

# 혼합형 하중하에 있는 판재로 보강된 균열판의 응력세기계수

이 강 용\* · 김 옥 환\*\*

(1997년 5월 20일 접수)

## Stress Intensity Factor in Cracked Plate Reinforced with a Plate under Mixed Mode Loading

Kang Yong Lee and Ok Whan Kim

**Key Words :** Spot Welding(점접합), Mixed Mode Loading(혼합형 하중), Stress Intensity Factor(응력세기계수), Displacement Compatibility Condition(변위적합조건), Reinforcement Effect(보강효과)

### Abstract

The mode I and II stress intensity factors have been calculated theoretically for the cracked plate reinforced with a plate by symmetric spot welding under remote mixed mode loading. This is the extension of authors' previous work for the reinforced cracked plate under remote normal stress. Regardless of loading types, the reinforcement effect gets better as one joining spot is closer to the crack tip and the others are closer to the crack surface, and optimum number of the joining spots can be existed. For the present model, the remote loading parallel to crack surface produces the mode I stress intensity factor.

### 1. 서 론

비행 구조물 또는 산업 여러 분야에서 손상허용 설계(damage tolerance design)가 채택되고,<sup>(1-3)</sup> 보강된 판에 존재하는 균열의 기동에 대한 관심이 증가됨에 따라 이에 대한 연구가 많이 이루어져 오고 있다.

Poe<sup>(4)</sup>는 먼 거리에 균일한 수직응력을 받는 균열판에 무한개의 보강띠(stringer)를 리벳접합하여 보강시킨 것에 대하여, 변위적합조건(displacement compatibility condition)을 이용하여 응력세기계수(SIF, stress intensity factor)를 구하였다. Swift<sup>(5)</sup>는 보강띠를 점착제로 연속 점착시킨 모델에 대하여 이론적으로 응력세기계수를 구하였다.

Chandra와 Guruprasad<sup>(6)</sup>는 수직응력을 받는 균열판에 직사각형 모양의 보강조각(patch) 두개를 양쪽 균열선단(crack tip) 가까이 점착시킨 경우에 대하여 유한요소법으로 응력세기계수를 구하였다. Sethuraman과 Maiti<sup>(7)</sup>는 혼합형 하중을 받는 균열판을 직사각형 보강조각으로 보강한 경우에 대하여 적분방정식 법으로 응력세기계수를 구하였다. Chue와 Wang<sup>(8)</sup>은 2축 하중을 받는 균열판의 양면에 보강조각으로 균열을 덮어 보강시킨 경우에 대하여 유한요소법으로 응력세기계수를 구하였다. 이 외에도 여러 연구자들이 보강띠<sup>(9-12)</sup>와 보강조각<sup>(13-16)</sup>의 보강효과에 관하여 연구하였다.

체트기의 얇은 판재에 균열이 발생하면 보강판으로 균열을 덮고 점용접으로 부착하여 수리하는데<sup>(17)</sup> 이러한 보강된 구조물에 대한 응력세기계수의 이론적 산출이 손상허용설계 또는 잔류수명 해석의 관점에서 필요하나 해석결과를 찾아보기 어렵다. 본

\*회원, 연세대학교 기계공학과

\*\*회원, 천안공업전문대학 용접기술과

논문의 저자들<sup>(18)</sup>은 점접합에 의하여 넓은 판재로 보강된 균열판이 수직응력을 받는 경우에 대한 응력세기계수를 이론적으로 구하였는데, 본 연구에서는 같은 형태의 보강 균열판이 혼합형 하중(mixed mode loading)을 받는 경우에 대한 응력세기계수를 이론적으로 구하고자 한다.

## 2. 이 론

Fig. 1의 (a)와 같이 먼 거리에서 균열면에 대하여 임의의 경사각  $\lambda$  방향으로 균일한 수직응력  $\sigma_0$ 를 받는 경우를 생각한다. 이것은 Fig. 1의 (b)와 같이 먼 거리에서 균일한 수직응력  $\sigma_{0x}$ ,  $\sigma_{0y}$ 와 균일한 전단응력  $\tau_0$ 를 받는 상태로 나타낼 수 있다.

각각의 응력  $\sigma_{0x}$ ,  $\sigma_{0y}$ ,  $\tau_0$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{0x} &= \sigma_0 \cos^2 \lambda \\ \sigma_{0y} &= \sigma_0 \sin^2 \lambda \\ \tau_0 &= \sigma_0 \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned} \quad (1)$$

따라서 혼합형 응력을 받는 보강균열판의 응력세

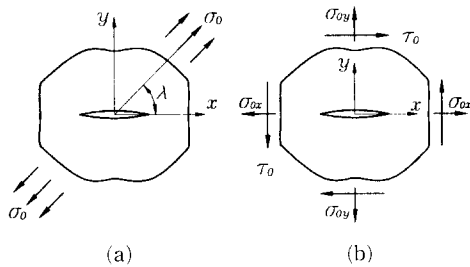


Fig. 1 Mixed mode loading.

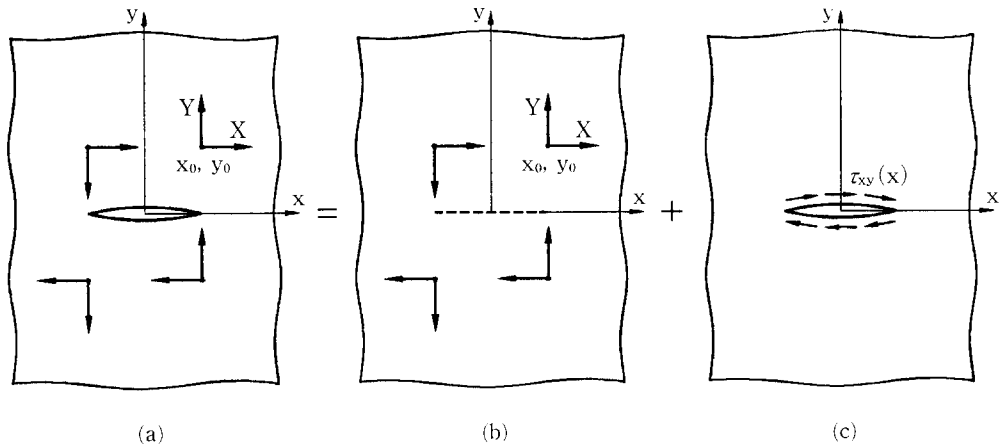


Fig. 2 Cracked plate under skew symmetric concentrated loads and superposition.

계수는 전단응력을 받는 경우와 수직응력을 받는 경우로 나누어 해석한다.

### 2.1 전단응력에 의한 응력세기계수

#### 2.1.1 역대칭 집중력에 의한 변위

2차원 탄성체의 응력과 변위는 Muskhelishvili 복소응력함수  $\Phi(z)$ ,  $\bar{\Omega}(z)$ <sup>(19)</sup>에 의하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re}\{3\Phi(z) - \bar{\Omega}(z)\} - 2y\text{Im}\{\Phi'(z)\} \\ \sigma_y &= \text{Re}\{\Phi(z) + \bar{\Omega}(z)\} + 2y\text{Im}\{\Phi'(z)\} \\ \tau_{xy} &= \text{Im}\{-\Phi(z) + \bar{\Omega}(z)\} - 2y\text{Re}\{\Phi'(z)\} \\ 2\mu(u - iv) &= x \int \bar{\Phi}(z) dz - \int \bar{\Omega}(z) dz \\ &\quad + (z - \bar{z})\Phi(z) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$x = \begin{cases} (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{(plane stress)} \\ (3 - 4\nu) & \text{(plane strain)} \end{cases} \quad (3)$$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ 와  $u$ ,  $v$ 는 각각  $x$ ,  $y$  방향의 수직응력과 변위이며  $\tau_{xy}$ ,  $\mu$  및  $\nu$ 는 각각 전단응력, Lamé 상수 및 Poisson 비이다.

Fig. 2(a)와 같이 역대칭 집중력(skew symmetric concentrated forces)  $X$ ,  $Y$ 를 받는 균열판을 생각한다. 균열판에 발생하는 변위는 Fig. 2(b)와 (c)를 중첩하므로써 구할 수 있다. Fig. 2(c)에서  $\tau_{xy}(x)$ 는 Fig. 2(b)의  $x$ 축  $-a < x < a$ 에 발생하는 응력과 방향이 반대이고 절댓값이 같다. 따라서 Fig. 1(a)의 균열판에 발생하는 변위는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$2\mu(u-iv) = 2\mu[(u_n-iv_n) + (u_c-iv_c)] \quad (4)$$

여기서,  $u_n, v_n$ 은 Fig. 1(b), 그리고  $u_c, v_c$ 는 Fig. 1(c)의 변위이다.

입의의 한 점  $z_0$ 에  $x, y$ 방향으로의 집중력  $X, Y$ 를 받는 균열판의 응력함수  $\Phi(z), \Omega(z)$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_n(z) + \Phi_c(z) \\ \Omega(z) &= \Omega_n(z) + \Omega_c(z) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, 하첨자  $n, c$ 는 식 (4)에서 정의된 것과 같은 의미를 갖으며, 각각의 응력함수는 다음과 같다. <sup>(19, 20)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) &= -\frac{F}{z-z_0} \\ \Omega_n(z) &= x\frac{F}{z-\bar{z}_0} + \frac{\bar{F}(\bar{z}_0-z_0)}{(z-\bar{z}_0)} \\ \Phi_c(z) &= \Omega_c(z) \\ &= \frac{F}{2}\left[\Gamma(-z_0, z) - x\Gamma(-\bar{z}_0, z) \right. \\ &\quad \left. + (x-1)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\right] + \frac{\bar{F}}{2}\Pi(-z_0, z) \\ F &= \frac{X+iY}{2\pi(x+1)t} \\ \Gamma(\xi, \eta) &= \frac{1}{\xi+\eta}\left(1 + \frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\sqrt{\eta^2-a^2}}\right) \\ \Pi(\xi, \eta) &= \frac{\xi-\bar{\xi}}{\xi+\eta}\left\{\frac{1}{\xi+\eta}\left(1 + \frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\sqrt{\eta^2-a^2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}\sqrt{\eta^2-a^2}}\right\} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  $a$ 와  $t$ 는 각각 균열의 반길이와 판두께이다.

Fig. 1(a)의 각각의 사분면에 작용하는 집중력에 대한 응력함수를 모두 중첩하여 구한 후, 그 결과를 식 (2)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 2\mu(u_n-iv_n) &= F\zeta(z, z_0) + \bar{F}\bar{\zeta}(z, \bar{z}_0) \\ 2\mu(u_c-iv_c) &= F\phi(z, z_0) + \bar{F}\bar{\phi}(z, \bar{z}_0) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, \eta) &= \frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\xi-\eta} - \frac{\bar{\xi}+\bar{\eta}}{\xi+\eta} - 2x \log \left| \frac{\xi+\bar{\eta}}{\xi-\eta} \right| \\ \phi(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\{II(\xi, -\eta) + II(-\eta, \xi) - II(\xi, \eta) \\ &\quad - II(\eta, \xi) - III(-\eta, \xi) + III(\eta, \xi) \\ &\quad - \Lambda_1(\xi, -\eta) + \Lambda_1(\xi, \eta) \\ &\quad + x\{II(\bar{\xi}, \eta) + II(\bar{\eta}, \xi) - II(\bar{\xi}, -\eta)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-II(-\bar{\eta}, \xi) - 2x\{\Lambda_2(\xi, \bar{\eta}) \\ &- \Lambda_2(\xi, -\bar{\eta})\} + x^2\{\Lambda_1(\bar{\xi}, -\bar{\eta}) - \Lambda_1(\bar{\xi}, \bar{\eta})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II(\xi, \eta) &= \frac{\eta-\bar{\eta}}{\xi+\eta}\left(1 + \frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\sqrt{\eta^2-a^2}}\right) \\ III(\xi, \eta) &= \frac{\xi-\bar{\xi}}{\xi+\eta}\left\{\frac{\eta-\bar{\eta}}{\xi+\eta}\left(1 + \frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\sqrt{\eta^2-a^2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\eta-\bar{\eta})\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}\sqrt{\eta^2-a^2}}\right\} \\ \Lambda_1(\xi, \eta) &= \log(\xi\eta - a^2 + \sqrt{\xi^2-a^2}\sqrt{\eta^2-a^2}) \\ \Lambda_2(\xi, \eta) &= \log|\xi\eta - a^2 + \sqrt{\xi^2-a^2}\sqrt{\eta^2-a^2}| \end{aligned} \quad (8)$$

식 (7)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} u_{nx} &= \frac{X}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{H}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ v_{nx} &= \frac{X}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{I}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ u_{ny} &= \frac{Y}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{J}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ v_{ny} &= \frac{Y}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{K}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ u_{cx} &= \frac{X}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{L}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ v_{cx} &= \frac{X}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{M}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ u_{cy} &= \frac{Y}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{N}}_r(x, y; x_0, y_0) \\ v_{cy} &= \frac{Y}{4\pi\mu t} \hat{\mathbf{O}}_r(x, y; x_0, y_0) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $u_{nx}, v_{nx}, u_{cx}, v_{cx}$ 와  $u_{ny}, v_{ny}, u_{cy}, v_{cy}$ 는 각각 역대칭 집중력  $X$ 와  $Y$ 에 의한 변위이다.

식 (9)에서

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_r &= \frac{2}{(x+1)}\left(\frac{x}{2} \log \left| \frac{A_{14}A_{34}}{A_{12}A_{32}} \right| - \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_2^2}{A_{14}} + \frac{\alpha_2^2}{A_{34}}\right) \\ \hat{\mathbf{I}}_r &= \frac{2}{(x+1)}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}}\right) \\ \hat{\mathbf{J}}_r &= \frac{2}{(x+1)}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}}\right) \\ \hat{\mathbf{K}}_r &= \frac{2}{(x+1)}\left(\frac{x}{2} \log \left| \frac{A_{32}A_{34}}{A_{12}A_{32}} \right| + \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_2^2}{A_{14}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{34}}\right) \\ \hat{\mathbf{L}}_r &= \frac{1}{(x+1)}\left[2yy_0\left(-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_3^2-\alpha_4^2}{A_{34}^2}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} \Big) \\
& + (T_1 - U_1) \frac{1}{rr_0} + (W_1 - V_1) \frac{r_0}{r} \Big\} \\
& + (x+1) \left\{ \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} + \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} - \frac{\alpha_4^2}{A_{14}} - \frac{\alpha_4^2}{A_{34}} \right. \\
& + (R_1 - S_1) y_0 \frac{r}{r_0} + (P_1 - Q_1) y \frac{r_0}{r} \Big\} \\
& + \frac{1}{4} (x+1)^2 \log \left| \frac{C(x_0, y_0) G(-x_0, y_0)}{B(x_0, -y_0) D(-x_0, -y_0)} \right| \Big] \\
\hat{M}_\tau = & \frac{1}{(x+1)} \left[ -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}} \right. \\
& - 2yy_0 \left\{ 2 \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} \right) \right. \\
& + (T_2 - U_2) \frac{1}{rr_0} + (W_2 - V_2) \frac{r_0}{r} \Big\} \\
& + x \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{14}} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{12}} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{34}} - \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{32}} \right) \\
& + (x-1) (S_2 - R_2) y_0 \frac{r}{r_0} \\
& + (x+1) (Q_2 - P_2) y \frac{r_0}{r} \\
& \left. + \frac{1}{2} (x^2 - 1) (\Theta_C + \Theta_C - \Theta_B - \Theta_D) \right] \\
\hat{N}_\tau = & \frac{1}{(x+1)} \left[ -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}} \right. \\
& - 2yy_0 \left\{ 2 \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} \right) \right. \\
& + (T_2 + U_2) \frac{1}{rr_0} + (V_2 + W_2) \frac{r_0}{r} \Big\} \\
& + x \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{14}} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{12}} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{34}} - \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{32}} \right) \\
& - (x+1) (R_2 + S_2) y_0 \frac{r}{r_0} \\
& - (x-1) (P_2 + Q_2) y \frac{r_0}{r} \\
& \left. + \frac{1}{2} (x^2 - 1) (\Theta_B + \Theta_C - \Theta_D - \Theta_C) \right] \\
\hat{O}_\tau = & \frac{1}{(x+1)} \left[ 2yy_0 \left\{ \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} \right. \right. \\
& - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} \Big\} \\
& - (T_1 + U_1) \frac{1}{rr_0} - (V_1 + W_1) \frac{r_0}{r} \Big\} \\
& + (x-1) \left\{ \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4^2}{A_{14}} - \frac{\alpha_4^2}{A_{34}} \right. \\
& - (R_1 + S_1) y_0 \frac{r}{r_0} - (P_1 + Q_1) y \frac{r_0}{r} \Big\} \\
& + \frac{1}{4} (x-1)^2 \log \left| \frac{D(-x_0, -y_0) G(-x_0, y_0)}{B(x_0, -y_0) C(x_0, y_0)} \right| \Big]
\end{aligned}$$

(10)

여기서,

$$\alpha_1 = x - x_0, \quad \alpha_2 = y - y_0, \quad \alpha_3 = x + x_0, \quad \alpha_4 = y + y_0$$

$$A_{ij} = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 \quad (i=1, 3, \quad j=2, 4)$$

$$r = \{ [(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y_0^2] \}^{1/4}$$

$$r_0 = \{ [(x_0-a)^2 + y_0^2][(x_0+a)^2 + y^2] \}^{1/4}$$

$$\Delta(\xi, \eta) = \{ \Delta_L(\xi, \eta) \}^2 + \{ \Delta_U(\xi, \eta) \}^2$$

$$(\Delta = B, C, D, G)$$

$$\Delta_L(\xi, \eta) = x\xi - y\eta - \text{sig}(\xi)^2$$

$$+ r r_0 \cos \{ \theta + \text{sig}(\xi) \text{sig}(\eta) \theta_0 \}$$

$$\Delta_U(\xi, \eta) = x\eta + y\xi + r r_0 \sin \{ \theta + \text{sig}(\xi) \text{sig}(\eta) \theta_0 \}$$

$$\text{sig}(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Theta_d = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta_U(\xi, \eta)}{\Delta_L(\xi, \eta)} \right)$$

$$P_1 = \left( \frac{\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) \cos \theta_p + \left( \frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) \sin \theta_p$$

$$Q_1 = \left( \frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) \cos \theta_m + \left( \frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \sin \theta_m$$

$$R_1 = \left( \frac{\alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_2}{A_{32}} \right) \cos \theta_p + \left( \frac{\alpha_3}{A_{32}} - \frac{\alpha_1}{A_{14}} \right) \sin \theta_p$$

$$S_1 = \left( \frac{\alpha_4}{A_{34}} - \frac{\alpha_2}{A_{12}} \right) \cos \theta_m + \left( \frac{\alpha_1}{A_{12}} - \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \sin \theta_m$$

$$T_1 = \left( \frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) (x_0 \cos \theta_p + y_0 \sin \theta_p)$$

$$+ \left( \frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) (y_0 \cos \theta_p - x_0 \sin \theta_p)$$

$$U_1 = \left( \frac{\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) (y_0 \cos \theta_m + x_0 \sin \theta_m)$$

$$- \left( \frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) (x_0 \cos \theta_m - y_0 \sin \theta_m)$$

$$V_1 = \left( \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} \right) \cos \theta_p$$

$$+ 2 \left( \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2} \right) \sin \theta_p$$

$$W_1 = \left( \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} \right) \cos \theta_m$$

$$+ 2 \left( \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2} \right) \sin \theta_m$$

$$P_2 = \left( \frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) \cos \theta_p - \left( \frac{\alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_2}{A_{32}} \right) \sin \theta_p$$

$$Q_2 = \left( \frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \cos \theta_m - \left( \frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) \sin \theta_m$$

$$R_2 = \left( \frac{\alpha_3}{A_{32}} - \frac{\alpha_1}{A_{14}} \right) \cos \theta_p + \left( \frac{\alpha_2}{A_{32}} - \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) \sin \theta_p$$

$$S_2 = \left( \frac{\alpha_1}{A_{12}} - \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \cos \theta_m + \left( \frac{\alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) \sin \theta_m$$

$$T_2 = \left( \frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) (y_0 \cos \theta_p - x_0 \sin \theta_p)$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}}\right)(x_0 \cos \theta_p + y_0 \sin \theta_p) \\
 U_2 = & \left(\frac{\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4}{A_{14}}\right)(x_0 \cos \theta_m - y_0 \sin \theta_m) \\
 & + \left(\frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}}\right)(y_0 \cos \theta_m + x_0 \sin \theta_m) \\
 V_2 = & 2\left(\frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2}\right) \cos \theta_p \\
 & + \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2}\right) \sin \theta_p \\
 W_2 = & 2\left(\frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2}\right) \cos \theta_m \\
 & - \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2}\right) \sin \theta_m \\
 \theta = & \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{y}{x-a} + \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right) \\
 \theta_0 = & \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0-a} + \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0+a} \right) \\
 \theta_p = & \theta + \theta_0, \quad \theta_m = \theta - \theta_0
 \end{aligned} \tag{11}$$

2.2 접합점에 작용하는 보강력

Fig. 3과 같이 먼 거리에 균일한 전단응력을 받는 넓은 균열판에, 균열의 중앙에 대하여 상하좌우 대칭으로 지름  $d$ 의 점접합으로 보강판을 부착시켰을 경우를 생각한다.

균열판과 보강판은 모두 얇은 균질무한평판으로, 2차원 평면응력상태이며, 점접합에 의한 잔류응력은 없고, 접합점에 발생하는 보강력은 두개의 평판 모두 두께에 걸쳐 균일하게 작용한다고 가정하며, 변형에 의하여 접합점에 발생하는 모멘트는 무시한다.

Fig. 3에서 접합점에 발생하는 보강력은 접합점의 지름  $d$ 에 걸쳐 분포되어 작용한다고 가정한다. 길이  $d$ 에 걸쳐 분포되어 작용하는 하중  $X$ 와  $Y$ 의 4쌍이 균열에 대하여 역대칭으로 작용하는 균열판

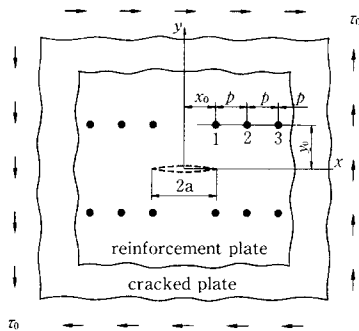


Fig. 3 Reinforced cracked plate subjected to uniform shear stress.

에 발생하는 변위는 식 (9)를 Green함수로 이용하여 구하며 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 u_x = & \frac{X}{4\pi\mu t} \{ \mathbf{H}_r(x, y; x_0, y_0) + \mathbf{L}_r(x, y; x_0, y_0) \} \\
 v_x = & \frac{X}{4\pi\mu t} \{ \mathbf{I}_r(x, y; x_0, y_0) + \mathbf{M}_r(x, y; x_0, y_0) \} \\
 u_y = & \frac{Y}{4\pi\mu t} \{ \mathbf{J}_r(x, y; x_0, y_0) + \mathbf{N}_r(x, y; x_0, y_0) \} \\
 v_y = & \frac{Y}{4\pi\mu t} \{ \mathbf{K}_r(x, y; x_0, y_0) + \mathbf{O}_r(x, y; x_0, y_0) \}
 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_r = & \frac{2}{(x+1)d} \left[ \frac{x}{2} \{ (\alpha_4 + d/2) \right. \\
 & \{ \log | \alpha_1^2 + (\alpha_4 + d/2)^2 \} \{ \alpha_3^2 + (\alpha_4 + d/2)^2 \} | \\
 & - (\alpha_4 - d/2) \log | \{ \alpha_1^2 + (\alpha_4 - d/2)^2 \} \\
 & \{ \alpha_3^2 + (\alpha_4 - d/2)^2 \} | \\
 & - (\alpha_2 + d/2) \log | \{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 + d/2)^2 \} \\
 & \{ \alpha_3^2 + (\alpha_2 + d/2)^2 \} | \\
 & + (\alpha_2 - d/2) \log | \{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 - d/2)^2 \} \\
 & \{ \alpha_3^2 + (\alpha_2 - d/2)^2 \} | \\
 & + (x-1) \left\{ \alpha_1 \left[ \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right) \right\} \\
 & + \alpha_3 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_3 d}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right] \right. \\
 & \left. - \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_3 d}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right] \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_r = & \frac{1}{(x+1)d} \\
 & \cdot \left[ \alpha_1 \log \left| \frac{\{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 + d/2)^2 \} \{ \alpha_1^2 + (\alpha_4 - d/2)^2 \}}{\{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 - d/2)^2 \} \{ \alpha_1^2 + (\alpha_4 + d/2)^2 \}} \right| \right. \\
 & \left. + \alpha_3 \log \left| \frac{\{ \alpha_3^2 + (\alpha_2 + d/2)^2 \} \{ \alpha_3^2 + (\alpha_4 - d/2)^2 \}}{\{ \alpha_3^2 + (\alpha_2 - d/2)^2 \} \{ \alpha_3^2 + (\alpha_4 + d/2)^2 \}} \right| \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_r = & \frac{1}{(x+1)d} \\
 & \cdot \left[ \alpha_2 \log \left| \frac{\{ (\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_2^2 \} \{ (\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_2^2 \}}{\{ (\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_2^2 \} \{ (\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_2^2 \}} \right| \right. \\
 & \left. + \alpha_4 \log \left| \frac{\{ (\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_4^2 \} \{ (\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_4^2 \}}{\{ (\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_4^2 \} \{ (\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_4^2 \}} \right| \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_r = & \frac{2}{(x+1)d} \left[ \frac{x}{2} \{ (\alpha_3 + d/2) \log | \{ (\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_1^2 \} \right. \\
 & \{ (\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_2^2 \} | - (\alpha_3 - d/2) \\
 & \log | \{ (\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_1^2 \} \\
 & \{ (\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_2^2 \} | - (\alpha_1 + d/2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log | \{ (\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_1^2 \} \\ & \{ (\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_2^2 \} | + (\alpha_1 - d/2) \\ & \log | \{ (\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_1^2 \} \{ (\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_2^2 \} | \\ & + (x-1) \left\{ \alpha_1 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right) \right. \\ & \left. - \alpha_2 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_2 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_2 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right) \right\} \\ \Psi_\tau &= \frac{1}{d} \int_{y_0-d/2}^{y_0+d/2} \tilde{\Psi}_\tau(x, y; x_0, \xi) d\xi, \quad \Psi = \mathbf{L}, \mathbf{M} \\ \bar{\Psi}_\tau &= \frac{1}{d} \int_{x_0-d/2}^{x_0+d/2} \bar{\tilde{\Psi}}_\tau(x, y; \xi, y_0) d\xi, \quad \bar{\Psi} = \mathbf{N}, \mathbf{O} \end{aligned} \tag{13}$$

균열을 포함하는 무한평판이 먼 거리에서 균일한 전단응력  $\tau_0$ 를 받는 경우, 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\tau_0}{4\mu} \mathbf{U}_\tau(x, y) \\ v &= \frac{\tau_0}{4\mu} \mathbf{V}_\tau(x, y) \end{aligned} \tag{14}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\tau &= \{ (x+2)r + (x^2 + y^2 - a^2)/r \} \sin \theta - (x+1)y \\ \mathbf{V}_\tau &= -\{ (x-2)r + (x^2 + y^2 - a^2)/r \} \cos \theta \\ & \quad + (x+1)x \end{aligned} \tag{15}$$

Fig. 3의 각 접합점에서는 다음과 같은 변위적합 조건 식이 성립된다.

$$\begin{aligned} u_{pk} - u_{rk} &= 0 \\ u_{pk} - v_{rk} &= 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \tag{16}$$

여기서  $u_{pk}$ ,  $u_{rk}$ 와  $v_{pk}$ ,  $v_{rk}$ 는 각각 균열판과 보강판의 접합점  $k$ 에서의  $x$ 와  $y$ 방향 변위이다.

Fig. 3의 각 접합점  $k$ 에서의  $x$ ,  $y$ 방향 변위는 식 (12), 식 (14)에 의하여 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \frac{1}{4\pi\mu_r t_r} \sum_{l=1}^N \{ X_l \mathbf{H}_r^{rk l} + Y_l \mathbf{J}_r^{rk l} \} \\ v_{rk} &= \frac{1}{4\pi\mu_r t_r} \sum_{l=1}^N \{ X_l \mathbf{I}_r^{rk l} + Y_l \mathbf{K}_r^{rk l} \} \\ u_{pk} &= \frac{\sigma_0}{4\mu_p} \mathbf{U}_\tau^k - \frac{1}{4\pi\mu_p t_p} \sum_{l=1}^N \{ X_l (\mathbf{H}_r^{pk l} + \mathbf{L}_r^{pk l}) \\ & \quad + Y_l (\mathbf{J}_r^{pk l} + \mathbf{N}_r^{pk l}) \} \\ v_{pk} &= \frac{\sigma_0}{4\mu_p} \mathbf{V}_\tau^k - \frac{1}{4\pi\mu_p t_p} \sum_{l=1}^N \{ X_l (\mathbf{I}_r^{pk l} + \mathbf{M}_r^{pk l}) \\ & \quad + Y_l (\mathbf{K}_r^{pk l} + \mathbf{O}_r^{pk l}) \} \end{aligned}$$

$$(k, l=1, 2, \dots, N) \tag{17}$$

여기서,  $\mathbf{H}_r^{rk l}$ 은 보강판의  $\mathbf{H}_\tau(x_k, y_k; x_l, y_l)$ 을 나타내며 다른 기호도 유사한 의미를 갖는다.

식 (17)을 식 (16)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$[\mathbf{C}_\tau] \{ \mathbf{F} \} = \pi \tau_0 \{ \mathbf{U}_\tau \} \tag{18}$$

여기서,

$$[\mathbf{C}_\tau] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r^{k l} & \mathbf{B}_r^{k l} \\ \mathbf{D}_r^{k l} & \mathbf{E}_r^{k l} \end{bmatrix}, \quad \{ \mathbf{F} \} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_l \\ \tilde{Y}_l \end{Bmatrix}, \quad \{ \mathbf{U}_\tau \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_\tau^k \\ \mathbf{V}_\tau^k \end{Bmatrix}$$

$$(x, l=1, 2, \dots, N)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r^{k l} &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{H}_r^{rk l} + \mathbf{H}_r^{pk l} + \mathbf{L}_r^{pk l} \\ \mathbf{B}_r^{k l} &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{J}_r^{rk l} + \mathbf{J}_r^{pk l} + \mathbf{N}_r^{pk l} \\ \mathbf{D}_r^{k l} &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{I}_r^{rk l} + \mathbf{I}_r^{pk l} + \mathbf{M}_r^{pk l} \\ \mathbf{E}_r^{k l} &= \frac{1}{\gamma} \mathbf{K}_r^{rk l} + \mathbf{K}_r^{pk l} + \mathbf{O}_r^{pk l} \\ \tilde{X}_l &= X_l/t_p, \quad \tilde{Y}_l = Y_l/t_p \\ \gamma &= \mu_r t_r / \mu_p t_p \end{aligned} \tag{19}$$

### 2.3 응력세기계수

Muskhelishvili 복소응력함수에 의하여 응력세기 계수를 구하는 식은 다음과 같다.

$$K_{I,1} - iK_{II,1} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} [\sqrt{z - z_0} \Phi(z)] \tag{20}$$

식 (6)을 식 (20)에 대입하여 얻은 결과를 가지고 Fig. 2(a)의 모든 집중력에 대하여 중첩하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} K_{II,X} &= X/t\sqrt{a/\pi} \hat{\mathbf{T}}_X(x_0, y_0) \\ K_{II,Y} &= Y/t\sqrt{a/\pi} \hat{\mathbf{T}}_Y(x_0, y_0) \\ K_{I,X} &= 0, \quad K_{I,Y} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

여기서,  $K_{II,X}$ ,  $K_{II,Y}$ 와  $K_{I,X}$ ,  $K_{I,Y}$ 는 각각  $X$ ,  $Y$ 에 의한 모드 II와 모드 I 응력세기계수이다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_X &= \frac{2}{(x+1)} \left\{ (x+1) \frac{\sin \theta_0}{r_0} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2y_0}{r_0^3} (x_0 \cos 3\theta_0 + y_0 \sin 3\theta_0) \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_Y &= \frac{2}{(x+1)} \left\{ (x-1) \frac{\cos \theta_0}{r_0} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2y_0}{r_0^3} (x_0 \sin 3\theta_0 - y_0 \cos 3\theta_0) \right\} \end{aligned} \tag{22}$$

식 (21)에 의하여 길이  $d$ 에 걸쳐 균일하게 분포하여 작용하는 4개의 역대칭 하중에 의한 응력세기계수는 다음 식과 같이 구하여진다.

$$\begin{aligned} K_{II,x} &= X/t\sqrt{a/\pi} \mathbf{T}_X(x_0, y_0) \\ K_{II,y} &= Y/t\sqrt{a/\pi} \mathbf{T}_Y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_X &= \frac{1}{d} \int_{y_0-d/2}^{y_0+d/2} \hat{\mathbf{T}}_X(x_0, \xi) d\xi \\ \mathbf{T}_Y &= \frac{1}{d} \int_{x_0-d/2}^{x_0+d/2} \hat{\mathbf{T}}_Y(\xi, y_0) d\xi \end{aligned} \quad (24)$$

Fig. 3과 같이 한 사분면에 2개 이상의 점합점으로 보강된 균열판의 응력세기계수는 식 (23)과 식 (18)에 의하여 다음 식으로 된다.

$$\frac{K_{II}}{\sigma_0\sqrt{\pi a}} = 1 - [\mathbf{T}][\mathbf{C}_r]^{-1} \{ \mathbf{U}_r \} \quad (25)$$

여기서,

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_x^j \mathbf{T}_y^j] \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (26)$$

여기서,  $\mathbf{T}_x^j$ 는 균열판의  $\mathbf{T}_X(x, y_j)$ 를 의미한다. 혼합형 하중을 받는 보강균열판에 있어서 전단응력에 의한 응력세기계수는 식 (26)에 식 (1)을 대입하여 구하면 다음과 같다.

$$\frac{K_{II}}{\sigma_0\sqrt{\pi a}} = (1 - [\mathbf{T}][\mathbf{C}_r]^{-1} \{ \mathbf{U}_r \}) \sin \lambda \cos \lambda \quad (27)$$

### 2.2 수직응력에 의한 응력세기계수

$\sigma_{0y}$ 만이 작용하는 경우에 대한 응력세기계수의 식<sup>(18)</sup>을  $\sigma_{0x}$ 의 영향을 고려하여 수정하면 다음과 같다.

$$K_I = \sigma_{0y}\sqrt{\pi a} (1 - [\mathbf{S}][\mathbf{C}_\sigma]^{-1} \{ \mathbf{U}_\sigma \}) \quad (28)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}] &= [\mathbf{S}_x^k \mathbf{S}_y^k], [\mathbf{C}_\sigma] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\sigma^{kj} & \mathbf{B}_\sigma^{kj} \\ \mathbf{D}_\sigma^{kj} & \mathbf{E}_\sigma^{kj} \end{bmatrix}, \\ \{ \mathbf{U}_\sigma \} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\sigma y}^k + \mathbf{U}_{\sigma x}^k \sigma_{0x}/\sigma_{0y} \\ \mathbf{V}_{\sigma y}^k + \mathbf{V}_{\sigma x}^k \sigma_{0x}/\sigma_{0y} \end{Bmatrix} \quad (k, j=1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_x^k = \frac{1}{d} \int_{y_1-d/2}^{y_1+d/2} \hat{\mathbf{S}}_x^k(x_1, \xi) d\xi$$

$$\mathbf{S}_y^k = \frac{1}{d} \int_{x_1-d/2}^{x_1+d/2} \hat{\mathbf{S}}_y^k(\xi, y_1) d\xi$$

$$\hat{\mathbf{S}}_x = -\frac{2}{(x+1)} \left\{ (x-1) \frac{\cos \theta}{r} \right.$$

$$\left. -\frac{2y}{r^3} (x \sin 3\theta - y \cos 3\theta) \right\}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_y = \frac{2}{(x+1)} \left\{ (x+1) \frac{\sin \theta}{r} - \frac{2y}{r^3} (x \cos 3\theta + y \sin 3\theta) \right\}$$

$$\mathbf{A}_\sigma^{kj} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{H}_\sigma^{rkj} + \mathbf{H}_\sigma^{pkj} + \mathbf{L}_\sigma^{pkj}$$

$$\mathbf{B}_\sigma^{kj} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{J}_\sigma^{rkj} + \mathbf{J}_\sigma^{pkj} + \mathbf{N}_\sigma^{pkj}$$

$$\mathbf{D}_\sigma^{kj} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{I}_\sigma^{rkj} + \mathbf{I}_\sigma^{pkj} + \mathbf{M}_\sigma^{pkj}$$

$$\mathbf{E}_\sigma^{kj} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{K}_\sigma^{rkj} + \mathbf{K}_\sigma^{pkj} + \mathbf{O}_\sigma^{pkj}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\sigma &= \frac{2}{(x+1)d} \\ &\times \left[ \frac{x}{2} \left\{ \left( \alpha_4 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_4 + d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_4 + d/2)^2} \right| \right. \right. \\ &- \left( \alpha_4 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_4 - d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_4 - d/2)^2} \right| \\ &+ \left( \alpha_2 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_2 + d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_2 + d/2)^2} \right| \\ &- \left. \left( \alpha_2 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_2 - d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_2 - d/2)^2} \right| \right\} \\ &+ (x-1) \left\{ \alpha_3 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_3 d}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right] \right. \right. \\ &+ \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_3 d}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \left. \right\} \\ &- \alpha_1 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right] \right. \\ &+ \left. \left. \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\sigma &= \frac{1}{(x+1)d} \\ &\cdot \left[ \alpha_1 \log \left| \frac{\{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 + d/2)^2 \} \{ \alpha_1^2 + (\alpha_4 + d/2)^2 \}}{\{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 - d/2)^2 \} \{ \alpha_1^2 + (\alpha_4 - d/2)^2 \}} \right| \right. \\ &- \left. \alpha_3 \log \left| \frac{\{ \alpha_3^2 + (\alpha_2 + d/2)^2 \} \{ \alpha_3^2 + (\alpha_4 + d/2)^2 \}}{\{ \alpha_3^2 + (\alpha_2 - d/2)^2 \} \{ \alpha_3^2 + (\alpha_4 - d/2)^2 \}} \right| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\sigma &= \frac{1}{(x+1)d} \\ &\cdot \left[ \alpha_2 \log \left| \frac{\{ \alpha_1 + d/2 \}^2 + \alpha_2^2 \} \{ (\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_2^2 \}}{\{ (\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_2^2 \} \{ (\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_2^2 \}} \right| \right. \\ &- \left. \alpha_4 \log \left| \frac{\{ (\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_4^2 \} \{ (\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_4^2 \}}{\{ (\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_4^2 \} \{ (\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_4^2 \}} \right| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\sigma &= \frac{2}{(x+1)d} \\ &\cdot \left[ \frac{x}{2} \left\{ \left( \alpha_1 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| \right. \right. \\ &- \left. \left( \alpha_1 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \alpha_3 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| \\
 & - \left( \alpha_3 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| \Big\} \\
 & + (\chi - 1) \left\{ \alpha_4 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_4 d}{\alpha_1^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right] \right. \right. \\
 & + \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_4 d}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right] \Big) \\
 & - \alpha_2 \left( \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_2 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right. \\
 & \left. \left. + \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha_2 d}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right] \right) \right\} \\
 \Psi_{\sigma}^{pkj} &= \frac{1}{d} \int_{y_1-d/2}^{y_1+d/2} \widehat{\Psi}_{\sigma}(x_k, y_k; x_j, \xi) d\xi, \quad \Psi = \mathbf{L}, \mathbf{M} \\
 \overline{\Psi}_{\sigma}^{pkj} &= \frac{1}{d} \int_{x_1-d/2}^{x_1+d/2} \widehat{\overline{\Psi}}_{\sigma}(x_k, y_k; \xi_j, y_j) d\xi, \quad \overline{\Psi} = \mathbf{N}, \mathbf{O} \\
 \widehat{\mathbf{L}}_{\sigma} &= \frac{1}{(\chi+1)} \left[ 2yy_0 \left\{ \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} - (T_1 + U_1) \frac{1}{rr_0} - (V_1 + W_1) \frac{r_0}{r} \right\} \right. \\
 & + (\chi - 1) \left\{ - \frac{\alpha_2^2}{A_{12}^2} + \frac{\alpha_2^2}{A_{32}^2} - \frac{\alpha_4^2}{A_{14}^2} + \frac{\alpha_4^2}{A_{34}^2} \right. \\
 & \left. + (R_1 + S_1) y_0 \frac{r}{r_0} + (P_1 + Q_1) y_0 \frac{r_0}{r} \right\} \\
 & \left. + \frac{1}{4} (\chi - 1)^2 \log \left| \frac{D(-x_0, -y_0) G(-x_0, y_0)}{B(x_0, -y_0) C(x_0, y_0)} \right| \right] \\
 \widehat{\mathbf{M}}_{\sigma} &= \frac{1}{(\chi+1)} \left[ - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}} \right. \\
 & + 2yy_0 \left\{ 2 \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}} \right) \right. \\
 & \left. + (T_2 + U_2) \frac{1}{rr_0} + (V_2 + W_2) \frac{r_0}{r} \right\} \\
 & + \chi \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{14}} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{12}} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{34}} - \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{32}} \right) \\
 & - (\chi + 1) (R_2 + S_2) y_0 \frac{r}{r_0} \\
 & - (\chi - 1) (P_2 + Q_2) y \frac{r_0}{r} \\
 & \left. - \frac{1}{2} (\chi^2 - 1) (\Theta_B + \Theta_C - \Theta_D - \Theta_C) \right] \\
 \widehat{\mathbf{N}}_{\sigma} &= \frac{1}{(\chi+1)} \left[ - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}} \right. \\
 & + 2yy_0 \left\{ 2 \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2} + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2} + \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} \right) \right. \\
 & \left. + (T_2 - U_2) \frac{1}{rr_0} + (W_2 - V_2) \frac{r_0}{r} \right\} \\
 & + \chi \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{14}} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{12}} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{34}} - \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{32}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (\chi - 1) (S_2 - R_2) y_0 \frac{r}{r_0} \\
 & + (\chi + 1) (P_2 - Q_2) y \frac{r_0}{r} \\
 & + \frac{1}{2} (\chi^2 - 1) (\Theta_B - \Theta_C + \Theta_D - \Theta_C) \Big] \\
 \widehat{\mathbf{O}}_{\sigma} &= \frac{1}{(\chi+1)} \left[ 2yy_0 \left\{ - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} + (T_1 - U_1) \frac{1}{rr_0} + (W_1 - V_1) \frac{r_0}{r} \right\} \right. \\
 & + (\chi + 1) \left\{ \frac{\alpha_1^2}{A_{14}} + \frac{\alpha_4^2}{A_{34}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} \right. \\
 & \left. + (S_1 - R_1) y_0 \frac{r}{r_0} + (P_1 - Q_1) y \frac{r_0}{r} \right\} \\
 & \left. + \frac{1}{4} (\chi + 1)^2 \log \left| \frac{C(x_0, y_0) G(-x_0, y_0)}{B(x_0, -y_0) D(-x_0, -y_0)} \right| \right] \\
 \mathbf{U}_{\sigma y} &= \{ \chi r - (x^2 + y^2 - a^2)/r \} \cos \theta - (\chi + 1) x/2 \\
 \mathbf{V}_{\sigma y} &= \{ \chi r - (x^2 + y^2 - a^2)/r \} \sin \theta - (\chi - 3) x/2 \\
 \mathbf{U}_{\sigma x} &= (\chi + 1) x/2 \\
 \mathbf{V}_{\sigma x} &= (\chi - 3) y/2 \tag{29}
 \end{aligned}$$

혼합형 하중이 작용하는 보강 균열판에 있어서 수직응력에 의한 응력세기계수를 식 (1)을 식 (28)에 대입하여 구하면 다음과 같다.

$$\frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = \sin^2 \lambda - [\mathbf{S}] [\mathbf{C}_{\sigma}]^{-1} \{ \mathbf{U}_{\sigma \sigma} \} \tag{30}$$

여기서,

$$\{ \mathbf{U}_{\sigma \sigma} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\sigma y}^k \sin^2 \lambda + \mathbf{U}_{\sigma x}^k \cos^2 \lambda \\ \mathbf{V}_{\sigma y}^k \sin^2 \lambda + \mathbf{V}_{\sigma x}^k \cos^2 \lambda \end{Bmatrix} \tag{31}$$

(k = 1, 2, ..., N)

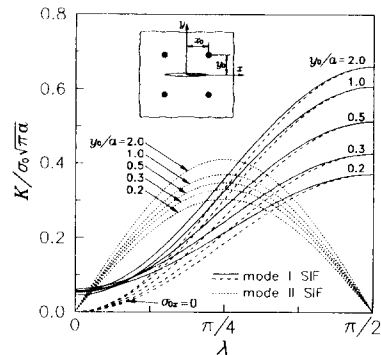


Fig. 4 Normalized SIF as a function of a loading angle (m=n=1, x₀/a=0.8).



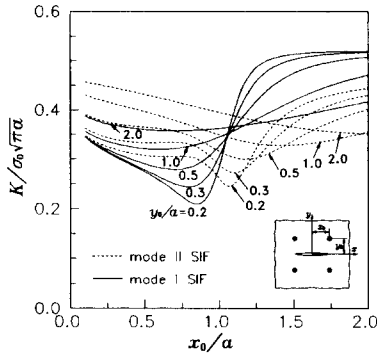


Fig. 5 Normalized SIF as a function of the joining spot position ( $m=n=1, \lambda=\pi/4$ ).

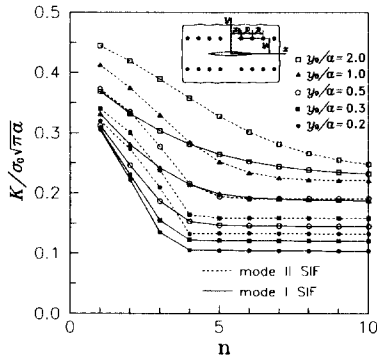


Fig. 6 Normalized SIF as a function of the number of spots ( $m=1, p/a=0.3, x_0=p, \lambda=\pi/4$ ).

### 3. 검토 및 고찰

이하의 계산에서는  $\gamma=1, \nu=0.3, d/a=0.2$ 를 사용하였다.

$\lambda=0$ 인 경우, 식 (27)과 식 (30)으로부터 본 연구의 해는 기존의 문헌<sup>(18)</sup>과 일치한다.

Fig. 4는 접합점 행(row)의 수  $m$ 은 1이고 접합점 열(column)의 수  $n$ 이 1인 경우 균열에 대한 하중의 경사각  $\lambda$ 에 따른 응력세기계수를 나타낸 것이다. 모드 I 응력세기계수 중 실선을 보면  $\lambda$ 가  $\pi/2$ 에서 최고 값을 보이는 한편,  $\lambda=0$ 에서 응력세기계수가 0이 아니다. 모드 I 응력세기계수 중 파선은 Fig. 1의  $\sigma_{0x}$ 가 응력세기계수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여  $\sigma_{0x}$ 를 0으로 놓고 계산한 값이다.  $\lambda$ 가 0에 가까울수록 응력세기계수에 미치는  $\sigma_{0x}$ 의 영향이 큼을 알 수 있다. 모드 II 응력세기계수는  $\lambda$ 가 0과  $\pi/2$ 에서 0이며  $\pi/4$ 에서 최고 값을 나타낸

다. 그리고 접합점이 균열면에 가까울수록 보강효과가 있음을 알 수 있다.

Fig. 5는  $m=n=1$ 일 때  $\lambda=\pi/4$ 에 대하여 접합점의 위치에 따른 모드 II 응력세기계수 변화를 나타낸다. 그림에서 접합점의  $y_0$ 거리가 작을수록, 그리고 모드 I 형은 접합점의  $x$ 거리가 균열선단 안쪽에 모드 II 형은 균열선단 바깥쪽에서 균열선단에 가까이 갈수록 낮은 응력세기계수 값을 보인다. 한편 모드 I과 모드 II의 응력세기계수 값의 크기가 비슷함을 알 수 있다.

Fig. 6은  $m=1, \lambda=\pi/4$ 일 때  $x_0$ 와  $p$ 를 같게 한 상태에서  $n$ 의 증가에 따른 응력세기계수 변화를 나타낸다. 접합점의 행(row)이 균열면에 가까울 때 접합점 갯수를 증가시켜도 보강효과에는 영향을 주지 못하는 한계 갯수가 존재함을 알 수 있다.

### 4. 결론

균열을 덮은 보강판을, 균열에 대하여 상하좌우 대칭인 임의의 위치에 점접합으로 부착하여 보강시킨 넓은 균열판이 먼 거리에서 혼합형 하중을 받을 때 균열에 발생하는 응력세기계수를 구하는 이론적 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 보강된 균열판이 혼합형 하중을 받는 경우에 대한 응력세기계수 식을 유도하였다.
- (2) 접합점의 위치는 모든 접합점들이 균열면에 가까울수록 보강효과가 커지는데 그중 한 점이 균열선단 안쪽에서 가까워지면 모드 I 응력세기계수를 감소시키며 균열선단 바깥에서 가까워지면 모드 II 응력세기계수를 감소시킨다.
- (3) 접합점이 균열면에 가까운 경우 최적의 접합점 갯수가 존재한다.
- (4) 균열면과 같은 방향으로 인장하중을 줄 경우에도 모드 I 응력세기계수는 존재한다.

### 참고문헌

- (1) Chang, J. B. and Rudd, J. L., 1984, "Damage Tolerance of Metallic Structures," *ASTM STP 842*, pp. 1~2.
- (2) MIL-A-83444, 1974, *Damage Tolerance Design Requirements for Aircraft Structures*, USAF.
- (3) Advisory Circular, AC 25.571-1A, 1986, *Damage Tolerance and Fatigue Evaluation of Struc-*

- ture, FAA.
- (4) Poe, C. C., Jr., 1971, "Stress-Intensity Factor for a Cracked Sheet with Riveted and Uniformly Spaced Stringers", *NASA TR R-358*.
  - (5) Swift, T., 1978, "Fracture Analysis of Adhesively Bonded Cracked Panels," *Trans. ASME, J. Engng Mat. and Tech.*, Vol. 100, pp. 10~15.
  - (6) Chandra, R. and Guruprasad, K., 1987, "Numerical Estimation of Stress Intensity Factors in Patched Cracked Plates," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 27, pp. 559~569.
  - (7) Sethuraman, R. and Maiti, S. K., 1989, "Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors for a Crack-Stiffened Panel," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 33, pp. 355~369.
  - (8) Chue Ching-Hwei and Wang Shang-Chih, 1994, "Application of Bonded Patch and Sleeve to Cracked Hole Repair under Biaxial Load," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 48, No. 4, pp. 515~522.
  - (9) Bloom, J. M. and Sanders, J. L., Jr., 1966, "The Effect of a Riveted Stringer on the Stress in a Cracked Sheet," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 561~570.
  - (10) Swift, T., 1984, "Fracture Analysis of Stiffened Structures," *Damage Tolerance of Metallic Structures; Analysis Method and Application, ASTM STP 842*, pp. 66~107.
  - (11) Chandra, R., Murthy, M. V. V., Ramamurthy, T. S. and Rao, A. K., 1985, "Analytical Estimation of Stress Intensity Factors in Patched Cracked Plates," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 21, pp. 479~494.
  - (12) Utukuri, M. and Cartwright, D. J., 1991, "Stress Intensity Factors for a Crack near Finite Boundaries in Multiply Stiffened Sheets," *Theor. Appl. Fracture Mech.*, Vol. 15, pp. 257~266.
  - (13) Jones R. and Callinan, R. J., 1979, "Finite Element Analysis of Patched Cracks," *J. Struct. Mech.*, Vol. 7, pp. 107~130.
  - (14) Heller, M., Jones, R. and Williams, J. F., 1989, "Numerical Analysis of Bonded Repairs for Fastener Holes with Three-Dimensional Cracks," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 33, No. 1, pp. 81~90.
  - (15) Young, A., Rooke, D. P. and Cartwright, D. J., 1992, "Analysis of Patched and Stiffened Cracked Panels Using the Boundary Element Method," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 29, No. 17, pp. 2201~2216.
  - (16) Lin Chien-Chang, Chu Ru-Chu and Lin Yee-Shown, 1993, "A Finite Element Model for Single Sided Crack Patchings," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 46, No. 6, pp. 1005~1021.
  - (17) MIL-HDBK-5C, 1976, *Metallurgical Joints*, USAF.
  - (18) 이강용, 김옥환, 1997, "점접합에 의하여 판재로 보강된 균열판의 수직응력에 의한 응력세기 계수," 대한용접학회, 제15권, pp. 55~65.
  - (19) Muskhelishvili, N. I., 1975, *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Translated from the Russian by J. R. M. Radok, 4th Ed.
  - (20) Erdogan, F., 1962, "On the Stress Distribution in Plates with Collinear Cuts under Arbitrary Loads," *Proc. 4th. US. Nat. Congr. of Appl. Mech. ASME*, Vol. 1, pp. 547~553.