 대입하여 정리하면,

$$E[S_i^{-1}|\theta] = \eta_0\theta/(r_i - 1)$$

이 된다. 그러므로 i번째 자료집합으로부터의 가속계수 θ에 대한 불편추정량은

$$\hat{\theta}_i = (r_i - 1)/(S_i\eta_0)$$

이 되고, 과거 m개의 자료집합을 이용하면 m개의 불편추정량들을 구할 수 있으며 이러한 추정량들의 평균이 가속계수 θ의 불편추정량으로 사용되어질 수 있다. 즉,

$$\hat{\theta}_A = \sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i/m. \tag{6}$$

식(6)의 추정량 $\hat{\theta}_A$와 식(1)로부터 얻어지는 $E[S_i^{-1}|\lambda_i] = \theta\lambda_i/(r_i-1)$ 임을 이용하면 가속수명시험시 직접적으로 추정할 수 없는 모수 λ_i에 대한 추정량을 아래와 같이 구할 수 있다. 즉,

$$\hat{\lambda}_i = (r_i - 1)/(\hat{\theta}_A S_i)$$

위의 추정량 $\hat{\lambda}_i, i = 1, 2, \cdots, m$을 사용하여 적률추정방법(method of moment)으로 a와b에 대한 추정량을 얻기 위하여 식(2)로부터 α차 적률(moment)은

$$m_\alpha = \Gamma(a+\alpha)/[\Gamma(a)b^\alpha]$$

이므로, $\alpha = 1, 2$에 대하여 $m_1 = a/b = \eta_0$, $m_2 = a(a+1)/b^2$임을 알 수 있고, 위의 m_1과 m_2를 이용하여 a와b에 대한 적률추정량(method of moment estimator)들을 구하면

$$\hat{a}_A = \hat{b}_A\eta_0, \hat{b}_A = \eta_0/(\hat{m}_2 - \eta_0^2)$$

이 된다. 여기서, $\hat{m}_2 = (1/m)\sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i^2$ 이다. 식(12)의 θ, a와 b의 추정량 $\hat{\theta}_A$, $\hat{a}_A$과 $\hat{b}_A$ 를 이용한 모수 λ_{m+1}에 대한 경험적 베이즈 추정량은

$$\hat{\lambda}_A = (r_{m+1} + \hat{a}_A)/(\hat{\theta}_A S_{m+1} + \hat{b}_A)$$

이 된다.

2.2.2 방법 B

방법A와 같은 가정 (η_0:known)에서, 식(3)의 S_i에 대한 주변확률분포를 이용하여 모수 θ,a,b에 대한 적률추정량들을 구하여 고장률 λ_{m+1}에 대한 경험적 베이즈 추정을 고려해 볼 수 있다. 식(5)의 α차 적률을 이용하면, 1차와 2차 적률이 각각

$$M_1 = E[(S_i/r_i)|\theta] = b/(\theta(a-1))$$

과

$$M_2 = E[S_i^2/(r_i(r_i+1))|\theta] = b^2/(\theta^2(a-1)(a-2))$$

인 관계를 이용하여 a,b,θ에 대한 적률추정량들을 구하면

$$\hat{a}_B = \frac{(\hat{M}_1^2 - 2\hat{M}_2)}{(\hat{M}_1^2 - \hat{M}_2)}, \ \hat{b}_B = \hat{a}_B/\eta_0$$

그리고,

$$\hat{\theta}_B = \frac{\hat{b}_B}{[\hat{M}_1(\hat{a}_B - 1)]}$$

들을 얻을 수 있다. 여기서, $\hat{M}_1 = (1/m)\sum_{i=1}^m S_i/r_i$, $\hat{M}_2 = (1/m)\sum_{i=1}^m S_i^2/(r_i(r_i+1))$이다. a, b와 θ의 추정량 $\hat{a}_B$, $\hat{b}_B$ 과 $\hat{\theta}_B$ 들을 이용하여 모수 λ_{m+1} 에 대한 경험적 베이즈 추정량,

$$\hat{\lambda}_B = (r_{m+1} + \hat{a}_B)/(\hat{\theta}_B S_{m+1} + \hat{b}_B)$$

를 얻을 수 있다.

2.2.3 방법 C

마지막으로, θ,a,b에 대한 추정량으로 Berger(1985)의 ML-II방법의 이용을 고려해 보자. 식(3)을 이용한 우도함수는

$$L(a,b,\theta) = \prod_{i=1}^m [\Gamma(r_i+a)b^a\theta_i^r s_i^{r_i-1}/\{\Gamma(r_i)\Gamma(a)(\theta s_i + b)^{r_i+a}\}]$$

이고, 로그-우도함수(log-likelihood function)는

$$\begin{aligned} l(a,b,\theta) &= \log L(a,b,\theta) \\ &= \sum_{i=1}^m [\log\Gamma(r_i+a) + r_i\log\theta + a\log b + (r_i-1)\log s_i - \log\Gamma(r_i) \\ &- \log\Gamma(a) - (r_i+a)\log(\theta s_i + b)], \end{aligned}$$

이며, $a/b = \eta_0$ 이므로

$$\begin{aligned} l(a,\theta) &= \sum_{i=1}^m [\log\Gamma(r_i+a) - \log\Gamma(a) - (r_i+a)\log(\theta s_i + a/\eta_0) + a\log(a/\eta_0) \\ & r_i\log\theta + (r_i-1)\log s_i - \log\Gamma(r_i)], \end{aligned}$$

로 표현되어, 이 식을 각각 θ와a에 대하여 1차 편미분(first partial derivative)하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(a,\theta)}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{m}[\psi(r_i+a)-\psi(a)-\log(\theta s_i+a/\eta_0)-(r_i+a)\eta_0/(\theta s_i+a/\eta_0)\\ &\quad +\log(a/\eta_0)+a((1/\eta_0)/(a/\eta_0))]\ ,\end{aligned}$$

여기서 $\psi(a)=\frac{d\log\Gamma(a)}{da}$이고, Abramowitz과 Stegun(1964, p258)에 의하여 표현된

$$\psi(a+r_i)=1/(r_i-1+a)+1/(r_i-2+a)+\cdots+1/(1+a)+1/a+\psi(a)$$

를 위 식에 적용하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(a,\theta)}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{r_i}(r_i-j+a)^{-1}-\log(\theta s_i+a/\eta_0)-\eta_0(r_i+a)/(\theta s_i+a/\eta_0)\\ &\quad +\log(a/\eta_0)+1]\ ,\end{aligned}$$

이 된다. 그리고,

$$\frac{\partial l(a,\theta)}{\partial \theta}=\sum_{i=1}^{m}[r_i/\theta-(r_i+a)s_i/(\theta s_i+a/\eta_0)]$$

이 된다. a 와 θ에 대한 최우추정량(maximum likelihood estimator)을 얻기 위하여 Newton-Raphson법으로 근을 찾는다면 아래와 같은 2차 편미분(second partial derivative) 한 식들이 필요하다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l(a,\theta)}{\partial a^2} &= \sum_{i=1}^{m}[a^{-1}-\sum_{j=1}^{r_i}(r_i-j+a)^{-2}-(\eta_0\theta s_i+a)^{-1}-(\eta_0^{-1}(\theta s_i+a\eta_0^{-1})\\ &\quad -\eta_0^{-2}(r_i+a))/(\theta s_i+a\eta_0^{-1})^{-2}],\\ \frac{\partial l(a,\theta)}{(\partial a\partial\theta)} &= \sum_{i=1}^{m}[\eta_0^{-1}(r_i+a)s_i(\theta s_i+a\eta_0^{-1})^{-2}-s_i(\theta s_i+a\eta_0^{-1})^{-1}]\end{aligned}$$

그리고

$$\frac{\partial l(a,\theta)}{\partial\theta^2}=\sum_{i=1}^{m}[s_i^2(\theta s_i+a\eta_0^{-1})^{-2}-r_i\theta^{-2}].$$

Newton-Raphson법에 의한 θ 와 a의 근을 $\hat{\theta}_C$, $\hat{a}_C$라 하면, $\hat{b}_C=\hat{a}_C/\eta_0$ 이 되고, 이 추정량들을 이용한 λ_{m+1} 에 대한 경험적 베이즈 추정량은

$$\hat{\lambda}_C=\frac{(r_{m+1}+\hat{a}_C)}{(\hat{\theta}_C S_{m+1}+\hat{b}_C)}$$

이 된다.

3. 추정량들에 대한 비교

베이즈 추정량 $\hat{\lambda}_{m+1}$에 대한 베이즈 위험함수 (Bayes risk function)를 구하고, 모수λ에 대한 경험적 베이즈 추정량들 $\hat{\lambda}_A$, $\hat{\lambda}_B$, $\hat{\lambda}_C$ 에 대한 베이즈 위험함수들은 직접 구하기 어렵기 때문에 모의 실험을 통하여 추정된 베이즈위험 (estimated Bayes risk) 측면에서 방법 A, B, C로 얻은 경험적 베이즈 추정량들을 비교 연구하고자 한다.

먼저, 사전분포π에 의한 $\hat{\lambda}_{m+1}$에 대한 베이즈 위험함수를 $r(\pi, \hat{\lambda}_{m+1})$라 두면,

$$\begin{aligned} r(\pi, \hat{\lambda}_{m+1}) &= E_{\lambda_{m+1}}\{E_{S_m+1|\lambda_{m+1}}(\hat{\lambda}_{m+1} - \lambda)^2\} \\ &= a(a+1)(r_m + 1 + a + 1)^{-1}b^{-2}, \end{aligned}$$

여기서, $E_{S_i|\lambda_i}$는 식(1)을 이용한 기대값이고, E_{λ_i}는 식(2)의 사전분포에 대한 기대값이다. 위의 식에서도 알 수 있듯이 베이즈 위험함수는 가속계수 θ에 의존하지 않음을 알수 있다.

그리고, $(\hat{a}_A, \hat{b}_A, \hat{\theta}_A)$, $(\hat{a}_B, \hat{b}_B, \hat{\theta}_B)$ 및 $(\hat{a}_C, \hat{b}_C, \hat{\theta}_C)$는 (a, b, θ) 의 일치 추정량 (consistent estimator)이므로 Martz과 Lwin (1989, p79)에 의하면 $\hat{\lambda}_A$, $\hat{\lambda}_B$ 와 $\hat{\lambda}_C$는 점근적 최적성 (asymptotically optimality)을 만족시키는 추정량들이다.

위 추정량들을 비교하기 위하여 난수를 이용한 모의실험을 실시하였다. 이 실험에서 가정된 모수 값은 사전분포(2)에 대한 모수로 $a = 4$, $\eta_0 = 2(b = 2)$인 경우와 $a = 4$, $\eta_0 = 0.08(b = 50)$인 경우를 가정하였고, 가속계수는$\theta = 100$으로, 표본분포(1)에 대하 여 형상모수는 $\alpha = 6.0$으로 가정하였다. $a = 4$, $\eta_0 = 2(b = 2)$인 경우는 사전분포의 분산이 1인 경우이고, $a = 4$, $\eta_0 = 0.08(b = 50)$인 경우는 사전분포의 분산이 0.0016으로 분산이 100배 정도 줄어든 경우를 가정하였다. 그리고 과거의 자료집합의 수는$m = 10$ 이며, 각 자료집합에 대한 표본의 수는 $n_i = 10, 20, 30, 50, 100$으로 가정하고, 제2종 중단 비율(censoring rate)들을 각각 0.1, 0.2, 0.3, 0.5로 두고 실험하였다.

모의실험계획의 알고리즘(algorithm)은 아래와 같다. 주어진 a,η_0,θ,n_i, (r_i)에 대하여

단계1: (2)로부터 난수λ_i를 발생.

단계2: 단계1의 난수 λ_i에 대해 (1)을 이용하여 S_i를 발생.

단계3: 단계2에서 얻어진 난수 $S_1, S_2, \cdots, S_m$을 이용하여 $\hat{a}_A$,$\hat{b}_A$, $\hat{\theta}_A$,$\hat{a}_B$,$\hat{b}_B$,$\hat{\theta}_B$과 $\hat{a}_C$,$\hat{b}_C$, $\hat{\theta}_C$들을 얻음.

단계4: 각 추정량들에 대하여 $(\hat{\lambda}_I - \lambda_{m+1})^2$,$I = A, B, C$를 계산.

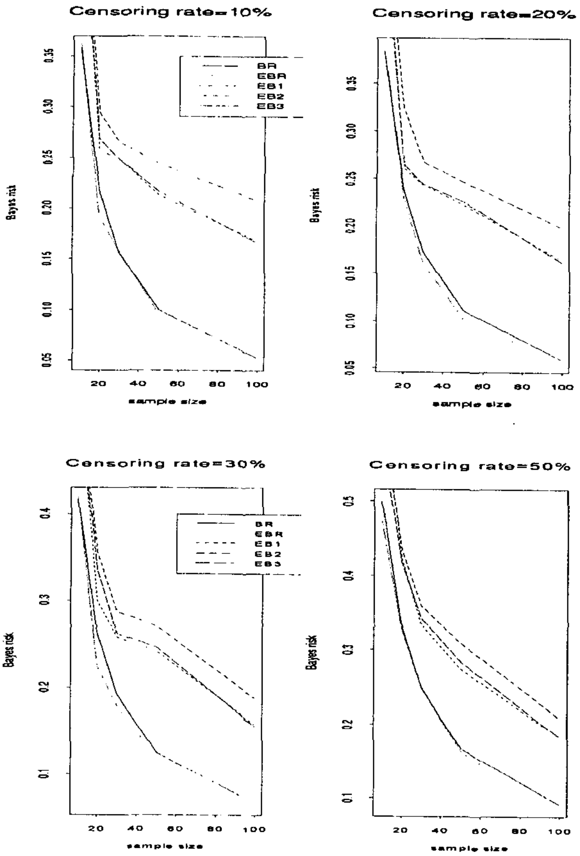
위의 단계1에서 단계4에 대해 반복을 실시하여 $(\hat{\lambda}_I - \lambda_{m+1})^2$ 의 반복 수에 대한 평균을 취한다면 경험적 베이즈 추정량들에 대하여 추정된 베이즈 위험함수들을 각각 얻을 수 있다. 이 연구에서는 1000번을 반복하여 얻은 추정값들을 계산하였다. $a = 4$, $\eta_0 = 2(b = 2)$인 경우를 아래의 그림 3.1에 나타내었고, $a = 4$, $\eta_0 = 0.08(b = 50)$인 경우는 표??에 그 결과를 수록하였다.

표 1: 추정된 베이즈 위험함수($a = 4, \eta_0 = 0.08, m = 10$)

n	p	$r(\pi, \hat{\lambda}_{m+1})$	$\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_{m+1})$	$\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_A)$	$\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_B)$	$\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_C)$
10	10	0.571429	0.580831	0.801634	0.810766	0.794831
	20	0.615385	0.612919	0.833977	0.821217	0.804995
	30	0.666667	0.663703	0.865859	0.862087	0.841228
	50	0.800000	0.752802	1.030180	0.963034	0.928350
20	10	0.347826	0.307258	0.412582	0.469825	0.429256
	20	0.380952	0.327777	0.437852	0.511551	0.474393
	30	0.421053	0.417059	0.568614	0.605207	0.562993
	50	0.533333	0.607506	0.683184	0.826381	0.703960
30	10	0.250000	0.252694	0.396685	0.424309	0.396438
	20	0.275862	0.259534	0.391843	0.428857	0.392126
	30	0.307692	0.292006	0.421693	0.470263	0.429003
	50	0.400000	0.408707	0.539442	0.583135	0.555588
50	10	0.160000	0.153175	0.341273	0.390811	0.346951
	20	0.177778	0.165117	0.356303	0.405130	0.363490
	30	0.200000	0.187071	0.381377	0.427580	0.389304
	50	0.266667	0.256447	0.433107	0.491928	0.449670
100	10	0.084211	0.079901	0.268342	0.332367	0.265779
	20	0.094118	0.105695	0.234530	0.291495	0.232742
	30	0.106667	0.106000	0.226846	0.279781	0.224976
	50	0.145455	0.151575	0.284158	0.328088	0.280056

표1에서 n은 자료의 수이며, p는 중단비율(%)을 나타내며, $r(\pi, \hat{\lambda}_{m+1})$ 은 베이즈 추정량에 대한 베이즈 위험이며, $\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_{m+1})$ 은 모의실험에서 추정된 베이즈위험이며, $\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_A)$는 $\hat{\lambda}_A$ 에 대한 추정된 베이즈 위험, $\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_B)$는 $\hat{\lambda}_B$에 대한 추정된 베이즈 위험 그리고 $\hat{r}(\pi, \hat{\lambda}_C)$는 $\hat{\lambda}_C$에 대한 추정된 베이즈 위험들을 각각 나타낸다. 그림3.1에서 BR은 추정량 $\hat{\lambda}_{m+1}$에 대한 베이즈 위험함수, EBR은 추정된 베이즈 위험함수, EB1는 $\hat{\lambda}_A$, EB2는 $\hat{\lambda}_B$ 그리고 EB3는 $\hat{\lambda}_C$에 대한 추정된 베이즈 위험함수들을 각각 나타낸다.

그림3.1 추정된 베이즈 위험함수($a = 4, \eta_0 = 2, m = 10$)



4. 결론

그림3.1과 표1의 결과로 볼 때, 자료의 수가 커짐에 따라 추정량들의 베이즈 위험 함수는 이론적인 베이즈 위험함수에 접근함을 알 수 있다. $a = 4, \eta_0 = 2$인 경우에 방법A, B, C를 비교해 볼 때, 방법A와 방법C의 베이즈 위험이 비슷하다. 그러나, 방법B는 A, C에 비해 추정된 베이즈 위험은 크다. 방법C는 방법 A보다 표본의 수가 10, 30인 경우 더 작은 베이즈 위험을 가졌으며, 이러한 경향은 중단비율이30%, 50%인 경우에 더욱 현저함을 알 수 있었다. $a = 4$, $\eta_0 = 0.08$인 경우에는 표본의 수가 10인 경우 방법C의 베이즈 위험이 가장 작았으며, 표본의 수가 20, 30, 50, 100인 경우에는 방법A와 방법C의 베이즈 위험은 비슷하다.

결론적으로, 표본의 수가 작은 경우에는 베이즈 위험함수의 측면에서 Berger가 제안한 ML-II방법을 이용한 경험적 베이즈 추정량 $\hat{\lambda}_C$의 사용이 더 바람직함을 알 수 있다.

참고문헌

1. 윤상운(1994), 가속화 신뢰도 분석, 자유아카데미.

2. Ambramowitz, M and Stegun, I. E. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathetical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55.

3. Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, New York

4. Kielpinski, T. J. and Nelson, W. (1975). Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Distributions, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 24, pp. 310-320.

5. Maritz, J. S. and Lwin, T. (1970). *Empirical Bayes Methods*, Chapman and Hall.

6. Meeker, W. Q. and Nelson, W. (1975). Optimum Accelerated Life Tests for Weibull and Extreme Value Distribution, *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 24, pp. 321-332.

7. Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing-Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

8. Nelson, W. and Meeker, W. Q. (1978). Theory of Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Exetreme Value Distributions, *Technometrics*, Vol. 20, pp. 171-177.

9. Pathak, P. K. and Zimmer, W. J. (1981). A Bayesian Approach to Accelerated Life Testing, *Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp. 371-374.

10. Robbins, H. (1964). The Empirical Bayes Approach to Statistical Decision Problems, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 35, pp. 1-19.

11. Pathak, P. K., Singh, A. K. and Zimmer, W. J. (1987). Empirical Bayesian Estimation of Mean Life from an Accelerated Life Test, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 16, pp. 353-363.

12. Viertl, R. (1988). *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*, Vandenhoeck & Ruprecht in Gottingen.

Comparisons of Empirical Bayes Approaches to Censored Accelerated Lifetime Data

Geon-Ho Cho and Woo-Dong Lee [3]

Abstract

In accelerated life tests, the failure time of an item is observed under a high stress level and based on the time, the failure rates of items are estimated at the normal stress level. In this paper, when the mean of the prior distribution of a parameter is known in Weibull lifetime model with censored failure time data, we study various estimating methods to obtain the empirical Bayes estimator of a parameter from the empirical Bayes approach under the normal stress level by considering the fact that the Bayes estimator is the function of prior parameters and of the acceleration parameter representing the effect of acceleration. And we compare the performance of several empirical Bayes estimators of a parameter in terms of the Bayes risk.

[3]Department of Statistics, Kyungsan University