

## 균질화기법을 이용한 WFC의 등가물성치 산출

장지현\* · 윤민우\* · 이진희\*\*

(1997년 7월 3일 접수)

### Computation of Equivalent Material Properties of Woven Fabric Composites Using Homogenization Technique

Jihyun Jang, Minwoo Yoon and Jinhee Lee

**Key Words :** Woven Fabric Composite(직물복합재), Homogenization(균질화기법), Material Properties(등가물성치)

#### Abstract

Reliable three-dimensional models of woven fabric composites had scarcely been proposed for their geometric complexity. Simplified models, mostly one- or two-dimensional, currently used are not considered effective enough because of their oversimplifications. In this paper, the equivalent thermal conductivities and elasticity properties of woven fabric composites are computed using homogenization technique. The computational results show that the strength and thermal conductivity linearly increase with fiber volume fraction and that the variations of undulation of fibers has little effect on equivalent material properties. Homogenization technique is proved useful in the study of woven fabric composites and may find a lot more applications in the area.

#### 기 호 설 명

- $E_{ijmn}^H$  : 균질화된 탄성계수 텐서
- $x_j$  : Macroscale 좌표계
- $y_j$  : Microscale 좌표계
- $x_k^{pq}$  : Microscale 매개변수
- $V_f$  : 부피비 (fiber volume fraction)
- $h$  : 단위구조의 높이
- $a$  : 직물의 폭
- $k_{ij}^H$  : 균질화된 열전도계수텐서
- $\lambda$  : Lamé constant ( $E\nu/(1-2\nu)(1+\nu)$ )
- $G$  : Shear modulus

#### 1. 서 론

최근 들어 높은 강도를 갖는 복합재료(composite material)에 많은 관심이 모아지고 있다. 복합재료는 단일재료보다 무게에 따른 강도와 강성이 높기 때문에 무게 대비 강도(strength-to-weight)와 무게 대비 강성(stiffness-to-weight)이 요구되는 항공기, 자동차, 건축 구조물 등에 널리 이용되고 있다. 복합재료 중에서 방향에 따라 다르게 요구되는 강도를 만족시키기 위하여 단일 또는 여러 방향으로 다양한 재료의 섬유(fiber)를 사용하여 보강하는 경우가 있는데, 특히 woven fabric composites(WFC)는 미세한 파형을 가진 두 방향의 fiber가 서로 얽혀 수지(resin)에 덮혀있는 구조로 되어 있다. WFC를 이용하여 복합구조물을 설계하기 위해

\*회원, 홍익대학교 대학원 기계설계학과

\*\*회원, 홍익대학교 기계설계학과

서는 WFC의 물성치에 대한 연구가 필수적이다. 이를 위하여 지금까지의 WFC에 대한 연구들이 실험에 의존하는 것이 일반적인 추세였으나, 최근 컴퓨터의 발달에 힘입어 해석적인 측면에서의 접근도 많이 시도되고 있다. 그러나 해석적인 연구의 경우, WFC의 기하학적 복잡성으로 인하여 대부분의 연구자들이 WFC를 1차원 또는 2차원으로 단순화하여 분석하는 경향을 보이고 있다.

Dasgupta<sup>(1, 2)</sup>는 균질화기법을 사용하여 WFC의 해석을 시도하였다. 그러나 in-plane 모델과 out-of-plane 모델이라는 두 개의 2차원 모델링을 통하여 WFC를 단순화하고, 주기적 경계조건(periodic boundary condition)을 고려하여 설정되어야 될 단위구조의 1/4 만을 대상으로 하여 균질화기법을 적용하여 WFC의 thermomechanical 거동에 대한 해석을 시도하였기 때문에 해석과정과 그 결과에 문제점이 있다고 보여진다. Zang과 Harding<sup>(3)</sup>은 WFC에서 한 방향에 대한 fiber만의 기복성을 고려하여 단순화된 모델링을 수행하였고, 유한요소법과 변형률에너지의 등가원칙을 적용하여 one-ply plain weave 복합재료의 탄성계수를 산출하였다. Whitcomb<sup>(4)</sup>는 3차원 유한요소법을 이용하여 삼파동(tow waviness)의 변화에 따른 강성계수, Poisson's ratio 그리고 변형률의 분포를 계산하였다. 그는 WFC에 한 방향의 힘이 가해진다고 가정하고, 그에 따른 물성치들의 변화와 변형률 분포를 도시화하였다. Falzon, Herszberg와 Karbhari<sup>(5)</sup>는 기존의 classical laminate theory(CLT)에서 compaction이 주어질 때 겹과 겹사이의 상호작용으로 인하여 fiber 형상이 영향을 받기 때문에 계산된 물성치는 신뢰할 수 없는 결과를 산출하게 된다고 간주하고, 기존의 CLT를 확장하여 WFC 내부의 resin 변화를 고려하여 compaction 문제를 분석하였다.

이와 같이 여러 연구자들이 WFC 연구에서 기하학적 복잡성때문에 대상을 과도하게 단순화하였고, 1차원 또한 2차원 모델을 통하여 접근하는 방식을 취하였다. 이에 비해 Lee et al.<sup>(6)</sup>은 균질화기법을 사용하여 일반적인 복합구조체의 분석에 있어 모델의 기하학적 단순화를 거치지 않고 주어진 3차원 단위구조에 대하여 직접적인 3차원 모델링의 가능성을 제시하였다.

본 연구에서는 균질화기법을 사용하여 resin속에서 다수의 fiber가 모여 있는 형태를 가진 WFC 단

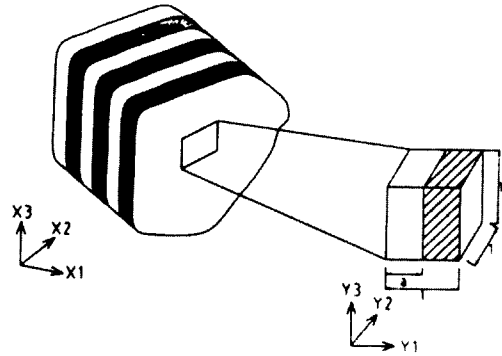


Fig. 1 Simple laminar structure and its unit cell.

위구조에 대한 3차원 모델링을 통하여 등가물성치를 계산하는 방법에 대하여 논의하고자 한다.

## 2. 균질화기법

균질화기법의 기본 개념은 복합구조체의 기하학적 최소단위인 단위구조에 대하여 가상변위를 이용한 유한요소법에 이중좌표계법(two scale method)을 도입한 것으로, 선형탄성문제에 대한 균질화기법의 자세한 유도는 Lee et al.<sup>(6, 7)</sup>에서 찾아 볼 수 있다.

균질화기법을 응용한 가장 간단한 예로서 Fig. 1과 같은 단위구조의 경우를 생각할 수 있다. Fig. 1의 단위구조는 미소좌표계  $y_1, y_2, y_3$  방향으로 크기가 각각 1인 단위구조에서 서로 다른 두 개의 물질이  $y_1=a$ 를 경계로 접합되어 있는 경우를 나타내고 있다. Fig. 1과 같은 단순한 경우에 대해서는 Lee et al.<sup>(6, 7)</sup>에 의해 유도된 식

$$\int_Y E_{ijmn} \frac{\partial x_m^{pq}}{\partial y_n} \frac{\partial v_i^j}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijpq} \frac{\partial v_i^j}{\partial y_j} dY$$

$$= x_m^{pq}(\underline{y}) = x_m^{pq}(\underline{y} + \underline{Y}) \quad (1)$$

을 대신하여 이와 동등한 편미분방정식

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl} \frac{\partial x_k^{pq}}{\partial y_l} - E_{ijpq} \right) = 0$$

$$x_m^{pq}(\underline{y}) = x_m^{pq}(\underline{y} + \underline{Y}) \quad (2)$$

으로부터 미소좌표계 변수  $x_k^{pq}$ 의 해를 얻을 수 있다.

$$E_{ijmn}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( E_{ijmn} - E_{ijpq} \frac{\partial x_k^{mn}}{\partial y_q} \right) dY \quad (3)$$

**Table 1** Elastic properties of materials constituent for simple unit cell of Fig. 1.

	Fe	Al
E	200 GPa	72 GPa
$\nu$	0.3	0.33

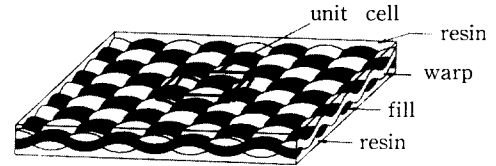
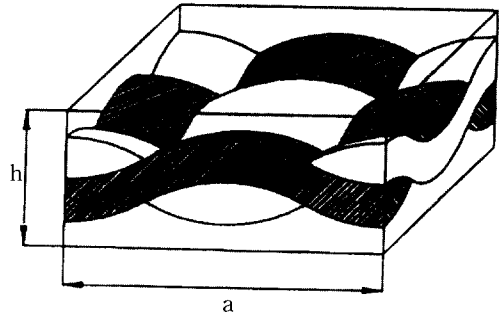
**Table 2** Comparisons between mechanics of materials and homogenization for simple unit cell of Fig. 1.

	Mechanics of materials	Homogenization
$E_1$	136 GPa	136 GPa
$E_2$	105 GPa	114 GPa
$G_{12}$	40.72 GPa	40 GPa
$\nu_{12}$	0.315	0.318

식 (1) 또는 식 (2)으로부터 얻은  $x_k^{pq}$ 를 식 (3)에 대입하여 단위구조의 등가탄성계수 텐서를 산출한 결과에 응력-변형률관계를 적용하여 얻은 등가물성치가 부록 A에 주어져 있다. 또한 비교를 위하여 같은 단위구조에 대하여 재료역학을 이용하여 구한 등가물성치가 부록 B에 주어져 있다.

Fig. 1의 단위구조에 대하여 두 개의 기본재료를 각각 철과 알루미늄으로 설정하고  $a=0.5$ 로 하여 균질화기법과 재료역학의 방식으로 산출한 단위구조의 등가탄성계수 값과 등가 Poisson's ratio 값을 계산하였다. Table 1에는 철과 알루미늄의 물성치가 주어져 있고, Table 2에는 두 가지 방식으로 계산한 결과 값이 비교되어 있다.

Table 2의 비교를 보면 재료역학을 사용한 해석적 방법과 균질화기법을 사용하여 계산한 결과가 상당히 근접함을 알 수 있다. 그러나 재료역학의 방법을 사용한 등가물성치 산출은 Fig. 1과 같은 극도로 단순한 모델에 한하여 적용할 수 있는 반면, 기하학적으로 복잡한 복합구조체에는 적용할 수가 없는 단점이 있다. 이에 반하여 균질화기법은 복잡한 기하학적 형태를 갖는 복합구조체에도 어렵지 않게 적용되며, 이의 계산에 필요한 자유도도 다른 방식에 비하여 현저히 줄일 수 있는 장점을 갖고 있다.

**Fig. 2(a)** Plain weave composites.**Fig. 2(b)** Unit cell of plain weave composites.

### 3. 직물복합재

WFC(woven fabric composites)는 Fig. 2(a)에서 보는 바와 같이 크게 fiber와 resin 두 부분으로 나누어지고, resin속에서 여러 개의 fiber가 꼬인 파형모양을 가진 기하학적 형상을 갖고 있다. 복합재료를 강화하기 위해 쓰이는 fiber로서는 제조과정의 편의성때문에 glass fiber가 널리 사용되고 있다. 복합재료에 쓰이는 glass fiber 중에서 대표적인 것으로 S-glass와 E-glass를 들 수 있는데, S-glass는 E-glass 보다 인장력과 탄성계수가 높지만 제조 비용이 비싸 널리 사용되지 않는다. 또한 E-glass와 S-glass의 재료적인 특성은 등방성으로 알려져 있고, fiber 방향에 대한 강도를 높이기 위해서는 T-300과 같은 비등방성 성질을 갖는 재료를 사용하는 것이 일반적이다. Resin의 역할은 복합재료 내에서 fiber들을 결합시키고, 외부의 손상으로부터 fiber를 보호하고, 구조물에 가해진 힘을 fiber로 전달시키는 역할을 한다. 실질적으로 resin이 WFC의 강도에 끼치는 영향은 fiber에 의한 영향보다 훨씬 작은 것으로 알려져 있다.

WFC내에서 서로 다른 방향의 fiber사이의 결합상태가 단순한 접촉인가 또는 화학적인 결합상태로 보는가에 따라 이의 모델링이 달라질 수 있다. Fiber사이의 결합상태가 단순한 접촉이라고 볼 경

우 접촉면에서 fiber사이의 상대변위가 가능하지만 화학적인 결합상태로 볼 경우 하나의 연속체로 간주할 수 있다. 본 연구에서는 Fig. 2(a)에서 보는 바와 같이 resin과 두 방향의 fiber가 있는 WFC에서 fiber사이의 결합상태가 화학적인 결합인 경우를 고려한다. Fig. 2(a)에서 세로방향으로 뻗어 있는 fiber를 날실(warp)라고 하고, warp에 십자형으로 엇갈리게 뻗어 있는 fiber를 씨실(fill, weft)이라고 한다. Warp와 fill은 각각 파형 모양의 기복성을 갖고 직조되고 이에 resin이 입혀져 Fig. 2(a)와 같은 WFC를 형성한다.

### 4. WFC의 등가물성치

두 방향의 fiber가 기복성과 주기성을 갖고 Resin속에서 꼬여 있는 WFC의 단위구조가 Fig. 2(b)에 주어져 있다. WFC의 해석재료로 fiber/resin이 각각 E-glass/epoxy와 T-300/epoxy인 두 가지 경우를 상정하였는데, Table 3에 epoxy, E-glass와 T-300의 물성치가 각각 주어져 있다. Resin보다는 fiber가 WFC의 강도와 강성을 강화하는 역할을 하기 때문에 WFC에서 fiber가 차지하는 비율이 등가물성치의 변화에 영향을 준다. 따라서 본 논문에서 사용되는 부피비(fiber volume fraction)는 단위구조에서 fiber의 부피가 차지하는

비율을 뜻하는데, WFC의 해석에 있어 중요한 변수 중의 하나가 된다. Fig. 2(b)에서 볼 수 있는 것과 같이 단위구조높이  $h$ 와 yarn의 폭  $a$ 에 의해 WFC의 전반적인 구조가 결정된다. 따라서 WFC의 연구에서 또 다른 주요한 변수로서  $h/a$  비를 들 수가 있다. 단위구조에서  $h/a$  비에 변화를 줄 수 있도록  $h$ 와  $a$ 를 설정하고, 각각의  $h/a$  비에 대하여 부피비를 변화시킨 각각의 경우에 대한 유한요소격자를 생성하고 식 (3)의 균질화기법을 적용하여 등가탄성계수를 구하였다.

Fiber/resin이 E-glass/epoxy로 주어지고  $h/a$  비를 0.1, 0.2, 0.4로 변화시킨 각각의 경우에 대해 부피비를 변화시켜 가며 균질화기법을 적용시켜 WFC의 등가탄성계수를 구한 결과가 Fig. 3에 주어져 있다. 또한 균질화기법에서는 Poisson's ratio가 함께 계산될 수 있어 그 결과가 Fig. 4에 나타나 있다. Fig. 3은  $h/a$  비의 변화에 따른 등가탄성계수의 값은 큰 변화를 보이지 않는 반면 부피비가 증가함에 따라 강성이 증가함을 보이고 있다. 주어진 단위구조가  $y_1$  방향과  $y_2$  방향에 대하여 무차별하기 때문에 균질화기법을 적용해 산출한 등가탄성계수  $E_1$ 과  $E_2$ 의 크기는 같게 나타났다.  $E_1$ 은 계산된 전 구간에서 부피비에 따라 선형적인 증가를 보이고 있고,  $E_3$ 는 부피비 0.2에서 0.6까지는 상대적으로 둔감한 변화를 하다가 0.6이상에서는 급격히 증가하는 경향을 보이고 있다.  $E_3$ 는  $E_1$ 과  $E_2$ 에

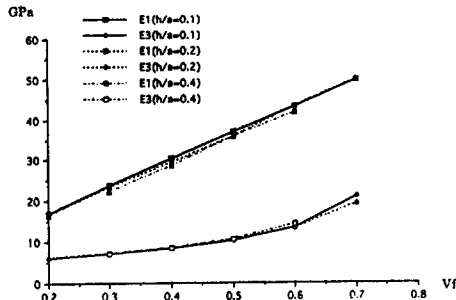


Fig. 3 Equivalent elastic properties, E-glass/epoxy.

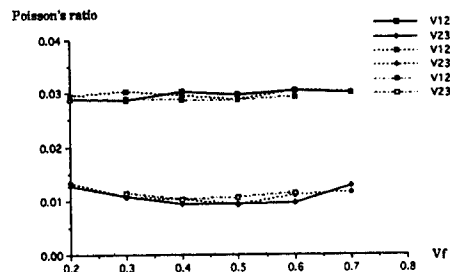


Fig. 4 Poisson's ratio, E-glass/epoxy.

Table 3 Elastic properties of materials constituent for WFC.

Material	Elastic properties				
	$E_L$ (GPa)	$E_T$ (GPa)	$G_{LT}$ (GPa)	$G_{TT}$ (GPa)	$\nu_{LT}$
Epoxy (resin)	3.5	3.5	1.3	1.3	0.35
T-300 (fiber)	230.0	40.0	24.0	14.3	0.26
E-glass (fiber)	72.0	72.0	27.7	27.7	0.30

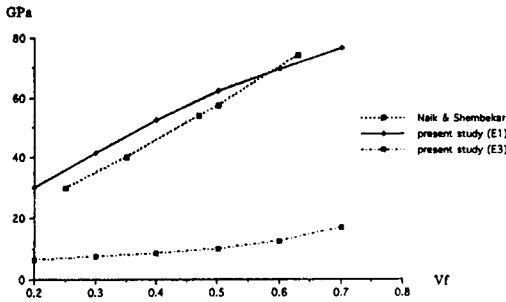


Fig. 5 Equivalent elastic properties at  $h/a=0.1$ , T-300/epoxy.

비해 크기가 작을뿐더러 값의 변화도 작는데, 이것은 강도와 강성이 fiber 방향으로는 큰 반면 높이 방향으로는 강성이 작은 WFC의 특징을 잘 보여주고 있다. Fig. 4는 WFC에서 Poisson's ratio가  $h/a$  비의 변화나 부피비의 변화에 큰 영향을 받지 않음을 보이고 있다.

두 번째 경우로서 fiber/resin이 T-300/epoxy로 주어지고  $h/a$  비가 0.1인 경우에 대한 WFC의 등가탄성계수를 구한 결과가 Fig. 5에 주어져 있다. Fig. 5에는 비교를 위하여 Naik와 Shembekar<sup>(9-12)</sup>의 단순화된 모델을 사용하여 산출한 등가탄성계수가 주어져 있다. 균질화기법을 적용하여 산출한 등가탄성계수가 부피비가 증가함에 따라 거의 선형적으로 커지고 있음을 보여주는데, 본 연구의 계산결과와 Naik-Shembekar의 방법을 이용한 결과가 비슷한 경향을 보이고 있다. 앞서의 경우와 마찬가지로 부피비에 따른  $E_1$ 과  $E_2$ 의 값이 큰 변화율을 갖는 선형적인 변화를 보인 반면,  $E_3$ 는 부피비의 변화에 상대적으로 둔감함을 보이고 있음을 알 수 있다.

Naik와 Shembekar는 WFC의 복잡한 형상을 parallel 모델과 series 모델, 또는 이들의 조합 등의 여러 개의 1차원 및 2차원 모델로 단순화하여 해석하였다. 그러나 Figs. 3~5에서 보는 바와 같이 균질화기법을 사용하여 3차원 모델링을 할 경우, 주기적인 경계조건 외에 기하학적 형상에 대한 어떠한 가정도 부과되지 않고 계산을 수행할 뿐만 아니라 등가탄성계수와 함께 등가 Poisson's ratio도 함께 얻을 수 있어 보다 현실적인 모델링기법이며, 산출된 등가물성치를 이용하여 WFC의 응력상태에 대한 예측을 할 수 있어 복합구조체의 실제에 도움을 줄 수 있다.

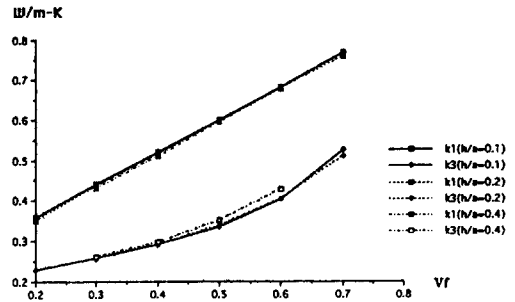


Fig. 6 Equivalent thermal conductivities, E-glass/epoxy.

균질화기법은 탄성학적 측면뿐만 아니라 열전달 해석에서도 유용하게 적용될 수 있다. 균질화기법을 이용하면 복합재료의 열전달문제에서 적용이 가능한 등가열전도계수 텐서를 다음과 같은 식에서 얻을 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$k_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( k_{ij} - k_{ik} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \right) dY \quad (4)$$

식 (4)를 사용하여 각각  $h/a=0.1, 0.2, 0.4$ 이고, E-glass/epoxy에 대하여 WFC의 등가열전도계수를 계산하여 그 결과가 Fig. 6에 주어져 있다. Fig. 6은 WFC의 열전달계수가  $h/a$  비에는 그다지 영향을 받지 않는 반면 부피비의 증가에 따라 선형적으로 증가하는 경향을 보이고 있는 것을 알 수 있다. 산출된 등가열전도계수  $k_1$ 과  $k_2$ 가 앞서 계산된 등가탄성계수와 동일하게 단위구조가  $y_1$  방향과  $y_2$  방향에 대하여 무차별하기 때문에 같게 나타났다.

균질화기법을 적용하여 WFC에 대한 3차원 모델링을 수행하고 등가탄성계수, 등가열전도계수 등의 등가물성치를 산출하였다. 산출과정에서 3차원 모델링을 수행하였기 때문에 WFC의 기하학적 형상의 단순화에 따른 과도한 가정이 없었다. WFC의 강도, 강성, 그리고 열전도의 계수는  $h/a$  비에 대한 영향이 작게 나타났으며, fiber의 부피비에 따라 선형적 비례관계가 있음을 알 수 있었다.

### 5. 결 론

WFC의 등가물성치 계산에 있어서 기존의 연구와 비교하여 본 연구의 장점을 다음과 같은 점에서 찾을 수 있다. 지금까지 WFC에 대한 연구는 실험적 연구가 대부분이었고, 이론적인 연구에서는 대

상물의 기하학적 복잡성 때문에 단순화된 1차원 또는 2차원 모델을 만들어 WFC의 특성을 연구하여 왔지만 적절한 3차원 모델을 제시하지 못하였다. 본 연구에서는 WFC의 분석에 있어 기하학적 단순화를 거치지 않고, 균질화기법을 이용한 유한요소 3차원 모델링을 수행하였다. 이를 이용하여 등가열전도계수, 등가탄성계수 등의 등가물성치를 계산하였다. WFC의 강도, 강성, 그리고 열전도계수는 직물의 폭과 단위구조의 높이의 변화에 의한 영향이 작게 나타났으며, 섬유 부피비와 선형적인 비례 관계가 있음을 알 수 있었다. 섬유방향의 등가탄성계수는 섬유 부피비 증가에 따라 큰 변화율을 갖는 선형적인 변화를 보였고, 단위구조의 높이 방향의 등가탄성계수는 섬유 부피비의 증가에 상대적으로 둔감한 변화를 보였다. 또한 Poisson's ratio는 직물의 폭과 단위구조의 높이변화, 그리고 섬유의 부피비 증가에 큰 변화를 보이지 않았다. 균질화기법은 다른 수치 해석적 방법과 달리 복잡한 기하학적 형상을 갖는 복합구조체에서 반복되는 단위구조 부분만을 모델링하여 해석하기 때문에 유한요소 분할과 계산에 있어 상당히 많은 노력과 시간을 줄이면서 복합재료의 등가물성치를 얻을 수 있도록 하여준다. 균질화기법을 이용하여 얻은 등가물성치는 복합구조물 설계에 많은 도움을 줄 수 있다.

참고문헌

(1) Dasgupta, A. and Agarwal, R. K., 1992, "Orthotropic Thermal Conductivity of Plain-Weave Fabric Composites Using a Homogenization Technique," *J. Com. Mat.*, Vol. 26, pp. 2736~2758.

(2) Dasgupta, A. and Bhandarkar, S. M., 1994, "Effective Thermomechanical Behavior of Plain-Weave Fabric Reinforced Composites Using Homogenization Theory," *J. Eng. Mat. and Tech.* Vol. 116, pp. 99~105.

(3) Zhang, Y. C. and Harding, J., 1990, "A Numerical Micromechanis Analysis of the Mechanical Properties of a Plain Weave Composite," *Computers and Structures*, 36:839.

(4) Whitcomb, J. D. 1989. "Three Dimensional Stress Analysis of Plain Weave Composite," *Paper Presented at ther 3rd Symposium on*

*Composite Materials : Fatigue and Fracture*, Orlando, FL.

(5) Paul J. Falzon and Israel Herszberg and Vistasp M. Karbhari, 1996. "Effects of Compaction on the Stiffness and Strength of Plain Weave Fabric RTM Composites," *J. Com. Mat.*, Vol. 30, pp. 1210~1247.

(6) Lee, J., Choi. J. B. and Choi, K., 1996, "Application of Homogeniation FEM Analysis to Regular and re-entrant Honeycomb Structures," *J. Mat. Sci.*, Vol. 31, pp. 4105~4110.

(7) 이진희, 1995, "균질화기법을 이용한 다공평판의 단순화된 응력해석," 전산구조공학회, 제8권 제3호, pp. 51~58.

(8) 이진희, 이봉래, 1994, "균질화기법을 이용한 복합재료의 등가열전도계수의 계산," 대한기계학회논문집, 제18권, 제5호, pp. 1245~1252.

(9) Naik, N. K. and P. S. Shembekar. 1992. "Elastic Behavior of Woven Fabric Composites : I - Lamina Analysis," *J. Com. Mat.*, 26(15), 2196-2225

(10) Shembekar, P. S. and Naik., N. K., 1992. "Elastic Behavior of Woven Fabric Composites : II - Lamina Analysis," *J. Com. Mat.*, 26(15), pp. 2226~2246

(11) Naik, N. K. and Shembekar, P. S., 1992, "Elastic Behavior of Woven Fabric Composites : III-Lamina Analysis," *J. Com. Mat.*, 26(17), pp. 2252~2541

(12) Naik, N. K., 1994. *Woven Fabric Composites*, Pennsylvania : Technomic publishers, pp. 43~119.

부록 A

Fig. 1의 단순구조에 균질화기법을 적용시켜 산출한 등가탄성계수

$$E_{1111}^H = \frac{1}{\frac{a}{\lambda_1 + 2G_1} + \frac{1-a}{\lambda_2 + 2G_2}}$$

$$E_{2222}^H = a(\lambda_1 + 2G_1) + (1-a)(\lambda_2 + 2G_2) - \frac{a(1-a)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{a(\lambda_1 + 2G_1) + (1-a)(\lambda_2 + 2G_2)}$$

$$E_{3333}^H = E_{2222}^H$$

$$E_{1122}^H = \frac{a\lambda_1(\lambda_2 + 2G_2) + (1-a)\lambda_2(\lambda_1 + 2G_1)}{a(\lambda_2 + 2G_2) + (1-a)(\lambda_1 + 2G_1)}$$

$$E_{1133}^H = E_{1122}^H$$

$$E_{2233}^H = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2 - \frac{a(1-a)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{a(\lambda_2 + 2G_2) + (1-a)(\lambda_1 + 2G_1)}$$

$$E_{2323}^H = aG_1 + (1-a)G_2$$

$$E_{1313}^H = E_{1212}^H = \frac{1}{\frac{a}{G_1} + \frac{1-a}{G_2}}$$

한 등가탄성계수

$$E_1 = (1-a)E_f + aE_m$$

$$E_2 = E_3 = \frac{E_f E_m}{(1-a)E_m + aE_f}$$

$$\nu_{12} = \nu_{31} = (1-a)\nu_f + a\nu_m$$

$$\nu_{23} = \frac{\nu_f \nu_m}{(1-a)\nu_m + a\nu_f}$$

$$G_{12} = G_{31} = \frac{G_f G_m}{(1-a)G_m + aG_f}$$

$$G_{23} = (1-a)G_f + aG_m$$

## 부록 B

Fig. 1의 단순구조에 재료역학을 이용하여 계산