研究論文

심용접에 의한 판재로 보강된 균열판의 응력세기계수 해석

김옥환* · 박성두* · 이영호**

Analysis of Stress Intensity Factor for the Cracked Plate Reinforced with a Sheet by Seam Welding

Ok Whan Kim*, Sung Du Park* and Young Ho Lee**

Key Words : Seam Welding(심용접), Stress Intensity Factor(응력세기계수), Singular Integral Equation(특이적분방정식), Reinforcement Sheet(보강판), Stiffness Ratio(강성비), Reinforcement Effect(보강효과)

Abstract

The stress intensity factor has been calculated theoretically for the cracked plate subjected to remote normal stress and reinforced with a sheet by symmetric seam welding. The singular integral equation was derived based on displacement compatibility condition between the cracked sheet and the reinforcement plate, and solved by means of Erdogan and Gupta's method. The results from the derived equation for stress intensity factor were compared with FEM solutions and seems to be reasonable. The reinforcement effect gets better as welding line is closer to the crack and the stiffness ratio of the cracked plate and the reinforcement sheet becomes larger.

1. 서 론

산업의 여러 분야, 특히 비행구조물에 있어서 부재 내에 균열이나 결함이 있다고 가정하여 설계하는 손상허용설계(damage tolerance design)가 도입됨에 따라[1~3] 보강된 판에 존재하는 균열의 거동에 대한 연구가 많이 이루어져 오고 있다.

Greif와 Sanders[4]는 균열이 발생한 판(이하 균열판이라 함)을 보강띠(stringer)로 보강한 경우에 대하여 적분방정식법으로 응력을 해석하였으며, Liu와 Ekvall[5]은 균열판을 여러 가지 보강재로 보강한 경우에 대한 파괴역학시험을 통하여 잔류강도에 영향을 미치는 변수들을 조사하였다. Kan과 Ratwani[6]는 무한균열판에 비선형 거동을 나타내는 접착제로 무한 복합재 판을 접착(bonding)시킨 균

※ 1997년 9월 22일 접수

* 정회원, 천안공업전문대학 용접기술과
** 정회원, 충남대학교 기계공학과

열판에 대한 응력세기계수(stress intensity factor)를 복소함수의 적분방정식 법으로 구하였으며 기타 보강된 균열판에 대하여 수치해법으로도 많은 연구를 하였다[7~9].

제트기의 얇은 판재에 균열이 발생하면 보강판을 부착하여 보강시킨다[10]. 균열이 있는 판을 보강시킨 경우에 있어서는 잔류수명해석이 필수적으로 필요한데, 이에는 응력세기계수의 이론적 산출이 요구된다. 얇은 보강판을 부착시키는 방법에는 점용접(spot welding)과 심용접(seam welding)을 들 수 있다. 저자는 점접합으로 판재를 부착하여 보강시킨 균열판에 대한 응력세기계수를 이론적으로 구한바 있다[11,12]. 본 연구에서는 넓은 판재로 균열부위를 덮고 균열 상하에 균열전파 방향에 평행한 방향으로 심용접하여 보강시킨 균열판이, 먼 거리에서 균열에 수직방향으로 균일한 수직응력을 받는 경우 에 대한 균열의 응력세기계수를 이론적으로 구하고자 한다.

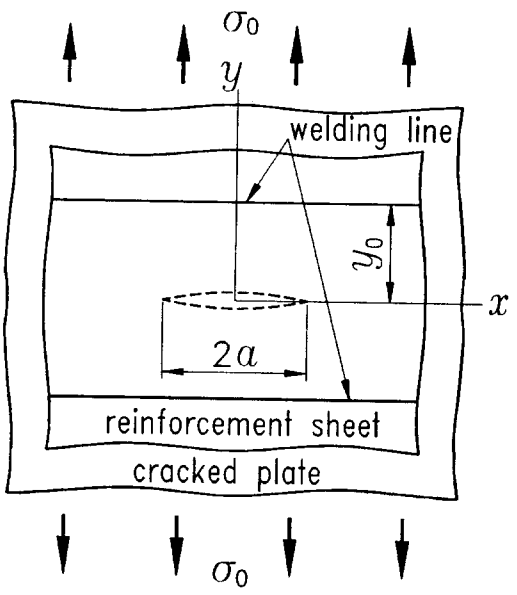


Fig. 1 The cracked plate reinforced with a sheet by seam welding.

2. 이 론

2.1 보강균열판의 응력세기계수

Fig. 1과 같이 먼 거리에서 균일한 수직응력 σ_0를 받는 넓은 균열판에 보강판을 상하 대칭으로 심용접하여 부착한 경우를 생각한다.

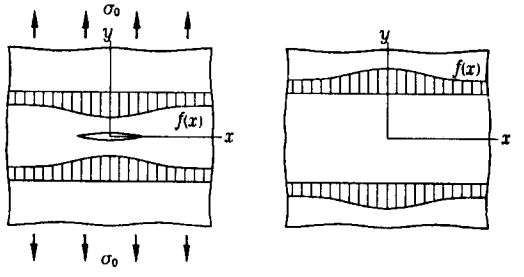
균열판과 보강판은 모두 얇은 균질무한평판으로 2차원 평면응력 상태이며, 심용접에 의한 잔류응력은 없고, 접합점에 발생하는 보강력은 두개의 평판 모두 두께에 걸쳐 균일하게 작용한다고 가정한다.

문제를 단순화하기 위하여 용접부는 폭이 없는 직선으로 가정한다.

Fig. 2는 Fig. 1의 자유물체도이다.

평형 조건에 의하여 균열판과 보강판의 용접부에 발생하는 미지의 y방향 보강력의 분포 함수 $f(x)$는 그 절대값이 서로 같으며, 용접부에서의 변위적합조건(compatibility of displacements)은 다음과 같다.

$$v_c(x) - v_r(x) = 0 \tag{1}$$



a) Cracked plate b) Reinforcement sheet

Fig. 2 Free body diagram of the reinforced cracked plate.

여기서 $v(x)$는 y방향 변위이며, 하첨자 c와 r은 각각 균열판과 보강판을 의미한다.

균열에 대하여 상하 좌우 대칭인 4점에 y방향으로 집중하중 Y를 대칭으로 받는 균열판에 발생하는 y방향 변위는 다음과 같다[12].

$$v = \frac{Y}{4\pi\mu} H(x, y; x_0, y_0, a) \tag{2a}$$

$$H(x, y; x_0, y_0, a) = I(x, y; x_0, y_0) + J(x, y; x_0, y_0, a) \tag{2b}$$

여기서 μ와 t는 각각 전단계수(shear modulus)와 판두께, 그리고 a는 균열 길이의 반이며, x_0, y_0는 하중 작용점의 좌표이고, $I(x,y;x_0,y_0)$는 균열이 없는 무한평판에서 대칭 집중하중에 의한 변위의 함수로 다음과 같다.

$$I(x,y;x_0,y_0)=\frac{2}{(\kappa+1)}\left\{\frac{\kappa}{2}\log\left|\frac{A_{14}A_{34}}{A_{12}A_{32}}\right|+\frac{\alpha_2^2}{A_{12}}+\frac{\alpha_2^2}{A_{32}}-\frac{\alpha_4^2}{A_{14}}-\frac{\alpha_4^2}{A_{34}}\right\} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned}J(x,y;x_0,y_0,a)=\frac{1}{(\kappa+1)}\Bigg[&2yy_0\left\{-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{A_{12}^2}-\frac{\alpha_1^2-\alpha_4^2}{A_{14}^2}-\frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{A_{32}^2}-\frac{\alpha_3^2-\alpha_4^2}{A_{34}^2}\right.\\&\left.+(T_1-U_1)\frac{1}{r\,r_0}+(W_1-V_1)\frac{r_0}{r}\right\}\\&+(\kappa+1)\left\{\frac{\alpha_4^2}{A_{14}}+\frac{\alpha_4^2}{A_{34}}-\frac{\alpha_2^2}{A_{12}}-\frac{\alpha_2^2}{A_{32}}\right.\\&\left.+(Q_1-P_1)y_0\frac{r}{r_0}+(P_2-Q_2)y\frac{r_0}{r}\right\}\\&+\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\log\left|\frac{C(x_0,y_0)G(-x_0,y_0)}{B(x_0,-y_0)D(-x_0,-y_0)}\right|\Bigg]\end{aligned} \tag{3b}$$

여기서

$\alpha_1=x-x_0,\ \alpha_2=y-y_0,\ \alpha_3=x+x_0,\ \alpha_4=y+y_0$

$A_{ij}=\alpha_i^2+\alpha_j^2 \quad (i=1,3 \text{ and } j=2,4)$

$r=\{[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]\}^{1/4}$

$r_0=\{[(x_0-a)^2+y_0^2][(x_0+a)^2+y_0^2]\}^{1/4}$

$\Delta(\xi,\eta)=\{\Delta_L(\xi,\eta)\}^2+\{\Delta_U(\xi,\eta)\}^2$

$(\Delta=B,C,D,G)$

$\Delta_L(\xi,\eta)=x\xi-y\eta-sig(\xi)a^2+rr_0\cos\{\theta+sig(\xi)sig(\eta)\theta_0\}$,

$\Delta_U(\xi,\eta)=x\eta+y\xi+rr_0\sin\{\theta+sig(\xi)sig(\eta)\theta_0\}$

$$sig(x)\equiv\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$$\Theta_\Delta=\tan^{-1}\left(\frac{\Delta_U(\xi,\eta)}{\Delta_L(\xi,\eta)}\right)$$

$$P_k=\left(\frac{\alpha_4}{A_{14}}+(-1)^k\frac{\alpha_2}{A_{32}}\right)\cos\theta_p+\left(\frac{\alpha_3}{A_{32}}+(-1)^k\frac{\alpha_1}{A_{14}}\right)\sin\theta_p$$

$$Q_k=\left(\frac{\alpha_4}{A_{34}}+(-1)^k\frac{\alpha_2}{A_{12}}\right)\cos\theta_m+\left(\frac{\alpha_1}{A_{12}}+(-1)^k\frac{\alpha_3}{A_{34}}\right)\sin\theta_m, \qquad (k=1,2)$$

$$T_1=\left(\frac{\alpha_1}{A_{12}}+\frac{\alpha_3}{A_{34}}\right)(x_0\cos\theta_p+y_0\sin\theta_p)+\left(\frac{\alpha_2}{A_{12}}+\frac{\alpha_4}{A_{34}}\right)(y_0\cos\theta_p-x_0\sin\theta_p)$$

$$U_1=\left(\frac{\alpha_2}{A_{32}}+\frac{\alpha_4}{A_{14}}\right)(y_0\cos\theta_m+x_0\sin\theta_m)-\left(\frac{\alpha_1}{A_{14}}+\frac{\alpha_3}{A_{32}}\right)(x_0\cos\theta_m-y_0\sin\theta_m)$$

$$V_1=\left(\frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{A_{32}^2}-\frac{\alpha_1^2-\alpha_4^2}{A_{14}^2}\right)\cos\theta_p+2\left(\frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}^2}-\frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}^2}\right)\sin\theta_p$$

$$W_1=\left(\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{A_{12}^2}-\frac{\alpha_3^2-\alpha_4^2}{A_{34}^2}\right)\cos\theta_m+2\left(\frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}^2}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}^2}\right)\sin\theta_m$$

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x-a}+\tan^{-1}\frac{y}{x+a}\right)$$

$$\theta_0=\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{y_0}{x_0-a}+\tan^{-1}\frac{y_0}{x_0+a}\right)$$

$$\theta_p = \theta + \theta_0, \quad \theta_m = \theta - \theta_0$$

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{(plane stress)} \\ (3-4\nu) & \text{(plane strain)} \end{cases}$$

여기서 ν는 Poisson비이다.

균열을 포함하는 무한평판이 먼 거리에서 균열에 수직 방향으로 균일한 수직응력 σ_0를 받는 경우 발생하는 y방향 변위는 다음과 같다[12].

$$v = \frac{\sigma_0}{4\mu} F(x, y, a) \tag{4a}$$

$$F(x, y, a) = L(x, y) + M(x, y, a) \tag{4b}$$

여기서

$$L(x, y) = (\kappa + 1) y / 2 \tag{5a}$$

$$M(x, y, a) = \{\kappa r - (x^2 + y^2 - a^2)/r\} \sin\theta - (\kappa - 1) y \tag{5b}$$

Fig. 2로부터 균열판과 보강판의 용접선(welding line) 부분에서의 변위는 다음과 같다.

$$v_c(x) = \frac{\sigma_0}{4\mu_c} F_c(x, y_0, a) - \frac{1}{4\pi\mu_c t_c} \int_0^\infty f(x_0) H_c(x, x_0, y_0, a)\, d x_0 \tag{6a}$$

$$v_r(x) = \frac{1}{4\pi\mu_r t_r} \int_0^\infty f(x_0) I_r(x, x_0, y_0)\, dx_0 \tag{6b}$$

식 (6)을 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$F_c(x, y_0, a) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x_0)}{\sigma_0 t_c} \times \left[H_c(x, x_0, y_0, a) + \frac{1}{\gamma} I_r(x, x_0, y_0) \right] dx_0 = 0 \tag{7}$$

여기서 강성비(stiffness ratio) γ는 보강판과 균열판의 전단계수 비와 두께 비의 곱으로 다음과 같다.

$$\gamma = \frac{\mu_r t_r}{\mu_c t_c} \tag{8}$$

문제를 풀기 위하여 분포하중을 균열의 영향에 의한 항과 균열의 영향이 없는 항으로 분리한다.

$$\frac{f(x_0)}{\sigma_0 t_c} = \bar{q}(x_0) + \bar{s_0} \tag{9}$$

여기서 $\bar{s_0}$는 균열이 없는 무한평판을 보강했을 때 발생하는 균일 분포하중이며 다음과 같다.

$$\bar{s_0} = \frac{\kappa_c + 1}{8\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1}\right) + \frac{\kappa_c - 1}{\kappa_c + 1}\right]} \tag{10}$$

식 (9)를 식 (7)에 대입하여 정리한 후, 무차원 변수 $\bar{x} = x/a$, $\bar{x_0} = x_0/a$, $\bar{y_0} = y_0/a$를 도입하면 다음과 같다.

$$(1 - \bar{s_0}) M_c(\bar{x}, \bar{y_0}, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{q}(\bar{x_0}) \left[H_c(\bar{x}, \bar{x_0}, \bar{y_0}, 1) + \frac{1}{\gamma} I_r(\bar{x}, \bar{x_0}, \bar{y_0}) \right] d\bar{x_0} \tag{11}$$

위의 특이적분방정식(singular integral equation)은 $\bar{q}(\bar{x_0})$에 대하여 풀며, 그 결과를 다음 식에 대입하여 균열의 영향에 의한 보강력으로부터의 응력세기계수를 구한다[12].

$$\lambda = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \int_0^\infty \bar{q}(\bar{x_0}) h_c(\bar{x_0}, \bar{y_0})\, d\bar{x_0} \tag{12}$$

여기서 $\bar{r_0} = r_0/a$를 도입하면

$$h(\bar{x_0}, \bar{y_0}) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\sin\theta_0}{r_0} - \frac{2\bar{y_0}}{(\kappa + 1)\bar{r_0^3}} (\bar{x_0} \cos 3\theta_0 + \bar{y_0} \sin 3\theta_0) \right\} \tag{13}$$

결론적으로 구하고자 하는 균열의 응력세기계수는 식 (9)에 의하여 다음과 같다.

$$\frac{K_I}{\sigma_0\sqrt{\pi a}} = 1 - \bar{s}_0 - \bar{\lambda} \tag{14}$$

여기서 $\bar{\lambda} = \lambda/\sigma_0\sqrt{\pi a}$로 무차원 응력세기계수이다.

2.2 특이적분방정식의 해법

$\bar{x} = (1+\tau)/(1-\tau)$ 와 $\bar{x}_0 = (1+\xi)/(1-\xi)$ 를 식(11)에 대입하면 다음과 같은 식으로 된다.

$$(1-\bar{s}_0)\,M_c(\tau, \bar{y}_0, 1) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\bar{q}(\xi)}{(1-\xi)^2} \left[H_c(\tau, \xi, \bar{y}_0, 1) + \frac{1}{\gamma} I_r(\tau, \xi, \bar{y}_0)\right] d\xi \tag{15}$$

$\bar{q}(\xi)$ 가 $\xi = \pm 1$에서 비특이(nonsingular)이므로 다음과 같은 비특이 함수 $\phi(\xi)$를 도입한다.

$$\bar{q}(\xi) = \phi(\xi)\sqrt{1-\xi^2} \tag{16}$$

식(16)을 식(15)에 대입하면 Erdogan과 Gupta[13]의 해법에 의하여 식(15)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(1-\bar{s}_0)M_c(\tau_k, \bar{y}_0, 1) = \frac{2}{N+1}\sum_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{1+\xi_n}{1-\xi_n}\right)\phi(\xi_n)\,\beta(\tau_k, \xi_n, \bar{y}_0)\right\}, \quad k = 1, 2, \cdots, (N+1) \tag{17}$$

여기서

$$\xi_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right), \quad \tau_k = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2(N+1)}\right]$$

$$\beta(\tau_k, \xi_n, \bar{y}_0) = H_c(\tau_k, \xi_n, \bar{y}_0, 1) + \frac{1}{\gamma} I_r(\tau_k, \xi_n, \bar{y}_0)$$

식(17)은 N=90을 사용하여 미지함수 $\phi(\xi)$ 값을 구하였다. 구한 결과를 식(16)에 대입한 후, 식(12)와 식(14)에 의하여 응력세기계수를 구하였다. N을 100으로 증가시킨 결과 응력세기계수 값의 변화가 0.1% 미만이었다.

3. 검토 및 고찰

이하의 계산에서는 $\nu = 0.3$을 사용하였다.

이론의 검증을 위하여 본 모델을 ANSYS 5.3으로 유한요소해석을 하였다. 수치해석을 위한 모델링에는 8절점 직사각형 요소를 사용하였다.

표 1은 본 연구에 의한 응력세기계수값과 유한요소해석에 의한 값을 비교한 것이다. 표에서 유한요소해석에 의한 값은 본 연구에 의한 값보다 1~10% 큰 값을 보이는데 이것은 x방향의 보강력에 기인하는 것으로 사료된다.

Fig. 3은 심용접부 위치와 강성비에 따르는 응력세기계수 값을 나타낸 것이다. 그림에서 실선은 본 이론에 의한 값이고 원형의 •점은 유한요소 해석 결과이다. 용접부가 균열 연장선에 가까울수록, 강성비가 클수록 응력세기계수값이 작아지며, 따라서 보강효과가 큼을 알 수 있다. 또한 y_0가 영으로 가면 응력세기계수 값이 영에 접근함을 알 수 있다.

표 1 Comparison in dimensionless stress intensity factors between the present solution and the FEM analysis.

y_0/a	γ = 0.1		γ = 0.5		γ = 1.0		γ = 2.0	
	present	FEM	present	FEM	present	FEM	present	FEM
0.5	0.753	0.787	0.384	0.411	0.234	0.254	0.123	0.137
1.0	0.833	0.845	0.491	0.512	0.316	0.335	0.171	0.188
2.0	0.876	0.885	0.576	0.592	0.392	0.412	0.223	0.243
5.0	0.896	0.903	0.622	0.637	0.439	0.453	0.258	0.280
10.0	0.899	0.907	0.631	0.642	0.447	0.462	0.265	0.285

Fig. 4는 응력세기계수 값을 강성비 γ의 함수로 나타내었다. 강성비가 커질수록 응력세기계수값이 작아지며, 강성비가 영으로 가면 무차원 응력세기계수 값이 1에 접근함을 알 수 있다. 한편 식 (8)에 의하여 보강판과 균열판의 전단계수 비와 두께 비의 변화가 보강효과에 미치는 영향이 동일함을 알 수 있다.

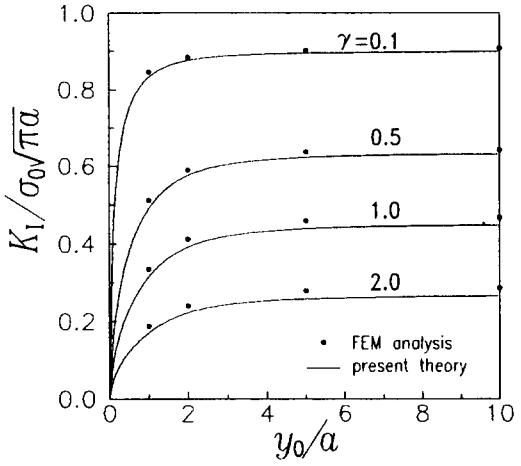


Fig. 3 Demensionless stress intensity factors as a function of seam welding location.

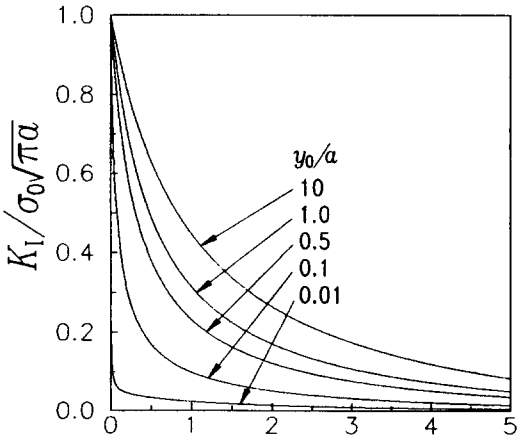


Fig. 4 Demensionless stress intensity factors as a function of stiffness ratio.

4. 결 론

넓은 판재로 균열을 덮고 균열 상하에 심용접으로 부착하여 보강시킨 균열판이 먼 거리에서 균일한 수직응력을 받는 경우에 대한 균열의 응력세기계수를 구하는 이론적 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 균열 상하에 심용접하여 보강판을 균열판에 보강시킨 경우에 대하여, 균열의 응력세기계수를 특이적분방정식법에 의하여 이론적으로 구할 수 있었다.

2. 본 연구에 의하여 유도된 응력세기계수 식에 의한 값과 유한요소해석 결과에 의한 값을 비교 검토함으로써 본 연구의 타당함이 인정되었다.

3. 심용접선이 균열 연장선에 가까울수록, 균열판에 대한 보강판의 강성비가 클수록 보강효과가 크다.

참 고 문 헌

1. J. B. Chang and J. L. Rudd : Damage tolerance of metallic structures, ASTM STP 842, (1984), pp. 1-2
2. MIL-A-83444, Damage tolerance design requirements for aircraft structures, USAF, (1974)
3. Advisory Circular, AC 25. 571-1A, Damage tolerance and fatigue evaluation of structure, FAA, (1986)
4. R. Greif and J. L. Sanders, Jr. : The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 32, No. 1, (1965), pp. 59-66
5. A. F. Liu and J. C. Ekvall : Material toughness and residual strength of damage tolerant aircraft structures, Damage tolerance in aircraft structures, ASTM STP 486, (1971), pp. 98-121

6. H. P. Kan and M. M. Ratwani : Nonlinear adhesive behavior effects in cracked metal to composite bonded structures, Engng. Fracture Mech., Vol. 15, No. 1, (1981), pp. 123-130
7. R. Chandra and K. Guruprasad : Numerical estimation of stress intensity factors in patched cracked plates, Engng Fracture Mech., Vol. 27, No. 5, (1987), pp. 559-569
8. G. C. Sih and T. B. Hong : Integrity of edge-debonded patch on cracked panel, Theor. Appl. Fracture Mech., Vol. 12, (1989), pp. 121-139
9. J. Q. Tarn and K. L. Shek : Analysis of cracked plates with a bonded patch, Engng Fracture Mech., Vol. 40, No. 6, (1991), pp. 1055-1065
10. MIL-HDBK-5C, Metallurgical joints, USAF, (1976)
11. 김옥환 : 점접합에 의하여 판재로 보강된 균열의 응력세기계수, 연세대학교 박사학위논문(1995)
12. 이강용, 김옥환 : 점접합에 의하여 판재로 보강된 균열판의 수직응력에 의한 응력세기계수, 대한용접학회, 제15권, 제1호, (1997), pp. 10-20
13. F. Erdogan and G. D. Gupta, Q. Appl. Math., Vol. 29, (1972), pp. 525