■ 論 文 ■

통행시간가치의 신뢰구간 추정

Estimating Confidence Interval of Value of Travel Time

조 중 래
(명지대학교 교통공학과 교수)

목 차

요 약

통행시간가치에 대한 신뢰구간추정 방법론을 제시하고 서울시 출근통행자의 시간가치 신뢰구간의 추정을 통하여 그 적용사례를 예시하였다. 사례분석을 통하여 서울시 출근통행자의 평균시간가치는 시간당 7,341원으로 추정되었고, 95%신뢰구간의 하한치는 5,454(원/시간), 상한치는 10,806(원/시간)으로 추정되었다.

I. 서론

통행시간가치는 교통계획 및 교통투자정책 평가에 있어서 매우 중요한 의미를 갖는다. 특히 교통시설투자와 관련된 타당성분석에서 통행시간가치는 해당사업의 경제적 타당성을 판단함에 있어 결정적인 영향을 미치게 된다.

지금까지 교통시설투자와 관련된 많은 타당성조사사업에서 시간절약 편익산정 결과에 대한 신뢰성문제가 빈번하게 제기되어 왔고, 심지어는 시간절약편익을 편익항목에서 제외하여야 할 것이라는 극단적인 주장도 있었다. 'IMF시대'로 이야기되는 최근의 경제상황을 고려할 때 투자사업평가에 대한 분석결과의 정확성에 대한 사회적 및 행정적 요구는 더욱 커질 것이며, 따라서 시간절약편익에 대한 신뢰성의 문제는 앞으로 더욱 강조될 것으로 예상된다.

시간절약편익에 관한 신뢰성문제의 본질은 두 가지로 요약될 수 있다. 하나는 교통수요 분석과정에서 추정되는 대상사업의 시행에 따른 통행시간절감효과가 얼마나 정확하고 믿을 만 한가 하는 문제이고, 다른 하나는 적용된 시간가치의 정확성과 신뢰성에 관한 문제이다. 이중 통행시간 절감효과 추정결과의 정확성에 관한 문제는 교통수요분석과정과 관련된 문제로 본고에서 다루고자 하는 내용적 범위를 벗어난다.

일반적으로 분석결과를 해석함에 있어 결과의 '정확성'과 '신뢰성'은 구분되어야 한다. 보편적 사고의 틀에서 생각하면 '결과가 정확할수록 신뢰성이 높다'라고 하는 것이 일반적일 것이다. 그러나 결과가 정확한가 정확하지 않은가 하는 것은 얼마나 믿을 수 있는가에 의하여 판단되고 검증된다. 따라서 '정확성'은 '신뢰성'이라는 객관적이고 과학적인 개념에 의하여 투영됨으로서만 존재할 수 있는 추상적 개념에 불과할 따름이다. 이렇게 볼 때 '정확성의 문제'는 '얼마나 믿을 만한(추상적 의미에서의 참값과 가까운) 결과를 얻을 수 있는가'에 관한 문제이며, '신뢰성의 문제'는 '구하여진 결과를 어느 정도 믿을 수 있는가(참값에 얼마나 가까운가)'를 설명할 수 있는 과학적이고 객관적인 기준설정에 관한 문제라고 해석할 수 있다.

보다 정확한 통행시간가치(통상적으로 평균적 개념에서의 시간가치, 혹은 시간가치의 기대값)를 추정하려면 말할 필요도 없이 보다 정확한 자료를 이용하고 보다 정밀한 방법론을 적용하면 될 것이다. 그러나 아무리 정확한 자료와 정밀한 방법론을 적용하여 추정된 결과라 할 지라도 그 결과가 얼마나 믿을만 한가에 대한 의문은 여전히 남게된다. 통행시간가치의 신뢰성 문제의 본질은 바로 이점에 있다고 하겠다.

이러한 측면에서 본고에서는 통행시간가치 추정결과의 객관적 신뢰성의 지표로서 시간가치의 신뢰구간을 추정하는 방법론을 제시하고, 제시된 방법을 이용하여 서울시 출근통행에 대한 통행시간가치의 신뢰구간을 추정한다. 2장에서는 시간가치산정에 관한 이론을 살펴보고, 3장에서는 시간가치 신뢰구간추정에 관한 방법론을 제시한다. 사례연구로서의 서울시 출근통행 시간가치 신뢰구간 추정의 결과는 4장에서 설명된다.

II. 통행시간가치 산정이론

통행시간가치를 산정하는 대표적인 방법으로는 시간당 통상임금의 일정비율을 시간가치로 계산하는 한계임금율법(marginal wage rate method)과 통행자의 노선 혹은 교통수단선택 모형에 포함된 효용함수로부터 계산된 통행시간과 통행비용의 한계대체율(marginal rate of substitution)을 통행시간가치로 계산하는 한계대체율법이 있다(Anas, 1982). 이중 한계임금율법은 '통상임금의 일정비율'을 적용함에 있어 주관적 판단이 개입될 밖에 없어, 결과에 대한 보편성과 객관성을 유지하기 어렵다는 점에서 한계가 있으며, 따라서 최근에는 많은 경우 한계대체율법을 적용하고 있다.

한계대체율법을 이용하여 시간가치를 산정할 경우 시간가치는 통행시간과 통행비용의 한계효용의 비율로 계산된다. 따라서 노선 혹은 수단선택모형에서 사용된 효용함수가 어떤 함수구조(Functional Structure)를 갖는가에 따라 구체적인 계산식은 다르게 표현되나, 그 일반식은 아래와 같다.

$$VOT = \frac{\partial u_m / \partial T_m}{\partial u_m / \partial T_m} = f(\frac{\hat{\beta}_T}{\hat{\beta}_c}) \quad (1)$$

식(1)에서 u_m은 선택대안 m의 효용을, 그리고 $\hat{\beta}_T$와 $\hat{\beta}_C$는 각각 통행시간 T_m및 통행비용 C_m의 파라메타를 나타낸다. 만약 효용함수가 $u_m = \hat{\beta}_T T_m + \hat{\beta}_C C_m + \Gamma X$($X, \Gamma$:기타 속성변수 및 파라메타 벡타)와 같이 선형함수일 경우 통행시간가치는 통행시간에 대한 파라메타와 통행비용에 대한 파라메타의 단순비율로 계산된다.

III. 신뢰구간 추정방법

로짓형 교통수단선택모형에서 추정된 효용함수의 파라메타를 이용하여 한계대체율법으로 계산된 통행시간가치는 식(1)에서 보는 바와 같이 통행시간과 비용변수의 파라메타의 비율로 표현된다. 따라서, 시간가치의 신뢰구간을 추정하려면 우선 β_T / β_C의 확율분포함수를 구하여야 한다. 그러나 정규분포[1] 를 갖는 두 개의 확율변수의 비율의 분포는 두 변수의 Covariance에 매우 민감하며, 따라서 이론적으로나 현실적인 면에서 정규분포를 이루고 있으면서 독립적이지 않은 두 확율변수의 비율의 분포를 찾는 것은 매우 어렵다[2](Serfling, 1980; Hogg and Craig, 1978). 이러한 이론적 난이도를 고려하였을 때, 비율의 분포함수를 통한 통행시간가치 신뢰구간의 추정은 매우 어려울 것으로 판단되는 바, 본 연구에서는 통행시간의 파라메타와 통행비용의 파라메타에 대한 공통신뢰구간[3](Joint Confidence Interval)을 이용하여 신뢰구간의 근사치를 추정하는 방법을 제시한다.

이제 $\hat{\beta}$를 최우추정법을 통하여 정산된 로짓모형의 파라메타 벡타라고 하면 $\hat{\beta}$은 평균[4]B와 공분산(Covariance) Σ_β를 갖는 정규분포를 이룬다(Ben-Akiva and Lerman, 1985).

$$\hat{B} \sim N(B, \Sigma_\beta) \quad (2)$$

이에 따라, $(\hat{B} - B)^T \Sigma_\beta^{-1} (\hat{B} - B)$는 자유도 k의 x^2분포를 이루게 되고, 이때 k는 공분산행렬의 차수[5]를 의미한다. 그러므로 파라메타 벡타 B에 대한 유의수준 (1-α)의 신뢰구역(Confidence Region)은 아래의 식으로 표현된다.

$$\Pr\{(\hat{B} - B)^T \Sigma_\beta^{-1} (\hat{B} - B) \le x^2_{k,\alpha}\} = 1 - \alpha \quad (3)$$

통행시간과 통행비용의 2개의 파라메타로 구성되는 벡타 B를 가정하면 공분산행렬 Σ_β는,

$$\Sigma_\beta = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_T) & Cov(\hat{\beta}_T, \hat{\beta}_C) \\ Cov(\hat{\beta}_C, \hat{\beta}_T) & Var(\hat{\beta}_C) \end{bmatrix} \quad (4)$$

이 되고, 따라서 식(3)에서

$$\hat{B} - B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_T - \beta_T \\ \hat{\beta}_C - \beta_C \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\Sigma_\beta^{-1} = \{\omega_{ij}\} = \frac{1}{|\Sigma_\beta|} \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_c) & -Cov(\hat{\beta}_T, \hat{\beta}_C) \\ -Cov(\hat{\beta}_C, \hat{\beta}_T) & Var(\hat{\beta}_T) \end{bmatrix} \quad (6)$$

가 된다.

한편, 식(3)으로부터 파라메타 벡타 B에 대한100×(1-α)%의 신뢰구역은 아래의 식(7)로 표현된다.

$$(\hat{B} - B)^T \Sigma_\beta^{-1} (\hat{B} - B) \le x^2_{k,\alpha} \quad (7)$$

〈그림 1〉은 위의 식(7)에서 표현된 유의수준 α에서의 B의 신뢰구역을 도시한 것으로, 음영처리된 부분은 파라메타벡터 B의 100×(1-α)%신뢰구역을 의미한다. 통행시간가치 신뢰구간 추정을 위한 방법은 시간가치가 기본적으로 β_C-β_T평면상의 임의의 한 점에서 원점에 그은 직선의 기울기로 표현된다[6]는 점과, 따라서 신뢰구간의 상한치(Upper Bound)와 하한치

1) 최우추정법을 통하여 추정된 로짓모형 효용함수의 파라메타는 정규분포를 이룬다(Ben-Akiva and Lerman, 1985).
2) 만약 정규분포를 이루는 두 확율변수가 독립적(Stochastically Independent)일 경우 그 비율은 Cauchy분포를 이룬다.
3) 혹은 신뢰구역(Confidence Region)
4) 혹은 기대값
5) 즉, 파라메타의 수
6) 선형효용함수를 가정하였을 경우, 만약 효용함수가 비선형일 경우에는 식(1)에서 표현된 직선의 기울기의 함수식에 따라 계산.

(Lower Bound)는 원점을 지나면서 신뢰구역에 접하는 접선의 기울기로 표현된다는 점에 기초한다. 〈그림 1〉에서 볼 때, 점($\hat{\beta}_C$, $\hat{\beta}_T$)에서 원점에 그은 직선의 기울기 VOT_E는 시간가치의 기대값[7]을 나타내며, 같은 논리로 원점에서 신뢰구역에 접하는 두 개의 직선의 기울기 VOT_U 및 VOT_L은 각각 유의수준 α에서의 시간가치의 상한치와 하한치를 의미한다. 따라서 VOT_E 를 평균값으로 갖는 시간가치의 $100\times(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$VOT_L \leqq VOT \leqq VOT_U \tag{8}$$

이제, 〈그림 1〉에서의 두 개의 접선의 기울기를 구하기 위하여 식(7)을 전개하여 경계선 방정식을 취하면;

$$\omega_{11}(\hat{\beta}_T - \beta_T)^2 + 2\omega_{12}(\hat{\beta}_T - \beta_T)(\hat{\beta}_C - \beta_C) + \omega_{22}(\hat{\beta}_C - \beta_C)^2 = x^2_{k,\alpha} \tag{9}$$

이 되는 데, 여기에서 ω_{ij}는 식(6)에서 표현된 공분산 역행렬Σ^{-1}_{β}의 (i, j)요소를 의미한다. 위의 식(9)에 원점을 지나면서 기울기가 δ인 직선식;

$$\beta_T = \delta\beta_C \tag{10}$$

을 대입하면,

$$(\omega_{11}\delta^2 + 2\omega_{12}\delta + \omega_{22})\beta_C^2 - 2\{(\omega_{11}\hat{\beta}_T + \omega_{12}\hat{\beta}_C)\delta + (\omega_{12}\hat{\beta}_T + \omega_{22}\hat{\beta}_C)\}\beta_C + (\omega_{11}\hat{\beta}_T^2 + 2\omega_{12}\hat{\beta}_T\hat{\beta}_C + \omega_{22}\hat{\beta}_C^2 - x^2_{k,\alpha}) = 0 \tag{11}$$

이 되어 β_C에 대한 2차식이 만들어진다. 위의 식(11)에서

$$f_a(\delta) = \omega_{11}\delta^2 + 2\omega_{12}\delta + \omega_{22} \tag{11-1}$$

$$f_b(\delta) = (\omega_{11}\hat{\beta}_T + \omega_{12}\hat{\beta}_C)\delta + (\omega_{12}\hat{\beta}_T + \omega_{22}\hat{\beta}_C) \tag{11-2}$$

$$c = \omega_{11}\hat{\beta}_T^2 + 2\omega_{12}\hat{\beta}_T\hat{\beta}_C + \omega_{22}\hat{\beta}_C^2 - x^2_{k,\alpha} \tag{11-3}$$

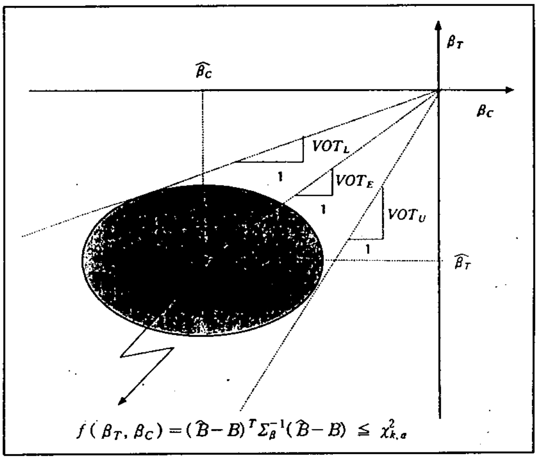
라고 하면 식(9)의 타원과 식(10)의 직선이 접하는 조건은 식(11)의 β_C에 대한 2차함수의 근의 판별식의 조건으로부터 아래의 식(12)로 표현된다.

$$[f_b(\delta)]^2 - cf_a(\delta) = 0 \tag{12}$$

식(12)는 직선의 기울기 δ에 대한 2차식으로, 이의 해를 각각 δ_U및 δ_L(단, $\delta_U > \delta_L$)이라고 하면, 앞에서 언급된 바와 같이 이들은 유의수준 α 에서의 시간가치의 상한치와 하한치를 의미하게 되어 최종적으로

$VOT_U = \delta_U$
$VOT_L = \delta_L$

의 결과를 얻게 된다.



〈그림 1〉 파라메타 벡타의 신뢰구역 및 시간가치 신뢰구간 개념도

Ⅳ. 사례연구 : 서울시 출근통행에 대한 시간가치 신뢰구간 추정

1. 자료

통행시간가치 신뢰구간추정에 대한 사례연구를 위

7) 혹은 시간가치 평균값의 추정치

하여 본고에서는 1996년에 실시한 서울의 가구통행실태조사자료로부터 추출된 3,659샘플의 출근통행 관련 자료를 이용하였고, 교통수단 선택대안은 승용차, 버스, 지하철 및 택시 등 4가지로 분류하였다.

2. 효용함수의 추정 : 교통수단 선택 모형의 정산

출근통행의 수단선택모형으로는 다항 로짓모형을 사용하였고, 선형 효용함수를 가정하였으며, 로짓모형에 포함된 효용함수의 속성변수로는 〈표 1〉에서 보는 바와 같이 3개의 더미변수와 2개의 일반변수(generic variable), 5개의 사회경제적 대안특성 변수(alternative-specific socioeconomic variable) 등 총 10개의 변수를 사용하였다.

〈표 1〉 출근통행 수단선택모형속성변수

변 수 명		적용교통수단	변 수 내 용
대안특성상수 (alternative-specific constant)	승용차더미(d_a)	승용차	승용차이면 1, 아니면 0
	버스더미(d_b)	버스	버스이면 1, 아니면 0
	지하철더미(d_s)	지하철	지하철이면 1, 아니면 0
일반변수 (generic variable)	통행시간(TIME)	모든수단	단위:분
	통행비용(COST)	모든수단	단위:원
대안특성 사회경제적 변수 (alternative-specific socioeconomic variable)	소득(INC)	승용차, 택시	월평균소득(단위:만원)
	면허소지여부(LIC)	승용차	면허소지자면 1, 아니면 0
	차량소유여부 (CAR)	승용차	자가용 소유자면 1 아니면 0
	가족수(FS)	승용차, 택시	가족수
	연령(AGE)	승용차, 택시	연령

〈표 2〉는 〈표 1〉에서 설정된 수단선택모형의 정산 결과를 나타낸 것으로 가족수와 연령을 제외한 다른 모든 속성변수들의 추정된 파라메타는 통계적으로 유의한 것으로 나타났고 모형의 적합도를 나타내는 우도비지표(ρ^2)가 0.49로 모형의 설명력이 매우 높은 것으로 분석되었다.

3. 시간가치 신뢰구간 추정

앞의 〈표 2〉로부터 시간가치 신뢰구간 추정에 사용

〈표 2〉 수단선택 모형 정산 결과

변 수 명		Coefficient	(t-value)
1.승용차더미	(d_a)	1.7660	(10.694)
2.버스더미	(d_b)	8.5631	(20.514)
3.지하철더미	(d_s)	8.3579	(19.931)
4.통행시간	(TIME)	-0.055818	(-21.782)
5.통행비용	(COST)	$-0.0^{3}45620$	(-7.851)
6.승용차유무	(CAR)	5.1849	(23.776)
7.면허소지여부	(LIC)	0.79207	(2.734)
8.소득	(INC)	$0.0^{2}14676$	(1.957)
9.가족수	(FS)	0.042828	(1.000)
10.연령	(AGE)	0.012552	(1.948)

Statistics :

Number of observations	:	3,659
Log-Likelihood	:	-2581.488
Restricted(Slope=0)	:	-5072.451
Chi-Squared	:	4981.926
ρ^2	:	0.49108

Covariance Matrix :

	d_a	d_b	d_s	TIME	COST	CAR	LIC	INC	FS	AGE
d_a	0.027272									
d_b	0.023781	0.17424								
d_s	0.024260	0.17397	0.17585							
TIME	$0.0^{4}35542$	$-0.0^{3}33891$	$-0.0^{3}34118$	$0.0^{5}65668$						
COST	$0.0^{5}60275$	$0.0^{5}56710$	$0.0^{5}59411$	$0.0^{9}74016$	$0.0^{8}33764$					
CAR	$-0.0^{2}23905$	$0.0^{2}32612$	$0.0^{2}33161$	$-0.0^{3}18579$	$-0.0^{6}79861$	0.047557				
LIC	$-0.0^{3}63762$	0.049992	0.050062	$0.0^{4}21756$	$-0.0^{6}37946$	-0.031757	0.083926			
INC	$-0.0^{5}28386$	$0.0^{4}81387$	$0.0^{4}81300$	$-0.0^{6}10864$	$-0.0^{8}11202$	$-0.0^{4}17573$	$-0.0^{4}13431$	$0.0^{5}56245$		
FS	-0.0474672	0.0270190	0.0270113	0.0526798	-0.0748461	0.0356425	0.0340112	0.0564629	0.0218327	
AGE	$-0.0^{4}11564$	$0.0^{2}11835$	$0.0^{2}11827$	$-0.0^{7}79477$	$-0.0^{8}61655$	$-0.0^{3}18963$	$0.0^{4}66633$	$-0.0^{5}14193$	$0.0^{4}11795$	$0.0^{4}41514$

주) $0.0^{n}1234$는 0.1234×10^{-n}을 의미한다.

되는 파라메타 및 통계치를 정리하면 아래와 같다 :

$$\hat{\beta}_T = -0.055818 \qquad (13\text{-}1)$$

$$\hat{\beta}_C = -0.0^{3}45620 \qquad (13\text{-}2)$$

[8]

$$Var(\hat{\beta}_T) = 0.0^{5}65668 \qquad (13\text{-}3)$$

$$Var(\hat{\beta}_C) = 0.0^{8}33764 \qquad (13\text{-}4)$$

$$Cov(\hat{\beta}_T, \hat{\beta}_C) = 0.0^{9}74016 \qquad (13\text{-}5)$$

식(13-1)과 식(13-2)로부터 서울시출근통행 시간의 기대값을 구하면,

$$VOT_E = 7341.25(\text{원/시간})$$

이 된다. 또한 식(13-3)~식(13-5)로부터 통행시간

8) $0.0^{n}1234$는 0.1234×10^{-n}을 의미한다.

과 비용의 파라메타에 대한 공분산행렬의 역행렬은 다음과 같이 계산된다.

$$\Sigma_{\beta}^{-1} = \begin{bmatrix} 152284.9 & -33383.3 \\ -33383.3 & 296180757.3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

이제 식(11-1)~식(11-3) 및 식(12)로 표현되는 접선의 기울기에 관한 2차 함수식에 식(13-1), 식(13-2), 식(14) 및 유의수준 α=0.05에서 자유도 2의 x^2임계값, $x^2_{2,0.05} = 5.991$를 대입하면 식(15)와 같은 접선의 기울기 δ에 관한 2차식이 구해진다 :

$$(-33898111.2)\delta^2 + (9186434180.0)\delta - 5.550009186 \times 10^{11} = 0 \quad (15)$$

마지막으로 식(15)의 해를 구하면,

$$\delta_L = 90.915$$
$$\delta_U = 180.086$$

이고, 이로부터 시간당 시간가치에 대한 상한치와 하한치를 구하면 아래와 같다.

$$VOT_L = 60(\text{분/시간}) \times \delta_L = 5454.9(\text{원/시간})$$
$$VOT_U = 60(\text{분/시간}) \times \delta_U = 10805.2(\text{원/시간})$$

따라서 서울시 출근통행의 통행시간가치의 기대값은 7,341(원/시간)으로 계산되었고, 이의 95%신뢰구간은 5,454(원/시간) ≦ VOT ≦ 10,806(원/시간)으로 추정되었다.

V. 결론

본고에서는 통행시간가치에 대한 근사신뢰구간(Asymptotic Confidence Interval) 추정 방법론을 제시하고 서울시 출근통행자의 시간가치 신뢰구간의 추정을 통하여 그 적용사례를 예시하였다. 사례분석을 통하여 서울시 출근통행자의 평균시간가치는 시간당 7,341원으로 추정되었고, 95%신뢰구간의 시간가치의 하한치는 시간당 5,454원, 상한치는 10,806원 정도로 추정되었다.

현실적으로 볼 때, 이와 같이 시간가치의 신뢰구간 추정이 가능하게 됨으로써, 그간 많은 교통관련 사업의 타당성조사에서 논쟁거리로 제기되어 온 시간절약편익의 신뢰성에 대한 문제를 어느 정도 극복할 수 있을 것으로 기대되며, 나아가 교통시설투자사업에 대한 보다 정확한 정책판단이 가능할 것으로 생각된다.

본 연구에서는 통행시간과 비용 파라메타의 신뢰구역을 통한 신뢰구간 추정방법론을 제시하였으나, 보다 정확한 분석을 위하여 분포함수를 통한 신뢰구간 추정방법론이 연구되어야 할 것이다. 이론적으로 가능한 하나의 방법으로는 통행시간과 비용 파라메타의 비율에 대한 근사분포함수(Asymptotic Distribution)을 추정하고 이를 통하여 시간가치의 신뢰구간을 추정하는 방법일 것으로 생각된다.

참고문헌

1. 서울특별시, 서울시 교통센서스 및 데이터베이스 구축, 1997. 12.
2. Anas A., Residential Location Markets and Urban Transportation: Economic Theory, Econometrics, and Policy Analysis with Discrete Choice Models, Academic Press, 1982.
3. Ben-Akiva M. and S. Lerman, Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand, MIT Press, Cambridge, 1985.
4. Hogg R. V. and A. T. Craig, Introduction to Mathematical Statistics, 4th ed., Macmillan Publishing. Co., 1978.
5. Serfling R. J., Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1980.
6. Theil, H., Principles of Econometrics, Wiley, New York, 1971.