

## 맥동관냉동기의 2차속도와 온도

### Second-order velocity and temperature in pulse tube refrigerators

이 호 진\*, 채 왕 병\*\*, 정 은 수\*\*\*  
H. J. Lee, W. B. Chae, E. S. Jeong

**Key words :** Pulse tube refrigerator(맥동관냉동기), Secondary flow(이차유동), Second-order temperature(2차온도), Axial temperature gradient(축방향 온도구배)

#### Abstract

Steady components and unsteady components of second-order velocity and temperature within pulse tube refrigerators were obtained. Second-order solutions were obtained from the first-order solutions of continuity, momentum and energy equations, assuming that the amplitude of the piston motion is small. The axial temperature gradient was considered in the analysis. The flow direction of the streaming was consistent with previous experimental observations. Effects of axial temperature gradient on secondary flow and second-order temperature were shown.

---

#### 기호 설명

---

- $a$  : 음속( $=\sqrt{\gamma RT_m}$ )  
 $C_p$  : 정압비열  
 $H$  : 두 평행평판사이 거리의 반(Fig.1)  
 $\langle H \rangle$  : 정미엔탈피유동  
 $i$  : 허수단위( $=\sqrt{-T}$ )  
 $k$  : 열전도도  
 $L$  : 막힌쪽 끝과 피스톤사이의 평균거리  
 $Ma$  : 마하수( $=ws/\sqrt{\gamma RT_m}$ )  
 $p$  : 압력  
 $Pr$  : Prandtl수

- R : 기체상수  
 $s$  : 피스톤의 진폭  
 $T$  : 온도  
 $t$  : 시간  
 $u$  :  $x$ -방향속도  
 $v$  :  $y$ -방향속도  
 $x, y$  : 직교 좌표계(Fig.1)

그리스 문자

- $\beta$  : 식 (6)에서 정의된 변수  
 $\gamma$  : 비열비  
 $\mu$  : 점도  
 $\nu$  : 동점성 계수  
 $\rho$  : 밀도  
 $\omega$  : 각속도

---

\* 홍익대학교 대학원

\*\* 경원세기

\*\*\* 정희원, 홍익대학교 기계공학과

## 상 첨 자

- ^ : 복소진폭
- \* : 공액복소수

## 하 첨 자

- |    |                       |
|----|-----------------------|
| 1  | : 1차(First-order)     |
| 2  | : 2차(Second-order)    |
| id | : 1차속도와 온도에 의한 이상적인 값 |
| m  | : 평균값                 |
| s  | : 2차해의 정상성분           |
| st | : 이차유동에의한 손실          |
| un | : 2차해의 비정상성분          |

### 1. 서 론

맥동관냉동기는 신뢰성이 높고 냉동용량이 크다는 장점을 갖고 있기 때문에 맥동관냉동기의 성능향상과 실용화에 대한 연구들이 최근에 널리 진행되고 있다.<sup>(1)~(4)</sup> 맥동관냉동기의 작동유체는 주기적으로 변화하는 압력과 유동조건 하에서 작동한다. 이와 같은 조건에서의 유동과 열전달은 맥동관냉동기의 성능에 큰 영향을 미치지만 많은 연구가 진행되어 있지 않다. Lee 등<sup>(5)</sup>은 기본형과 오리피스형 맥동관냉동기 내부에 정상상태의 대규모 흐름(steady large scale streaming) 형태의 이차유동이 존재한다는 것을 실험적으로 보였고, 이 이차유동에 수반되는 엔탈피유동이 맥동관냉동기의 성능을 저하시키는 주요손실로 작용한다는 것을 보였다.

대부분의 이론적인 연구들은<sup>(6)~(7)</sup> 주기적으로 변화하는 압력과 유동 조건 하에서 단지 시간에 따라 주기적으로 변하는 1차속도와 온도만을 고려했기 때문에 정상상태의 이차유동의 존재를 보여줄 수 없었다. Jeong과 Smith<sup>(6)</sup>는 벽의 축방향 온도구배가 없는 밀폐된 실린더-피스톤 장치 내에서의 운동량과 열전달을 해석하여, 벽에 수직한 방향으로의 밀도구배와 관성력과 접성의 상호작용으로 인하여 정상상태의 순환유동이 존재한다는 것을 보였으며 2차온도의 정상성분을 구하였다. Thomann<sup>(9)</sup>은 균일한 벽온도를 갖는 긴 튜브 내부의 높은 점

성을 갖는 유동의 2차속도와 온도의 선도항들(leading terms)을 구하였다. Rott<sup>(10)</sup>는 긴 관에서 축방향성분만 갖는 주기적 외부온향속도는 계산되었고 유체의 점도가 매우 낮다는 가정하에 경계층 외부의 속도를 구하여 2차유동에 대한 열전도의 영향을 보였다. Jeong<sup>(11)</sup>은 벽의 축방향 온도구배가 매우 작고 경계층의 두께가 매우 얇은 경우에 대하여 기본형 맥동관냉동기 내부의 이차유동의 해를 해석적으로 구하였으며, 축방향 온도구배가 2차 축방향속도의 정상성분에 미치는 영향을 보였다.

맥동관냉동기 내부의 작동유체는 압력과 속도가 주기적으로 변화하며 온도구배가 큰 벽과 접하고 있다. 본 논문에서는 축방향 온도구배가 큰 기본형 맥동관냉동기의 2차속도와 온도를 구하였다. 작동유체에 대한 연속방정식, 운동량 보존식, 에너지보존식과 상태방정식을 해석하여 2차속도와 온도의 정상성분과 비정상성분을 구하였고, 축방향 온도구배가 2차속도와 온도에 미치는 영향을 보였다.

### 2. 해석모델 및 지배방정식

Fig.1은 한쪽은 막히고 반대쪽은 피스톤이 장착된 두 평행평판 사이에 가스가 들어있는 시스템을 나타낸다. 평판들의 축방향 온도구배는  $dT_m/dx$ 로 일정하다. 평행평판 사이의 가스는 피스톤 운동에

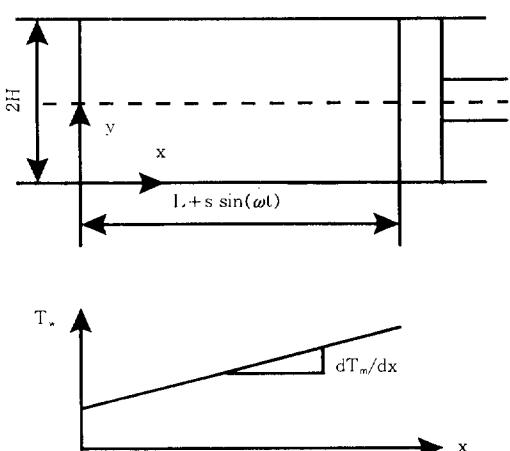


Fig.1 Schematic diagram of a basic pulse tube refrigerator and wall temperature profile

의하여 팽창과 압축과정을 반복한다. 액동관냉동기의 단면은 원형실린더 형태를 갖고 있지만 해석을 간단히 하기 위하여 평행평판으로 근사하였다.

해석에 사용된 주요 가정은 다음과 같다.

- (1) 피스톤운동의 진폭은 막힌 끝과 피스톤 사이의 평균거리 보다 매우 작다.
- (2) 속도와 온도 경계층두께가  $H$ 보다 매우 작아  $x$ -방향으로의 온도와 속도의 구배는  $y$ -방향의 온도와 속도구배에 비하여 무시할 수 있다.
- (3) 평판의 열용량은 가스의 열용량 보다 매우 크므로 평판의 온도는 시간에 대해 일정하다. 피스톤의 진동이 없을 때의 평판과 가스의 온도는  $T_m(x)$ 로 같다.
- (4) 가스는 이상기체이고, 점도  $\mu$ , 열전도도  $k$ , 정압비열  $C_p$  등의 물리적 성질은 일정하다.
- (5) 가스의 유동은 층류이다.

위와 같은 가정을 사용하여 구한 1차속도, 온도, 밀도는 다음과 같이 표현되며<sup>(1), (11)</sup>,

$$u_i(x, y, t) = \frac{i}{\rho_m \omega} \frac{dp_i}{dx} \left\{ 1 - A(\beta) \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v_i(x, y, t) = & \frac{iH}{\rho_m \omega} \frac{d^2 p_i}{dx^2} \left[ -\frac{y}{H} + \frac{1}{(1+i)\beta} \right. \\ & \left. \{ \tanh[(1+i)\beta] - C(\beta) \} \right] \\ & + \frac{i\omega H}{\gamma \rho_m R T_m} p_i \left[ -\frac{y}{H} + \frac{(1-\gamma)}{(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}} \right. \\ & \left. \{ \tanh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}] - D(\beta) \} \right] \\ & + \frac{iH}{\rho_m \omega T_m} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_i}{dx} \left[ -\frac{y}{H} \right. \\ & \left. + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} \frac{1}{(1+i)\beta} \{ \tanh[(1+i)\beta] \right. \\ & \left. - C(\beta) \} - \frac{1}{\text{Pr}-1} \frac{1}{(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}} \right. \\ & \left. \{ \tanh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}] - D(\beta) \} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_i(x, y, t) = & \frac{p_i}{\rho_m C_p} \{ 1 - B(\beta) \} - \frac{1}{\rho_m \omega^2} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_i}{dx} \\ & \left\{ 1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} A(\beta) + \frac{1}{\text{Pr}-1} B(\beta) \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_i(x, y, t) = & \frac{p_i}{\gamma R T_m} \left\{ 1 + (\gamma-1)B(\beta) \right\} \\ & + \frac{1}{\omega^2 T_m} \frac{dT_m}{dx} \frac{dp_i}{dx} \\ & \left\{ 1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} A(\beta) + \frac{1}{\text{Pr}-1} B(\beta) \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

1차압력을  $p_i(x, t) = \hat{p}_i(x)e^{i\omega t}$ 로 표현하면 1차 압력의 파동방정식(wave equation)은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ \{ 1 - E(\beta) \} \frac{d\hat{p}_i}{dx} \right] + \left[ 1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}-1} E(\beta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\text{Pr}-1} F(\beta) \right] \frac{dT_m/dx}{T_m} \frac{d\hat{p}_i}{dx} \\ & + [1 + (\gamma-1)E(\beta)] \frac{\omega^2}{\gamma R T_m} \hat{p}_i = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

여기서

$$\beta = H / \sqrt{2} \mu / (\rho_m \omega) \quad (6)$$

$$A(\beta) = \frac{\cosh[(1+i)\beta(1-y/H)]}{\cosh[(1+i)\beta]} \quad (7)$$

$$B(\beta) = \frac{\cosh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}(1-y/H)]}{\cosh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}]} \quad (8)$$

$$C(\beta) = \frac{\sinh[(1+i)\beta(1-y/H)]}{\cosh[(1+i)\beta]} \quad (9)$$

$$D(\beta) = \frac{\sinh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}(1-y/H)]}{\cosh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}]} \quad (10)$$

$$E(\beta) = \frac{\tanh[(1+i)\beta]}{(1+i)\beta} \quad (11)$$

$$F(\beta) = \frac{\tanh[(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}]}{(1+i)\beta \sqrt{\text{Pr}}} \quad (12)$$

식 (1)과 1차속도의 경계조건  $u_i(x=0, y, t) = 0$ ,  $u_i(x=L, y, t) = \omega s \cos \omega t$ 에서 파동방정식 (5)의 경계조건을 다음과 같이 구할 수 있다<sup>(7), (11)</sup>.

$$\frac{d\hat{p}_i}{dx}(x=0, t) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dp_1}{dx}(x=L, t) = -i\rho_m \omega^2 s / [1 - E(\beta)] \quad (14)$$

1차해는 단순히 시간에 따라 주기적으로 변한다. 따라서, 1차속도는 Lee 등<sup>(5)</sup>에 의해 관찰된 정상 상태의 이차유동을 설명할 수 없다. 운동량방정식의 2차이상의 항들만이 2차 유동에 관여한다. 2차지배방정식들은 다음과 같다<sup>(11)</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m u_2) + \rho_m \frac{\partial}{\partial y} (v_2) \\ = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 v_1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ = -\rho_m u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho_m v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \rho_m C_p \frac{\partial T_2}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} - \frac{\partial p_2}{\partial t} + \rho_m C_p u_2 \frac{dT_m}{dx} = -\rho_1 C_p \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ - \rho_m C_p u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \rho_m C_p v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} \right) \\ - \mu u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \rho_1 C_p u_1 \frac{dT_m}{dx} \end{aligned} \quad (17)$$

$$p_2 = \rho_m R T_2 + \rho_2 R T_m + \rho_1 R T_1 \quad (18)$$

속도, 운도, 압력, 밀도의 2차해들은 시간에 독립적인 정상성분과  $2\omega$ 의 각속도를 갖는 비정상성분을 갖고 있으므로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$u_2(x, y, t) = u_s(x, y) + \hat{u}_2(x, y) e^{2i\omega t} \quad (19)$$

$$v_2(x, y, t) = v_s(x, y) + \hat{v}_2(x, y) e^{2i\omega t} \quad (20)$$

$$T_2(x, y, t) = T_s(x, y) + \hat{T}_2(x, y) e^{2i\omega t} \quad (21)$$

$$\rho_2(x, y, t) = \rho_s(x, y) + \hat{\rho}_2(x, y) e^{2i\omega t} \quad (22)$$

$$p_2(x, t) = p_s(x) + \hat{p}_2(x) e^{2i\omega t} \quad (23)$$

식 (19)~(23)을 2차 지배방정식 (15)~(18)에 대입하여 정상상태항들만 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m u_s) + \rho_m \frac{\partial}{\partial y} (v_s) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\hat{\rho}_1 \hat{u}_1^*] \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\hat{\rho}_1 \hat{v}_1^*] \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_s}{dx} - \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \rho_m \operatorname{Re} \left[ \hat{u}_1 \frac{\partial \hat{u}_1^*}{\partial x} \right] \\ - \frac{1}{2} \rho_m \operatorname{Re} \left[ \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{v}_1^*}{\partial y} \right] - \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} [\hat{\rho}_1 \hat{u}_1^*] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \rho_m C_p u_s \frac{dT_m}{dx} = -\frac{\omega}{2} C_p \operatorname{Im} [\hat{\rho}_1 \hat{T}_1^*] \\ -\frac{1}{2} C_p \frac{dT_m}{dx} \operatorname{Re} [\hat{\rho}_1 \hat{u}_1^*] - \frac{1}{2} \rho_m C_p \left\{ \operatorname{Re} \left[ \hat{u}_1 \frac{\partial \hat{T}_1^*}{\partial x} \right] \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left[ \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{T}_1^*}{\partial y} \right] \right\} - \frac{1}{2} \mu \left\{ \operatorname{Re} \left[ \hat{u}_1 \frac{\partial^2 \hat{u}_1^*}{\partial y^2} \right] \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \frac{\partial \hat{u}_1^*}{\partial y} \right] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$p_s = \rho_m R T_s + \rho_2 R T_m + \frac{1}{2} R \operatorname{Re} [\hat{\rho}_1 \hat{T}_1^*] \quad (27)$$

여기서 상첨자 '\*'는 공액복소수를 뜻하며  $\operatorname{Re}$ 는 실수부,  $\operatorname{Im}$ 은 허수부를 나타낸다.  $u_s$ 와  $T_s$ 의 경계 조건은  $y=0$ 에서  $u_s=0$ ,  $T_s=0$ 이고  $y=H$ 에서  $\partial u_s / \partial y=0$ ,  $\partial T_s / \partial y=0$ 이다.

식 (24)를  $y=0$ 에서  $y=H$ 까지 적분하면 다음과 같은 시간평균질량보존식을 구할 수 있다.

$$\int_0^H [\rho_m u_s + (\rho_1 u_1)] dy = 0 \quad (28)$$

여기서 ' $\langle \rangle$ '는 시간평균을 나타낸다.

식 (19)~(23)을 식 (15)~(18)에 대입하여 비정상상태항들만을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 2i\omega \hat{\rho}_2 + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_m \hat{u}_2) + \rho_m \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y} \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \hat{\rho}_1 \hat{v}_1 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega \hat{\rho}_2 + \frac{dp_s}{dx} - \mu \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \rho_m \hat{u}_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} \\ - \frac{1}{2} \rho_m \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} - \frac{1}{2} i\omega \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega \rho_m C_p \hat{T}_2 - k \frac{\partial^2 \hat{T}_2}{\partial y^2} - 2i\omega \hat{p}_2 + \rho_m C_p \hat{u}_2 \frac{dT_m}{dx} \\ = -\frac{1}{2} i\omega C_p \hat{\rho}_1 \hat{T}_1 - \frac{1}{2} \rho_m C_p \left[ \hat{u}_1 \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial x} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\mu\hat{u}_1\frac{\partial^2\hat{u}_1}{\partial y^2}-\frac{iw}{2}\rho_m[\hat{u}_1\hat{u}_1+\hat{v}_1\hat{v}_1] \\ -\frac{1}{2}\mu\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial y}\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial y}-\frac{1}{2}C_{\mu\hat{u}_1}\frac{dT_m}{dx} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\hat{p}_2=\rho_mRT_2+\hat{\rho}_2RT_m+\frac{1}{2}\hat{\rho}_1RT_1 \quad (32)$$

$\beta \gg 1$  일 경우에 식 (30)~(32)에서  $\hat{u}_2$ ,  $\hat{T}_2$ ,  $\hat{\rho}_2$ 를 구하여 식 (29)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 2차압력의 파동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{p}_2}{dx^2}+\frac{1}{T_m}\frac{dT_m}{dx}\frac{dp_2}{dx}+\frac{4\omega^2}{a^2}\hat{p}_2=\frac{\gamma\omega^2}{\rho_ma^4}\hat{p}_2 \\ -\frac{1}{\rho_ma^2}\frac{dT_m/dx-dp_1}{T_m}p_1-\frac{1}{\rho_ma^2}\left[1+\frac{a^2}{2\omega^2}\left(\frac{dT_m/dx}{T_m}\right)^2\right. \\ \left.-\frac{a^2}{2\omega^2}\frac{dT_m/dx^2}{T_m}\right]\left(\frac{dp_1}{dx}\right)^2 \end{aligned} \quad (33)$$

2차속도의 경계조건  $\hat{u}_2(x=0, y)=0$ ,  $\hat{u}_2(x=L, y)=0$ 을 사용하여  $\hat{p}_2$ 의 경계조건을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dp_2}{dx}(x=0)=0 \quad (34)$$

$$\frac{dp_2}{dx}(x=L)=-\frac{1}{2}\rho_m\omega^2s^2(dT_m/dx)/Tm \quad (35)$$

### 3. 수치해석 방법

1차 압력  $p_1$ 은 1차파동방정식인 식 (5)를 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하여 수치적으로 적분하여 구한다.  $x=0$ 에서  $x=L$ 까지 적분을 하기위해서는  $x=0$ 에서의  $\hat{p}_1$ 과  $d\hat{p}_1/dx$ 값이 필요한 데,  $x=0$ 에서  $d\hat{p}_1/dx$ 값은 식 (13)에 주어졌으나  $\hat{p}_1$ 값을 모르므로  $x=L$ 에서의 경계조건인 식 (14)를 만족하는  $\hat{p}_1$ 값을 찾기 위하여 반복법을 사용한다. 먼저  $\hat{p}_1$ 값을 가정하여 식 (5)를 수치적분하여 구한  $x=L$ 에서의  $d\hat{p}_1/dx$ 값이 식 (14)와 다르면  $\hat{p}_1$ 을 다시 가정하여 식 (14)를 만족할 때까지 반복한다.  $p_1$ 값이 구해지면  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $T_1$ ,  $\rho_1$ 은 식 (1)~(4)에서 구할 수 있다.

정상상태 속도  $u_1$ 은 식 (25)를  $\hat{p}_1$ 을 구할 때와

마찬가지로 4차 Rung-Kutta 방법을 이용하여 수치적분하여 구한다. Fig.1에 나타난 것과 같이 점선을 따라  $y$ 축 대칭이므로  $y=0$ 에서  $y=H$ 까지만 계산한다.  $u_1$ 의 경계조건은  $u_1(x, y=0)=0$ ,  $\partial u_1/\partial y(x, y=H)=0$ 이므로  $y=0$ 에서의  $\partial u_1/\partial y$ 를 가정하여 수치적분한 값이  $\partial u_1/\partial y(x, y=H)=0$ 을 만족할 때까지 반복한다. 식 (25)의 첫 번째 항인  $dp_1/dx$ 도 미지수이므로 수치적분한  $u_1$ 가 식 (28)을 만족할 때까지 반복한다. 식 (25)의 첫 번째 항인  $dp_1/dx$ 도 미지수이므로 수치적분한  $u_1$ 가 식 (28)을 만족할 때까지  $dp_1/dx$ 값을 다시 가정하여 반복계산 한다.

2차압력  $p_2$ 도 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 식 (33)을 적분하여 구한다.  $x=0$ 에서의  $\hat{p}_2$ 값을 가정하여 구한 2차압력분포가 식 (35)를 만족할 때까지 반복계산한다.

2차 속도와 온도의 비정상성분들인  $u_2$ 와  $T_2$ 는 이미 구한 1차해들과 2차압력을 이용하여 식 (30)과 (31)을 각각 적분하여 구하였다.

### 4. 결과 및 고찰

Fig.2에 2차 축방향속도의 정상성분  $u_1$ 과 Rott<sup>(10)</sup>에 의해 근사적으로 구해진 순환속도(streaming velocity)를 비교하였다. Rott에의한 순환속도분포는 경계층 바깥에서만 유효하고 벽면에서의 경계조건은 만족시키지 못한다. 얇은 경계층 바깥에서는  $u_1$ 과 Rott<sup>(10)</sup>에 의해 근사적으로 구해진 순환속도가 같은 모양을 갖는 것을 볼 수 있다.

Fig.3은  $\beta$ 가  $u_1$ 에 미치는 영향을 보여준다. 식 (6)에서 알 수 있는 바와 같이  $\beta$ 는 평판 사이의 간격의  $1/2$ 과 속도경계층의 두께( $\sqrt{2\mu/(\rho_m\omega)}$ )의 비이다. 따라서, 다른 조건이 다 같을 경우  $\beta$ 가 크다는 것은 퍼스톤의 각속도가 커져서 경계층의 두께가 얇아진다는 것을 의미한다.  $\beta$ 가 커짐에 따라 속도경계층의 두께는 얇아지므로 벽 근처에서의 최대속도의 크기는 증가하고 최대속도가 나타나는 지점은 벽쪽으로 가까워지는 것을 볼 수 있다. 벽 가까이와 중심부근의 유체는 막힌 끝에서 퍼스톤 방향으로 흐르며 그 사이 부분의 유체는 퍼스톤에서 막힌 끝 방향으로 흐른다. Fig.3의 순환속도의 방

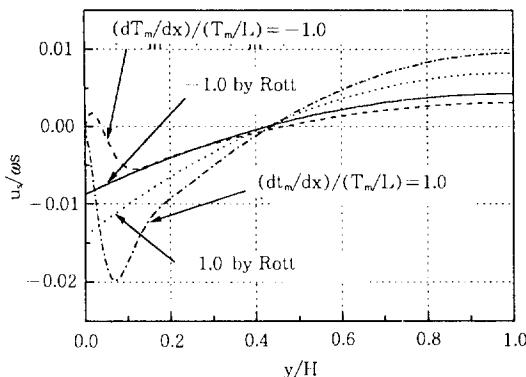


Fig.2 Comparison of steady second-order axial velocity with approximate solution( $L/s=30$ ,  $\text{Pr}=0.7$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\text{Ma}=0.01$ ,  $x/L=0.5$ ,  $\beta=30$ )

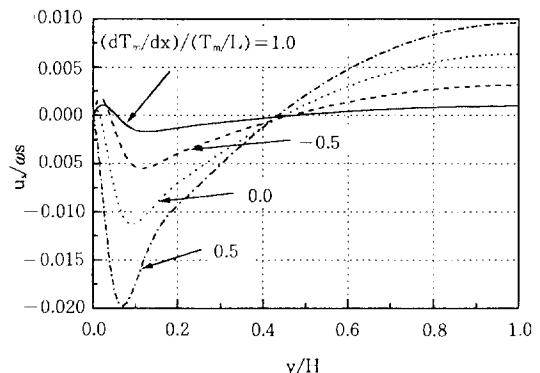


Fig.4 Steady second-order velocity profiles for several axial temperature gradient( $L/s=30$ ,  $\text{Pr}=0.7$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\text{Ma}=0.01$ ,  $x/L=0.5$ ,  $\beta=30$ )

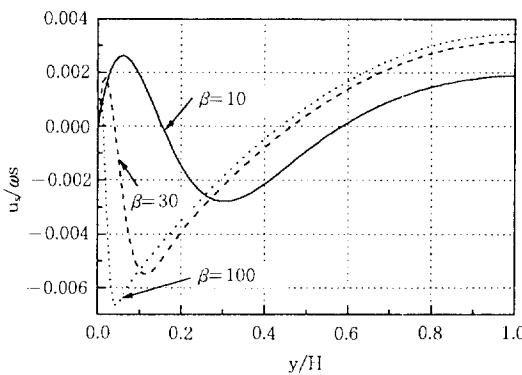


Fig.3 Steady second-order axial velocity profiles for  $(dT_m/dx)/(T_m/L) = -0.5$ ( $L/s=30$ ,  $\text{Pr}=0.7$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\text{Ma}=0.01$ ,  $x/L=0.5$ )

향은 Lee 등<sup>(5)</sup>의 실험에서 관찰된 이차유동의 방향과 일치한다.

축방향 온도구배가  $u_s$ 에 미치는 영향을 Fig.4에 보였다. 축방향 온도구배  $dT_m/dx$ 가 증가할수록 중심( $y=H$ )에서의 속도와 벽면 가까이의 속도의 크기는 모두 증가하는 것을 볼 수 있다. 식 (25)의 우변들에 의하여 축방향속도의 정상성분  $u_s$ 가 발생 한다. 1차속도  $u_s$ 과  $v_s$ 는 축방향온도구배에 큰 영향을 받지 않으나, 1차온도  $T_1$ 은 축방향 온도구배가 커질수록 그 진폭이 증가한다.<sup>(12)</sup> 1차온도  $T_1$ 의

진폭이 커질수록 1차밀도  $\rho_1$ 의 진폭이 커진다. 따라서, 축방향 온도구배  $dT_m/dx$ 가 증가할수록 식 (25)의 우변의 세 번째 항이 커지므로  $u_s$ 의 크기는 증가한다.

Fig.2, 3, 4에 보여진  $u_s$ 는 1차 축방향 속도에 비하여 매우 작으므로 이차유동에 의한 손실도 매우 작을 것으로 생각할 수 있으나, 이것은 지배방정식들을 선형화하여 해석적인 해를 구하기 위하여 피스톤운동의 진폭이 막힌 끝과 피스톤 사이의 평균 거리 보다 매우 작다( $s/L \ll 1$ )고 가정하였기 때문이다. 실제 맥동관냉동기에서는 Fig.1의 피스톤이 아니라 별도의 압축기에 의하여 맥동관 내부의 작동유체가 작동되므로  $O(s/L) \sim 0.1$ 이다. Lee 등<sup>(5)</sup>에 의하여 제시된 이차유동에 의한 엔탈피유동손실  $\langle H \rangle_{st}$ 과 1차속도와 온도에 의한 이상적인 엔탈피유동  $\langle H \rangle_{id}$ 의 비를 Fig.1에 적용하면 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\langle H \rangle_{st}}{\langle H \rangle_{id}} \sim \left( \frac{pr+1}{pr-1} \right) \left( \frac{s}{L} \right) \left( \frac{\Delta T}{T_m} \right) \left( \frac{1}{\beta} \right) \quad (36)$$

여기서  $pr$ 은 최고압력과 최저압력의 비인 압력비이고,  $\Delta T$ 는 맥동관 양측의 온도차,  $T_m$ 은 평균온도이다. 맥동관냉동기에서  $pr \approx 2$ ,  $\Delta T/T_m \approx 1$ ,  $O(s/L) \sim 1$ 이며 기본형 맥동관냉동기의 경우  $O(\beta) \sim 1$ , 오리피스형 맥동관냉동기(orifice pulse tube re-

frigerator)와 이중입구 맥동관냉동기(double inlet pulse tube refrigerator)의 경우에는  $O(\beta) \sim 1/10$  이므로 이차유동에 의한 엔탈피유동손실은 맥동관 냉동기의 성능에 상당한 영향을 끼칠 수 있다.

Fig.5와 6은  $\beta$ 와 축방향 온도구배  $dT_m/dx$ 가 2차온도의 정상성분  $T_2$ 에 미치는 영향을 보여준다.  $\beta$ 가 증가할수록 경계층 바깥의  $T_2$ 가 커지는 것을 볼 수 있다.  $dT_m/dx$  값이 양수일 때는 가스의 평균 온도가 벽온도보다 낮고,  $dT_m/dx$  값이 음수일 때는 가스의 평균온도가 벽온도보다 높다.  $dT_m/dx$ 가 증가함에 따라 가스와 벽 사이의 온도차는 증가한다. Fig.3과 4에 보였듯이 경계층 바깥의 가스는 막힌 끝에서 피스톤 방향으로 흐른다. 식 (26)에서 알 수 있는 바와 같이  $dT_m/dx = 0$  일 때 2차 정상상태 속도  $u_s$ 는 2차 정상상태 온도에 영향을 끼치지 못한다.  $dT_m/dx$  값이 0보다 클 때 경계층 바깥의 유체입자는 온도가 낮은 막힌 끝에서 온도가 높은 피스톤 방향으로 움직이므로  $dT_m/dx$ 가 증가함에 따라 가스의 평균온도는 낮아진다. 그러나  $dT_m/dx$ 가 0보다 작을 때는 경계층 바깥의 유체입자가 온도가 높은 막힌 끝에서 온도가 낮은 피스톤 방향으로 움직이므로  $dT_m/dx$ 가 커짐에 따라 가스의 평균온도는 높아진다.

Fig.7은  $\beta=10, 30$  일 때의 2차축방향속도의 비정상성분  $(u_2)_{un}$ 을 보여준다. Fig.3, 4와 비교하여 보면 2차속도의 비정상성분은 정상성분보다 매우

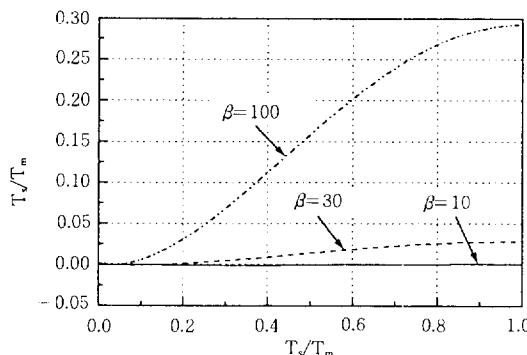


Fig.5 Steady second-order temperature profiles for  $(dT_m/dx)/(T_m/L) = -0.5$  ( $L/s = 30$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Ma = 0.01$ ,  $x/L = 0.5$ )

작음을 알 수 있다.  $\beta$ 가 커짐에 따라 경계층의 두께는 감소하고 중심부의 속도분포는 균일해진다. 벽에서의 속도구배와 평균속도 사이의 위상차가 존재하는 것을 볼 수 있다.

Fig.8은 축방향 온도구배에 따른  $(u_2)_{un}$ 의 변화를 보여준다.  $dT_m/dx > 0$  일 때의  $(u_2)_{un}$ 이  $dT_m/dx < 0$  일 때의  $(u_2)_{un}$ 보다 큰 것을 볼 수 있는데, 이것은 축방향 온도구배가 양일때의 1차밀도의 변화가 음일때의 밀도변화 보다 크므로 식 (30)의 우변의 세 번째 항이 커지기 때문으로 생각된다. Fig.7(b)와 비교하면 축방향 온도구배가 존재할 때의  $(u_2)_{un}$ 의 진폭이  $dT_m/dx = 0$  일 때보다 큰 것을 알 수 있다.

축방향 온도구배가 없는 경우의 2차온도의 비정상성분을 Fig.9에 나타내었다.  $\beta$ 가 커질수록 온도 경계층의 두께가 얇아지므로 온도변화가 최대가 되는 지점이 벽쪽으로 가까워지나 온도변화의 진폭은 거의 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 벽 가까이의 온도변화가 벽에서 면 부분의 온도변화 보다 큰 것을 알 수 있는데, 이것은 주기적으로 변화하는 1차 압력  $p_1$ 과 평판에 수직한 방향의 1차속도  $v_1$ 에 의한 기계적에너지가 경계층 바깥의 작동유체에서 경계층 내부의 작동유체로 전달되기 때문으로 생각된다.<sup>(13)</sup>

Fig.10은 축방향 온도구배가  $(T_2)_{un}$ 에 미치는 영향을 보여준다.  $dT_m/dx$ 가 증가할수록  $(T_2)_{un}$ 의 진

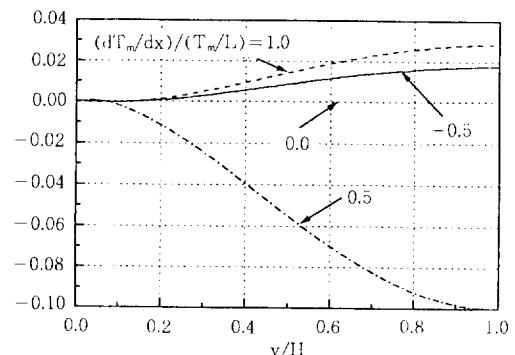


Fig.6 Steady second-order temperature profiles for several axial temperature gradient ( $L/s = 30$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Ma = 0.01$ ,  $x/L = 0.5$ ,  $\beta = 30$ )

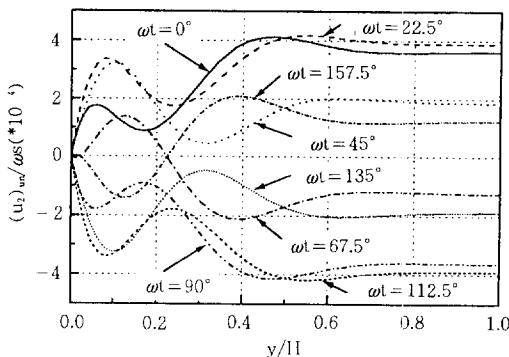
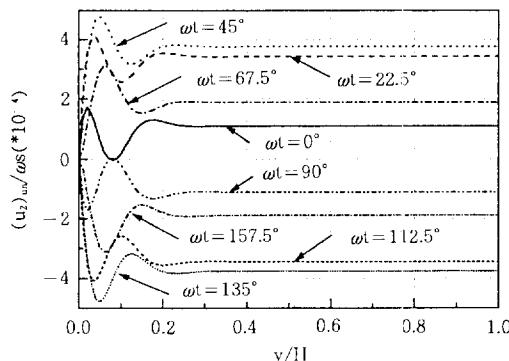
(a)  $\beta = 10$ (b)  $\beta = 30$ 

Fig. 7 Unsteady second-order axial velocity profiles for zero axial temperature gradient ( $L/s = 30$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Ma = 0.01$ ,  $x/L = 0.5$ )

폭이 커지는 데, 이것은 축방향 온도구배가 증가할 수록 Fig. 8에서 볼 수 있는 것처럼 2차 축방향 속도의 비정상성분  $(u_2)_{un}$ 의 진폭이 커져 유체입자가 축방향으로 움직이는 거리도 증가하고 축방향 온도 구배도 커지므로 2차온도의 비정상성분의 진폭이 커지는 것으로 생각된다. Fig. 5의  $T_s$ 에 비하여  $(T_s)_{un}$ 의 크기는 매우 작은 것을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 수치적 방법을 사용하여 맥동관냉동기 내부의 2차속도와 온도의 정상성분과 비정상

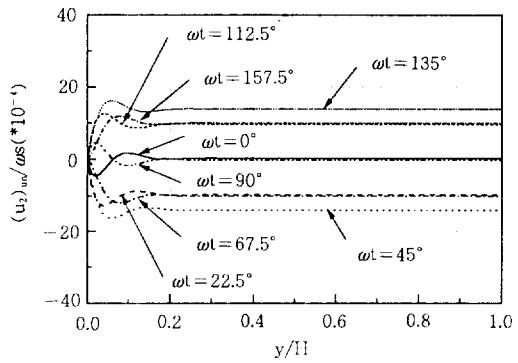
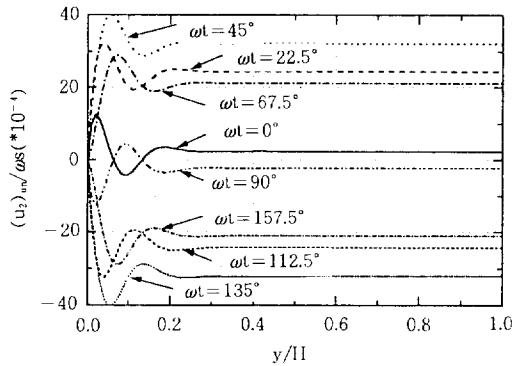
(a)  $(dT_m/dx)/(T_m/L) = -0.5$ (b)  $(dT_m/dx)/(T_m/L) = 0.5$ 

Fig. 8 Unsteady second-order axial velocity profiles for several axial temperature gradient ( $L/s = 30$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Ma = 0.01$ ,  $x/L = 0.5$ ,  $\beta = 30$ )

성분을 구하였다. 연속방정식, 운동량방정식, 에너지보존식 및 상태방정식의 2차 지배방정식들을 정상성분과 비정상성분으로 분리하여 2차해의 정상성분과 비정상성분을 각각 구하였다.

경계층 바깥에서 2차속도의 정상성분은 Rott에 의한 근사속도와 잘 일치하였다. 축방향 온도구배가 증가할수록 2차속도와 온도의 정상성분의 크기는 증가하고, 또한 비정상성분들의 진폭도 커진다.

#### 후 기

이 연구는 1996년도 한국과학재단 연구비(과제

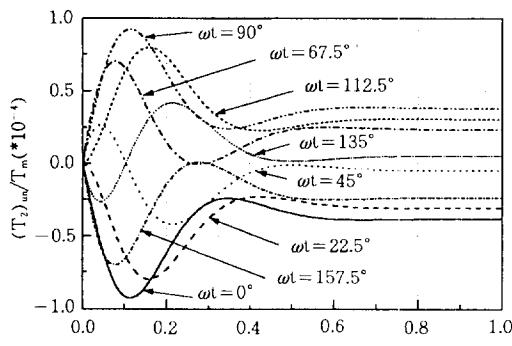
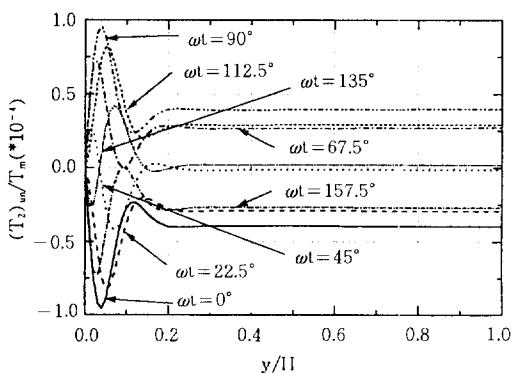
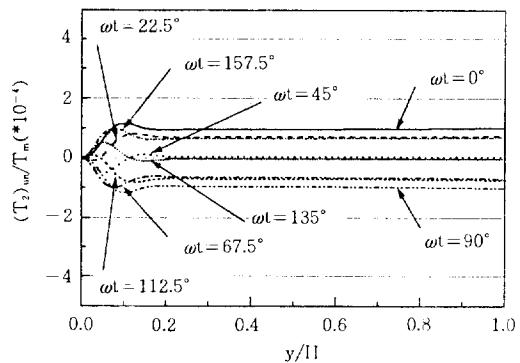
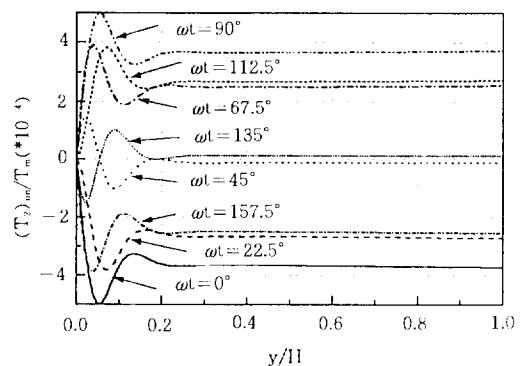
(a)  $\beta=10$ (b)  $\beta=30$ 

Fig.9 Unsteady second-order temperature profiles for zero axial temperature gradient

(a)  $(dT_m/dx)/(T_m/L) = -0.5$ (b)  $(dT_m/dx)/(T_m/L) = 0.5$ Fig.10 Unsteady second-order temperature profiles for  $\beta=30$  ( $L/s=30$ ,  $Pr=0.7$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $Ma=0.01$ ,  $x/L=0.5$ ,  $\beta=30$ )

번호 : 961-1006-055-2) 지원에 의한 결과입니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

- Richardson, R. N., 1986, "Pulse tube refrigerator-an alternative cryocooler?", *Cryogenics*, Vol. 26, pp.331~340.
- Storch, P. J. and Radebaugh, R., 1988, "Development and experimental test of an analytical model of the orifice pulse tube refrigerator," *Adv. Cryog. Eng.*, Vol. 33, pp. 851~859.

- Zhu, S., Wu, P. and Chen, Z., 1990, "Double inlet pulse tube refrigerators : an important improvement," *Cryogenics*, Vol. 30, pp. 514~520.
- David, M., Marechal, J. C., Simon, Y. and Guiloin, C., 1993, "Theory of ideal orifice pulse tube refrigerator," *Cryogenics*, Vol. 33, pp. 154~161.
- Lee, J. M., Kittel, P., Timmerhaus, K. D. and Radebaugh, R., 1993, "Flow patterns intrinsic to the pulse tube refrigerator," *Proc. 7th Int. Cryocooler Conf.*, pp. 125~139.

6. Swift, G. W., 1988, "Thermoacoustic engines," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 84, pp. 1145~1180.
7. Merkil, P. and Thomann, H., 1975, "Thermoacoustic effects in a resonance tube," *J. Fluid Mech.*, Vol. 70, pp. 161~177.
8. Jeong, E. S. and Smith, J. L., Jr., 1992, "Secondary flow in reciprocating machinery," *Proc. ASME National Heat Transfer Conf.*, Vol. 24, pp. 97~104.
9. Thomann, H., 1976, "Acoustical streaming and thermal effects in pipe flow with high viscosity," *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 27, pp. 709~715.
10. Rott, N., 1974, "The influence of heat conduction in acoustic streaming," *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 25, pp. 417~421.
11. Jeong, E. S., 1996, "Secondary flow in basic pulse tube refrigerators," *Cryogenics*, Vol. 36, No. 5, pp. 317~323.
12. Jeong, E. S., 1995, "Effects of axial temperature gradient on momentum and heat transfer with oscillating pressure and flow," *KSME Journal*, Vol. 9, No. 2, pp. 225~239.
13. Rott, N., 1974, "The heating effect connected with non-linear oscillations in a resonance tube," *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 25, pp. 619~634.