고체입자를 이용한 열교환기에서의 유동 및 열전달의 유한요소해석

이완술* · 윤성기** · 박상일***

(1997년 5월 21일 접수)

Finite Element Analysis of Flow and Heat Transfer In Solid Particle Moving Beds of Heat Exchanger

Wan-Sul Lee, Sung-Kie Youn and Sang-Il Park

Key Words: Solid Particle Moving Bed(고체입자 이동층), Heat Exchanger(열교환기), Gravitational Flow(중력유동), Viscous-Plastic Flow Model(점소성 유동모델)

Abstract

Numerical analysis for the flow and heat transfer in solid particle moving beds of heat exchangers is presented. The solid particle flow through the bundle of heat source tubes by the gravitational force. The heat energy is transferred through the direct contact of particles with the heat source tubes. The viscous-plastic fluid model and the convective heat transfer model are employed in the analysis. The flow field dominantly influences the total heat transfer in a heat exchanger. As the velocities of solid particles around the heat source tubes increase, the amount of heat transfer from the tubes increases. Some examples are presented to show the performance of the numerical model. The flow effect on the heat transfer is also studied through the examples.

기호 설명

$\boldsymbol{A}$: 비조합형 소성유동텐서
c_p : 체적비열
$\boldsymbol{D}$: 등방성 점도텐서
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\nu})$: 변형률도
d : 입자의 지름
e : 수렴오차
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}$: 힘벡터
g : 중력가속도
h : 부분 열전달계수
k_e : 입자의 유효 열전도도
k_g : 입자간 기체의 열전도도
L : 평면상의 거리
M : 재료의 질량행렬
m : 입자간 내부 마찰계수
N : 속도보간함수
Nu_L : 거리에 대한 평균 Nusselt수
P_{eL} : 거리에 대한 평균 Peclet수
p, q : 응력상수(stress invariant)
q : 열전달률
r_s : 입자 함유율(fractional solids content)
T : 입자온도
T_w : 열원온도
$\boldsymbol{t}$: 외부 힘
t : 시간
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$: 입자속도
w : 시험함수

*한국과학기술원 대학원 기계공학과
**회원, 한국과학기술원 기계공학과
***회원, 한국에너지기술연구소

그리스문자

α : 열확산도(thermal diffusivity)
ρ : 체적밀도
σ, τ : 응력텐서
κ : 체적 동점성도(dynamic bulk viscosity)
μ : 전단 동점성도(dynamic shear viscosity)
β : 비조합성 체적 소성 유동상수(coefficient of nonassociated volumetric plastic flow)
φ : 팽창계수(dilatancy coefficient)
ψ : 온도보간함수

상첨자

N : 가상
p : 소성
T : Transpose

하첨자

d : 편향
L : 거리
m : 평균
n : 계산단계
p : 입자

I. 서 론

고체입자를 이용한 열교환은 환경과 관련이 있는 에너지 및 화학공학분야, 광업분야, 곡물의 저장과 관련된 농업분야, 토목건축분야에서 광범위하게 사용되고 있다. 고체입자는 보통의 기체나 액체에 비하여 비중이 크고 열전도도(thermal conductivity)가 높고 비열(specific heat)이 크므로 열교환기의 매체로 사용하면 열교환 효율을 높일 수 있다. 또한 온도변화에 의한 열팽창이 작고 상 변화가 일어나지 않기 때문에 액체나 기체를 매질로 사용할 수 없는 특수한 경우에서도 효율적인 기능을 보장할 수 있다. 특히 화학적으로 안정되어서 오염될 가능성이 적고 반복 사용이 가능하므로 환경오염을 줄일 수 있는 장점이 있다.

고체입자에 전열하는 방법은 유동층(fluidized beds)이나 충전층(packed beds)에서 고체입자와 열을 가진 액체나 기체를 접촉시키는 직접전열방식과 이동층(moving beds)에서 벽면을 통하여 가열하는 간접전열방식으로 나눌 수 있다. 직접전열 방식에 대해서는 그 동안 상당한 연구가 진행되어 왔으나 간접전열방식에 대해서는 중요성에 비해 연구가 활발하지 못하였다. 특히 이동층내에서 금속관과 같은 열원을 이용한 전열방식은 연구가 부족하다.

이러한 열교환기의 설계에 있어서 중요한 열전달계수는 고체입자의 유동에 의해서 지배적인 영향을 받는다. 고체입자의 유동은 열교환이 일어나는 벽면 등의 모양에 따라 달라지므로 열교환기의 설계를 위해서는 교환기의 형상에 따른 유동의 해석이 우선되어야 한다. 따라서 열교환기의 형상에 따른 고체입자의 유동과 그에 따른 열전달 및 온도분포를 수치적으로 해석하면 실험을 통한 해석의 시간적, 재정적 손실을 줄일 수 있다.

고체입자의 유동은 곡물의 저장이나 광물의 수송, 토양 구조물의 안전도 검사 등에 자주 이용되기 때문에 그 동안 많은 연구가 이루어졌다. 고체입자의 유동을 묘사하기 위한 연속체 모델은 Jenike와 Shield[1]에 의하여 제시되었다. 이들은 유동을 입자간의 쿨롱 마찰을 가지는 강소성 비압축성 질량(rigid plastic incompressible mass)의 안정된 유동으로 기술하였다. Johanson[2]은 이를 이용하여 호퍼(hopper) 형의 통로에서의 입자의 속도분포와 응력상태를 계산하였고 실험을 통하여 검증하였다. 이에 대하여 Brennen과 Pearce[3]는 대류가속도(convective acceleration)를 유동에 대한 운동방정식에 포함함으로써 강성영역에서의 속도분포의 유일성을 보장하였다. Schaeffer[4]는 쿨롱 마찰이 Drucker-Prager의 항복조건에 의해서 주어질 때 얻어지는 항복면을 이용하면 불안정해짐을 보였다. Eibl과 Haussler[5]는 응력수준이 낮은 경우를 Kelvin형의 점탄성 유체(visco-elastic fluid)로 한정하는 점소성 모델(visco-plastic model)을 사용하여 입자가 유동하기 전의 응력상태를 결정하였고 유동영역의 경계를 정상상태에서 변형률이 없는 지점으로 정의하였다. Runesson과 Nilsson[6]은 마찰성 재료를 묘사하기 위해서 Drucker-Prager의 항복조건을 도입하였고 유동과 부피변형률 사이의 관련성을 제거하여 고체입자의 유동해석을 위한 유한요소 모델을 제시하였다.

고체입자의 이동층에서의 간접전열방식에 대한 연구는 주로 이론과 실험에 의해서 이루어 졌다. Brinn 등[7]은 길고 매끈한 관안에서 벽면과 입자간의 접촉지배흐름(contact-dominated flow) 지역에서의 열전달에 대해서 연구했고 Kurochkin[8]은 이동층 내에서 열관의 원통면과의 열전달에 대해서

여러 가지 모양의 원통모양에 대한 간단한 모델을 제시하였다. Harakas와 Beaty[9]는 입자간의 공기가 열전달에 미치는 영향에 대해서 연구하였고, Sullivan과 Sabersky[10]는 일정한 속도를 가지는 고체입자들과 평평한 외벽과의 입자의 크기에 따른 열전달계수 모델을 이론과 실험으로 제시하였다. Niegsch 등[11]은 입자의 쌓임각(angle of repose)을 이용하여 유동영역을 결정하고 간단한 연속방정식(continuity equation)으로 속도분포를 계산하였다. 입자로의 열전달량은 열원과의 직접 접촉시간에 비례한다고 보고 열원의 경계에서의 입자의 속도를 적분하여 접촉시간을 계산하여 열전달을 해석하였다. 유동과 열전달을 동시에 해석하는 시도였으나 그 접근방식에 많은 문제점을 가지고 있다. 이금배와 박상일[12]은 매끈한 관 안의 이동층과 외벽 사이의 열전달을 관내의 속도분포가 일정하다고 가정하여 연구를 수행하였다.

앞에서 살펴보았듯이 지금까지의 고체입자의 유동과 열전달에 대한 연구는 그 연관성에도 불구하고 서로 독립적으로 진행되어 왔다. 본 연구에서는 수치적인 방법을 이용하여 열교환기 내부에서의 고체입자의 유동과 열전달을 연계해서 해석함으로써 정확한 열 교환량을 계산하였다. 점소성 유체 모델(viscous-plastic fluid model)[6]을 이용하여 호퍼형의 열교환기 내에 금속관이 있을 때의 유동을 해석하여 속도분포를 계산하고 계산된 속도분포에 의한 금속관과 입자 사이의 열전달을 해석하여 교환기 내의 온도분포를 계산하였다. 또한 열교환기 내에서의 열전달량을 계산함으로써 총 유효 열전달계수(total equivalent heat transfer coefficient)와 열교환기의 효율을 수치적으로 계산하였다.

2. 해석 모델

2.1 유동해석 모델

중력장 내에서의 고체입자의 유동은 점소성 유체(viscous-plastic fluid)로 모델링하여 근사할 수 있다. 소성영역을 묘사하기 위해서 Drucker-Prager의 항복조건을 도입하였고, 체적변형비율에 대한 유동법칙으로는 비조합형 유동(non-associative flow)을 적용하였다. 유동영역의 형태와 속도분포는 경계조건, 내부 마찰각도, 중력에 의한 초기 응력상태, 점성도(viscosity) 등에 의해서 영향을 받는다.

2.1.1 점소성 유체 모델의 구성방정식

고체입자의 변형률비(rate of deformation) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u})$는 식 (2.1)과 같이 일반적인 점성부분과 소성부분으로 분리된다.

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{D}^{-1}:(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0)+\boldsymbol{d}^p \tag{2.1}$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}_0$는 유동이 없는 상태의 응력을 나타내고, $\boldsymbol{D}$는 등방성 점성행렬(isotropic viscosity)을 나타낸다.

$$\boldsymbol{D}^{-1}=\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{I}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\kappa}-\frac{1}{2\mu}\right)\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta} \tag{2.2}$$

이때 μ와 κ는 각각 전단 및 체적 동점성도(dynamic viscosity)이고, $\boldsymbol{\delta}$와 $\boldsymbol{I}$는 각각 2차 항등텐서, 4차 항등텐서이다. 변형률비의 소성부분 $\boldsymbol{d}^p$는 다음과 같은 Drucker-Prager의 부등식을 만족해야 한다.

$$(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\tau}):\boldsymbol{A}:\boldsymbol{d}^p\geq 0,\quad \forall\boldsymbol{\tau}\in B \tag{2.3}$$

여기서, B는 적합한 Cauchy 응력이 존재하는 집합이고, A는 비조합형 체적변형비율텐서로 다음과 같다.

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{3}\beta(\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta}) \tag{2.4}$$

여기서, β는 조합성(associative)을 나타내는 상수로써 $\beta=0$이면 조합형 유동의 경우이고, $\beta=\infty$이면 소성 비압축성의 경우이다. 응력상태는 점성부분만을 고려하여 계산되는 가상응력(fictious stress or trial stress) σ^N을 이용한 다음과 같은 최소화 문제(minimization problem)의 해가 된다.

$$\begin{aligned}&\min_{\tau\in B}|\boldsymbol{\sigma}^N(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{\tau}|^2_{CA}\\&=\min_{\tau\in B}[(\boldsymbol{\sigma}^N(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{\tau}):\boldsymbol{A}:\boldsymbol{D}^{-1}:(\boldsymbol{\sigma}^N(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{\tau})]\end{aligned} \tag{2.5a}$$

여기서, 가상응력텐서 $\sigma^N(d)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^N(d)&=\boldsymbol{\sigma}_0+\boldsymbol{D}:\boldsymbol{d}\\&=\boldsymbol{\sigma}_0+2\mu\boldsymbol{d}+\left(\kappa-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\delta}\end{aligned} \tag{2.5b}$$

이때 $\boldsymbol{\sigma}^N(d)-\boldsymbol{\tau}$를 $\boldsymbol{\tau}'$라고 하면 식 (2.5a)는 식 (2.5c)와 같다.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\sigma}^N(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{\tau}|^2_{CA}&=|\boldsymbol{\tau}'|^2_{CA}\\&=\frac{1}{2\mu}|\boldsymbol{\tau}'_d|^2+\frac{1+\beta}{\kappa}\boldsymbol{\tau}'^2_m\end{aligned} \tag{2.5c}$$

여기서, τ_d'는 τ'의 편향응력텐서(deviatoric stress tensor)이고, τ_m'은 τ'의 평균 수직응력(mean normal stress)이다. 입자로 이루어진 재료는 내부 마찰각도(angle of internal friction)에 의해서 항복함수가 결정된다. 결합력(cohesion)이 없는 경우의 Drucker-Prager의 항복함수는 다음과 같다.

$$F(p, q) = q - mp$$
$$p = -\sigma_m,\ q = \sqrt{\frac{3}{2}}|\boldsymbol{\sigma}_d|$$
$$m = f(\Phi)\sin\Phi,\ f(0) = 2$$
$$f(\Phi) = 18/(9 - \sin^2\Phi) \tag{2.6}$$

여기서, σ_m은 평균 수직응력, $\boldsymbol{\sigma}_d$는 편차응력텐서, Φ는 내부 마찰각도이다.

항복함수 $F(p, q)$가 등방성이라면 $\boldsymbol{\sigma}_d$는 $\boldsymbol{\sigma}_d^N$에 비례하게 되므로 실제 응력 $\boldsymbol{\sigma}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{q^N}\boldsymbol{\sigma}_d^N - p\boldsymbol{\delta} \tag{2.7a}$$

이때 상수 p, q는 다음과 같은 최소화 문제의 해가 된다.

$$\min_{F(\bar{p}, \bar{q}) \le 0} E(\bar{p}, \bar{q})$$
$$= \min_{F(\bar{p}, \bar{q}) \le 0} \left[\frac{1}{3\mu}(q^N - \bar{q}) + \frac{1+\beta}{\kappa}(p^N - \bar{p})^2\right] \tag{2.7b}$$

식 (2.6)에 제시된 항복조건에 대하여 라그랑지의 승수방법(Lagrangian multiplier method)을 이용하여 식 (2.7)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^N, & F(p^N, q^N) \le 0 \\ k_d\boldsymbol{\sigma}_d^N - k_m p^N\boldsymbol{\delta}, & F(p^N, q^N) > 0 \end{cases} \tag{2.8a}$$

$$k_m = \frac{1}{1+\varphi m^2}\left(1 + \frac{1}{k}\varphi m^2\right)$$

$$k_d = \frac{1}{1+\varphi m^2}(k + \varphi m^2) \tag{2.8b}$$

$$k = \frac{mp^N}{q^N} \tag{2.8c}$$

$$\varphi = \frac{\kappa}{3(1+\beta)\mu} \tag{2.8d}$$

2.1.2 지배방정식의 유한요소 수식화

공간상에 고정된 영역 Ω에서 경계 Γ을 가지는 고체입자로 이루어진 재료의 유동에 대한 지배방정식에 대해서 살펴보면 영역의 경계는 속도경계조건(prescribed velocity B. C.)을 가지는 경계 Γ_v와 항력경계조건(prescribed traction B. C.)을 가지는 경계 Γ_t으로 나눌 수 있다. 고체입자는 중력에 영향을 받으므로 체적력 ρf를 받는다. 주어진 재료에 대한 동적 평형방정식은 다음과 같다.

$$\rho(\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}) - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d}) = \rho\boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega$$
$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} \quad \text{on } \Gamma_v$$
$$\boldsymbol{t} = n\cdot\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \tag{2.9}$$

여기서, $\bar{\boldsymbol{v}}$와 $\bar{\boldsymbol{t}}$는 경계조건으로 주어지고, $\sigma(d)$는 식 (2.8)에 의해서 얻어진다.

속도 v와 같은 공간(space)에 속하는 시험함수 w를 도입하여 일반적인 가상일률의 원리(principle of virtual power)을 적용하면 다음과 같은 약형식(weak form)이 된다.

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\rho(\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \int d(\boldsymbol{w}) : \sigma(d)\, d\Omega$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\rho f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{w}\cdot\bar{t}\, d\Gamma \tag{2.10}$$

속도에 대한 보간함수(shape function) 행렬 $N(x)$을 도입하면 속도 v는 다음과 같이 근사화된다.

$$\boldsymbol{v} = N^T(x)\, v \tag{2.11}$$

이 보간함수를 이용하여 식 (2.10)을 유한요소 수식화하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{M}\underline{\dot{\boldsymbol{v}}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{S})\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{f}} \tag{2.12}$$
$$\boldsymbol{M} = \int_\Omega \rho\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^T d\Omega,\quad \boldsymbol{C} = \int_\Omega \rho\boldsymbol{N}\boldsymbol{L}^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{N}^T d\Omega$$
$$\boldsymbol{S} = \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d})\, d\Omega,\quad \underline{\boldsymbol{f}} = \int_\Omega \boldsymbol{N}\rho\boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t}\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \tag{2.13}$$

속도 $\boldsymbol{v}$의 시간에 대한 미분을 후방 오일러법(backward Euler method)으로 차분화하면 다음과 같다.

$$\underline{\boldsymbol{v}}_{n+1}^{(i)} = \underline{\boldsymbol{v}}_n + \Delta t\cdot\boldsymbol{K}^{(0)-1}(\underline{\boldsymbol{f}}_{n+1} - \underline{\boldsymbol{f}}_{C,n} - \underline{\boldsymbol{f}}_{S,n}) \tag{2.14a}$$
$$\underline{\boldsymbol{v}}_{n+1}^{(i)} = \underline{\boldsymbol{v}}_{n+1}^{(i-1)} + \boldsymbol{p}^{(i)} \tag{2.14b}$$
$$\boldsymbol{K}^{(i-1)}\underline{\boldsymbol{p}}^{(i)} = \Delta t[\underline{\boldsymbol{f}}_{n+1} - \underline{\boldsymbol{f}}_{C,n+1}^{(i-1)} - \underline{\boldsymbol{f}}_{S,n+1}^{(i-1)}] - \boldsymbol{M}(\underline{\boldsymbol{v}}_{n+1}^{(i-1)} - \underline{\boldsymbol{v}}_n) \tag{2.14c}$$

여기서, $\underline{\boldsymbol{f}}_C = \boldsymbol{C}\underline{\boldsymbol{v}}$, $\underline{\boldsymbol{f}}_S = \boldsymbol{S}\underline{\boldsymbol{v}}$이고, (i), $(i-1)$은 반복순서이고, n, $n+1$은 계산단계이다. 그리고 행렬 K는 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M} + \Delta t(\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{S}})$이다.

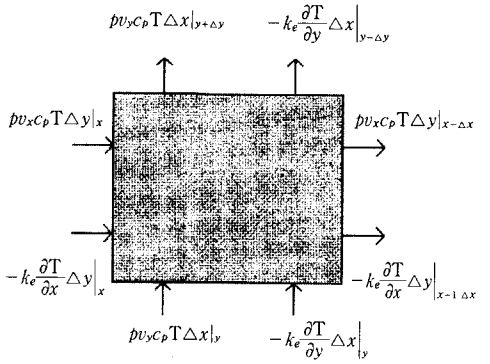

Fig. 1 Control volume for energy equilibrium.

2.2 열전달해석 모델

고체입자는 온도에 따라서 밀도의 변화가 거의 없기 때문에 입자의 유동은 금속관과 고체입자 사이의 열전달로 인해서 영향을 받지 않는다. 따라서 유동해석으로 얻어진 속도분포를 이용한 열전달 모델은 열전달 과정중에 속도가 일정한 점을 제외하면 일반적인 이차원 강제대류(forced convection) 모델과 유사하다. 열에너지 평형방정식(thermal energy equilibrium equation)은 강제대류 모델을 이용하였고 열전달계수는 단일저항 모델을 이용하여 계산한다.[10]

2.2.1 열전달 모델의 유한요소 수식화

Fig. 1와 같은 검사체적(control volume)에서는 체적으로 유입되는 질량과 배출되는 질량이 가지고 있는 열량에 의한 열교환과 고체입자 사이의 전도에 의한 열교환이 일어난다. 주어진 검사체적에 대해 열역학 제 1법칙을 적용한 에너지 평형방정식은 식 (2.15)과 같다.

$$\rho c_p\left[\frac{\partial(v_x T)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y T)}{\partial y}\right]=k_e\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \quad (2.15)$$

여기서, ρ는 고체입자의 체적밀도, c_p는 정압비열, k_e는 유효 열전도계수이다.

공간상의 고정된 영역 Ω에서 경계 Γ을 가지고 속도 v로 유동하고 있는 재료의 열전달에 관한 지배방정식은 다음과 같다. 이때 경계 Γ는 온도경계조건을 가지는 Γ_T와 열선속(heat flux)이 주어지는 Γ_q로 구분된다.

$$\rho c_p\left[\frac{\partial(v_x T)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y T)}{\partial y}\right]=k_e\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \text{ in } \Omega$$

$$T=\bar{T} \text{ on } \Gamma_T$$

$$q_n=-k\frac{\partial T}{\partial n}=h(T_w-T_\infty) \text{ on } \Gamma_q \quad (2.16)$$

온도 T와 같은 공간에 속하는 시험함수 w를 도입하여 적분한 약형식(weak form)은 다음과 같다.

$$\int_\Omega\left[\frac{k_e}{\rho c_p}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)wT+v_x w\frac{\partial T}{\partial x}+v_y w\frac{\partial T}{\partial y}\right]d\Omega$$
$$=\int_{\Gamma_q}\left(\frac{k_e}{\rho c_p}w\nabla T\right)d\Gamma$$
$$=\int_{\Gamma_q}\frac{h}{\rho c_p}wT_w d\Gamma-\int_{\Gamma_q}\frac{h}{\rho c_p}wT d\Gamma \quad (2.17)$$

유한요소 수식화를 위해 온도에 대한 보간함수 $\Psi(x,\ y)$을 도입하여 온도를 근사화하면 다음과 같다.

$$T=\Psi(x,y)^T\underline{T} \quad (2.18)$$

이때, $\underline{T}$은 절점에서의 온도이다. 보간함수 $\Psi(x,y)$을 이용하여 지배방정식을 유한요소 수식화하면 다음과 같다.

$$[H+S+B]\underline{T}=\underline{F} \quad (2.19)$$

$$H=\int_\Omega\left[\frac{k_e}{\rho c_p}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^T}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Psi^T}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\Psi\Psi^T\right]d\Omega \quad (2.20a)$$

$$S=\int_\Omega\left(v_x\Psi\frac{\partial\Psi^T}{\partial x}+v_y\Psi\frac{\partial\Psi^T}{\partial y}\right)d\Omega \quad (2.20b)$$

$$B=\int_{\Gamma_q}\left(\frac{h}{\rho c_p}\Psi\Psi^T\right)d\Gamma_q \quad (2.20c)$$

$$\underline{F}=\int_{\Gamma_q}\left(\frac{h}{\rho c_p}T_w\Psi\right)d\Gamma \quad (2.20d)$$

식 (2.20)에서 $(H+S+B)$가 강성행렬이 되고 $\underline{F}$가 힘벡터가 되는 유한요소 행렬식의 해가 영역내의 온도분포가 된다. 식 (2.21b)에서 주어진 행렬 S가 비대칭이므로 강성행렬은 비대칭이 된다.

2.2.2 대류 열전달계수의 결정

열전달에 대한 지배방정식 (2.17)에서 경계 Γ_q에서는 경계조건으로 열선속(heat flux)이 제한된다. 유동하는 고체입자와 벽면 사이의 열전달은 Sullivan과 Sabersky[10]에 의해서 제안된 바와 같이 단일 열저항으로 표현할 수 있다. 외벽과의 접촉영역의 경계조건은 다음과 같다.

$$\dot{q}=-k\frac{\partial T}{\partial y}(0,x)=K[T_w-T(0,x)] \quad (2.21)$$

Table 1 Flow and heat transfer properties of used particles.

Properties	Sand (637 μm)	Sand (203 μm)	Glass (820 μm)
Particle density (kg/m^3), ρ_p	2600.0	2590.0	2690.0
Bulk density (kg/m^3), ρ	1500.0	1450.0	1560.0
Particle diameter (mm), d	0.637	0.203	0.82
Fractional solids content, r_s	0.58	0.56	0.58
Angle of internal friction (°), φ_e	32.0~42.0	32.0	27.3
Angle of friction with wall (°), φ_w	22.3	24.7	11.8
Thermal conductivity (w/m K), ke	0.43	0.29	0.16
Thermal capacity (kJ/kg K), c_p	740.0	740.0	810.0

여기서, K는 외벽의 단위면적당 입자와의 열전도도이다. $T(0,x)$는 외벽에서의 입자의 온도이고 T_w는 열원의 온도이다.

입자와 벽면 사이의 열전달을 대류 열전달의 관점에서 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{q}=-k\frac{\partial T}{\partial y}(0,x)=h(T_w-T_\infty) \qquad (2.22)$$

따라서 접촉영역에서의 국소 열전달계수(local heat transfer coefficient) h는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$h=\frac{K[T_w-T(0,x)]}{[T_w-T_\infty]} \qquad (2.23)$$

입자와 외벽 사이의 단위면적당 열전도도 K는 입자와 입자 사이에 존재하는 기체의 열전도도가 높을수록 커지고 접촉영역에 존재하는 기체층의 두께가 두꺼울수록 K값은 작아진다. 이때 입자와 벽 사이의 기체층의 두께는 입자의 크기에 비례한다. 따라서 K는 공기의 열전도도 k_g에 비례하고 입자의 지름 d에 반비례한다.

$$K=\frac{1}{\chi}\frac{k_g}{d} \qquad (2.24)$$

이때 χ는 Sullivan 등[10]이 실험으로부터 얻은 비례상수로 $\chi=0.085$의 값을 갖는다. 이 값은 모든 입자에 대해서 정확하지는 않지만 가장 근사하게 표현할 수 있는 값이다.

3. 해석결과 및 고찰

해석을 위해서 고체입자로는 Table 1에 주어진 입자들을 이용하였고 입자간의 매질로는 공기를 이용하였다. 평면 이차원 문제로 단순화하였으며 유동해석의 경우에는 평면변형률 문제(plane strain problem)로 가정하였다. 유한요소해석에서는 8개의 절점을 가지는 동일 매개변수 평면요소(iso-parametric plane element)를 사용하였다. 해석의 반복계산의 수렴여부는 식 (3.1)과 같은 v와 p 사이의 상대오차를 이용하여 판단하였다.

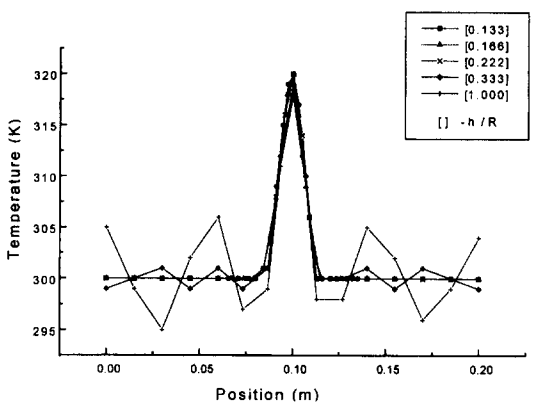

Fig. 2 Temperature of outlet with respect to mesh size (sand (637 μm), R=19 mm, mass flux=3.8 kg/(m^{2}s)).

$$e=\frac{\|p(i)\|_2}{\|v_I\|_\infty}\le\delta_{IT} \qquad (3.1)$$

여기서, $\|\bullet\|_2$는 일반화된 기하학적 노옴(norm)이고, $\|\bullet\|_\infty$는 최대값 노옴(norm)이다. 이때 v는 속도 및 온도이고, p는 반복계산에 의한 각각의 증분이다.

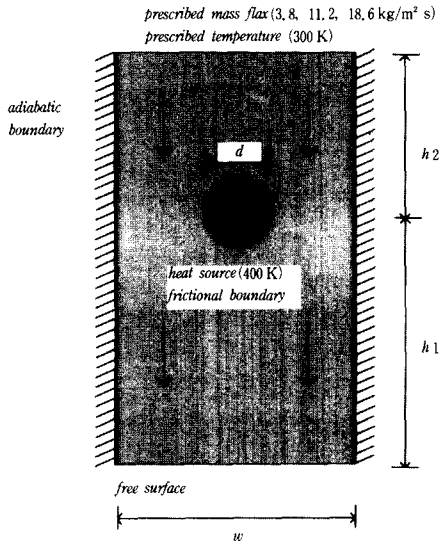

Fig. 3 Analysis region and corresponding boundary conditions (h1=h2=150 mm, w=200 mm, d=38 mm).

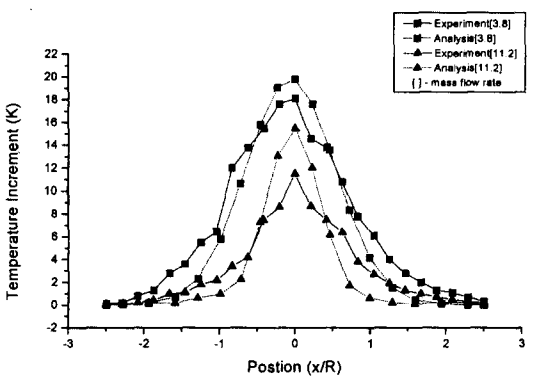

Fig. 4 Outlet temperature profile of analysis (A) and experiment (B) (sand (637 μm), R=19 mm).

3.1 해석 모델의 수렴성 및 성능확인

유한요소해석시 요소를 점점 세밀하게 나눔에 따른 온도분포의 변화를 이용하여 제안된 유동 및 열전달 모델의 수렴성을 볼 수 있다. 관의 온도는 400 K이고, 유동량은 3.8 kg/(m²s)로 고정되어 주어진다. h는 요소의 길이이고, R은 관의 반지름이다. Fig. 2는 요소의 최소길이에 따른 배출구(y=0)에서의 온도분포곡선을 보여주고 있다. 출구의 온도는 요소의 크기가 작아짐에 따라서 일정한 온도분포로 수렴하고 있다.

수치적 해석결과를 Niegsch 등[11]의 실험에 의한 결과와 비교하여 보았다. Fig. 3은 해석영역과 그

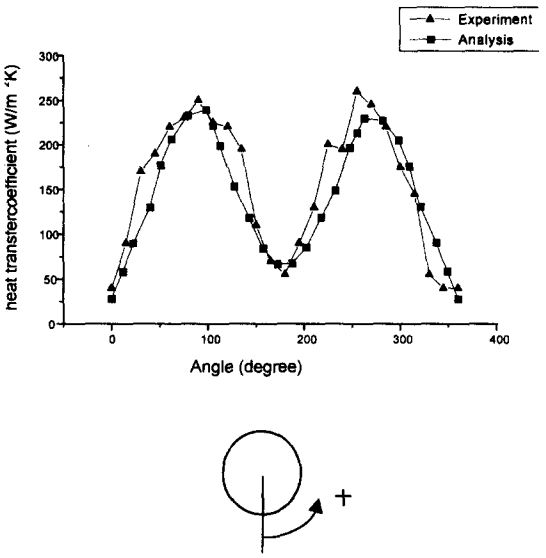

Fig. 5 Local heat transfer coefficient around tube (mass flux=3.8 kg/(m²s)).

에 따른 경계조건을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 입구에서 유량과 온도가 정해지고 옆 벽은 단열조건이고 온도가 정해진 열원이 존재하고 있다.

Fig. 4는 수치적 해석과 실험[11]에서 측정된 온도분포이다. 이때 R은 관의 반지름을 나타내고 유동량(kg/m²s)의 변화에 따라서 온도분포를 표시하였다. 유동량이 3.8(kg/m²s)일 때 수치해석 결과에서의 온도분포는 실험에 의해 얻어진 값에 비해서 19.6%의 산술평균오차를 나타내고 있다. 해석 결과 온도분포를 보면 유동량이 증가함에 따라서 온도분포는 실험결과와 같이 그 값이 감소함을 알 수 있다. 여기서 유량이 증가할수록 오차가 커지는 것은 열원 튜브의 아래부분에 생성되는 방울영역을 효과적으로 고려하지 못했기 때문이다. (부록)

따라서 수행되어진 수치해석은 실험 값과의 오차를 가지지만 그 크기가 크지않고 위치와 속도변화에 따라서 같은 경향을 보이고 분포형태가 전체적으로 유사하다. 이는 제안된 수치해석을 통해서 문제를 적절히 해결할 수 있음을 보여준다.

Fig. 5는 해석에 의해서 얻어지는 열원 튜브 주위에서의 열전달계수와 실험으로부터 얻어진 결과를 보여주고 있다. 실험결과는 Niegsch 등[11]이 제시한 결과로서 관의 내부와 외부에서 각도별로 온도를 측정하고 그 차이를 이용하여 열전달계수를

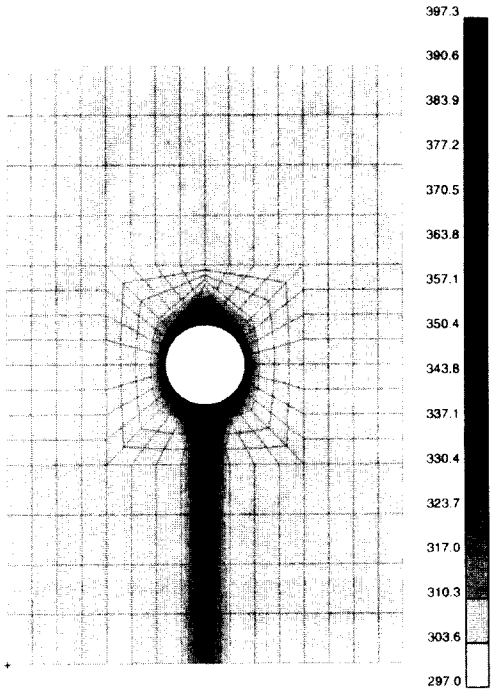

Fig. 6 Computed temperature fields around a tube (sand (637 μm), R=19 mm, mass flux=3.8 kg/(m^{2}s)).

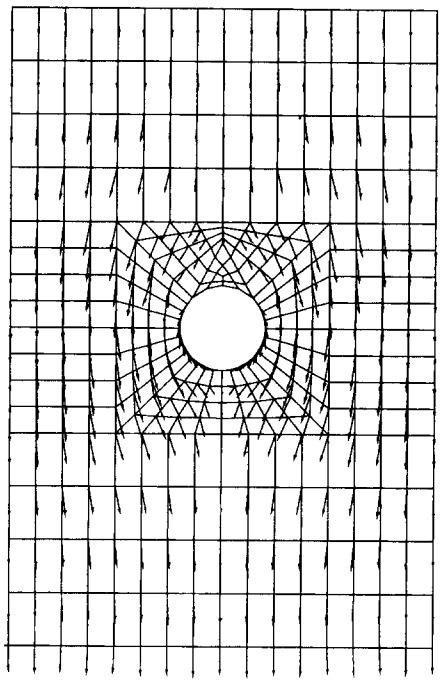

Fig. 7 Computed velocity fields around a tube (sand (637 μm), R=19 mm, mass flux=3.8 kg/(m^{2}s)).

계산한 것이다. 고체입자 이동층 내에 열원 튜브가 위치하게 되면 입자의 마찰특성에 따라 정체 영역(dead zone)이 생성된다(부록). 정체영역에서는 쌓여있는 입자에 의한 단열효과에 의해서 열전달 계수가 작아진다. 또한 튜브의 아래 부분에서는 입자와 튜브 사이의 온도 차이가 상대적으로 작고 방울영역(bubbling region)이 생성되어 기체층의 두께가 두꺼워져서 열전달계수가 작아진다. 따라서 Fig. 5에서 알 수 있듯이 튜브의 위 부분이나 아래 부분에 비해서 측면에서의 열전달계수가 상대적으로 크다. 이러한 경향은 실험에 의한 결과(A)에서만 아니라 수치해석 결과(B)에서도 볼 수 있다.

Fig. 6은 정체영역을 고려한 모델링을 이용하여 해석한 이동층 내의 온도분포를 나타내고 있다. 앞에서 살펴본 바와 같이 열원 튜브의 위와 아래에서는 열원과의 온도 차이는 옆면에 비해서 작음을 알 수 있다.

해석에 의한 열전달계수를 살펴보면 실험에 의한 값과 비교하여 18.3%의 산술평균오차를 가진다. 또한 각도에 따른 변화도 실험결과와 같은 경향을 가진다. 따라서 제안된 모델로 계산된 열전달 계수가 실제의 경우를 적절히 묘사하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7은 Fig. 6과 같은 모델에서의 속도의 분포를 나타내고 있다. 열원 위쪽의 삼각형 모양의 부분은 정체영역이다. (부록) 그림에서 알 수 있듯이 나타난 유동은 경계조건 및 열원 튜브에 의한 효과를 잘 나타내고 유동의 연속성을 잘 만족시키고 있다.

3.2 속도에 따른 열전달계수의 변화

Fig. 8은 입자의 속도에 따른 평균 열전달계수(averaged heat transfer coefficient)를 보여주고 있다. 재료로는 Table 1에 제시되어 있는 입자들을 이용하였다. 평균 열전달계수 h는 다음과 같은 식으로부터 얻을 수 있다.

$$h=\frac{Q}{A[T_w-T_\infty]}$$

여기서, Q는 총 열전달량이고, A는 열원과의 접

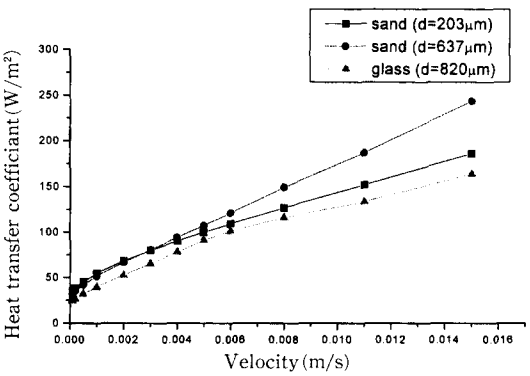

Fig. 8 Averaged heat transfer coefficient of heat exchanger

촉 면적이다.

Fig. 8에서 알 수 있듯이 입자의 속도가 증가할수록 열전달계수는 증가하게 된다. 각각의 그림을 비교해 보면 입자의 종류에 따라서 속도변화에 따른 열전달계수의 변화율이 달라지는 것을 알 수 있다. 유리(glass)의 경우보다는 모래(sand)의 경우가 전체적으로 평균 열전달계수의 값이 크고 속도에 따른 증가율도 큼을 알 수 있다. 그리고 같은 모래의 경우에도 입자의 지름이 작을수록 열전달계수의 증가율이 커지게 된다. 즉, 입자의 크기가 작을수록 그리고 열전도도가 클수록 높은 열전달계수를 가지고 속도변화에 대한 증가율도 큰 값을 가지게 된다.

4. 결 론

본 논문에서는 고체입자의 이동층 내에서의 유동 및 열전달을 수치적으로 해석함으로써 열교환기의 열전달량을 계산해 낼 수 있는 방법에 대해서 논의하였다. 유동해석을 위하여 점소성 유체 모델(viscous-plastic fluid model)을 이용하였고 열전달의 해석을 위하여 검사체적(control volume)을 이용한 지배방정식을 제시하였으며 열전달계수를 계산하기 위하여 단일저항 모델(single resistance model)을 이용하였다.

일련의 해석을 통하여 우선 제안된 모델이 해석에 사용되는 요소의 수를 늘려감에 따라서 해석의 결과가 일정한 값으로 수렴해 가는 것을 확인할 수 있었다. 또한 실험과 같은 조건에 관한 해석결과를 실험결과와 비교하여 제안된 모델의 타당성을 확인하였다. 여러 예제에 대한 수치해석으로 열교환기에서의 열전달량은 입자의 성질과 유동의 분포에 지배적인 영향을 받음을 확인할 수 있었다. 입자의 크기가 작고 열전도도가 클수록 열전달계수는 커지게 되고 입자로의 열전달량은 입자의 유동 속도가 클수록 증가한다.

참고문헌

(1) Jenike, A. W. and Shield, R. T., 1959, "On the Plastic Flow of Coulomb Solids Beyond Original Failure," *J. Applied Mechanics, ASME*, Vol. 45, pp. 599~602.

(2) Johanson, J. R., 1964, "Stress and Velocity Fields in the Gravity Flow of Bulk Solids," *J. Applied Mechanincs, ASME*, Vol. 31, pp. 499~506.

(3) Brennen, C. and Pearce, J. C., 1978, "Granular Material Flow in Two-Dimensional Hoppers," *J. Applied Mechanics, ASME*, Vol. 45, pp. 43~50.

(4) Schaeffer, D. G., "Instability in the Evolution Equations Describing Granular Flow," Duke University, Dept. of Mathematics, Durham, NC, USA.

(5) Eibl, J. and Haussler, U., 1984, "Silo Pressure from a Numerical Point of View," *8th Int. Cong. On Chemical Engineering*, Praha.

(6) Runensson, K. and Nilsson, L., 1986, "Finite Element Modelling of the Gravitational Flow of a Granular Material," *Int. J. Bulk Solids Handling*, Vol. 6, pp. 877~884.

(7) Brinn, M. S., Friedman, S. J., Gluckert, F. A., and Pigford, R. L., 1948, "Heat Transfer to Granular Materials," *Ind. Engng. Chem.*, Vol. 40, pp. 1050~1061.

(8) Yu. P. Kurochkin, 1966, "Heat Transfer between Tubes of Different Sections and a Stream of Granular Material," *J. Engng. Phys.*, Vol. 10, pp. 447~449.

(9) Harakas, N. K. and Beatty, K. O. 1963, "Moving Bed Heat Transfer; Effect of Interstitial Gas with Fine Particles," *Chem. Engng. Progr. Symp. Ser.*, Vol. 59, pp. 122~128.

(10) Sullivan, W. N. and Sabersky, R. H., 1975,

"Heat Transfer to Flowing Granular Media," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 97~107.

(11) Niegsch, J., Koeneke, D. and Weinspach, P. M., 1994, "Heat Transfer and Flow of Bulk Solids in a Moving Bed," *Chemical Engineering and Processing*, Vol. 33, pp. 73~89.

(12) 이금배, 박상일, 1994, "원형튜브내에서 이동중인 고체입자층의 열전달 특성 연구," 대한기계학회논문집, 제18권, pp. 1551~1558.

부 록 : 열원주위 정체영역의 형태

고체입자로 이루어진 재료는 입자의 모양에 따라 다른 물성치(material property)를 가지게 되고 그에 따라 여러가지 쌓임형태(packing pattern)를 가지게 된다. 입자의 유동층 내에 수평방향으로 가열된 금속관이 위치하게 되면 금속관의 위부분에 Fig. A1에서와 같이 쐐기모양의 정체영역(dead zone)이 생성된다. 금속관과 고체입자 사이의 열전달의 관점에서 본다면 정체영역에서는 쌓여있는 입자들에 의해서 열이 차단되는 단열효과가 나타나므로 이 영역에서는 열전달량이 감소하게 된다.[11]

또한 금속관의 아래부분에는 고체입자가 존재하지 않는 방울영역(bubble region)이 생성된다. 방울영역에서는 금속관과 입자 사이의 직접적인 접촉이 없고 공기에 의해서만 열전달이 일어나므로 다른 부분에 비해서 열전달량이 작게 된다. 본 연구에서는 모델링의 어려움때문에 방울영역을 효과적으로 고려하지 못했다. 유량이 적을 때는 크게 영향이 없으나 유량이 큰 경우에는 실제의 경우보다 열전달량이 크게 해석되는 경향이 나타난다.

Fig. A1에서 볼 수 있듯이 정체영역의 형태는 입자의 마찰특성에 의한 쌓임각과 미끌림각에 의해서 결정된다. 정체영역의 기울기 α는 내부 미끌림면

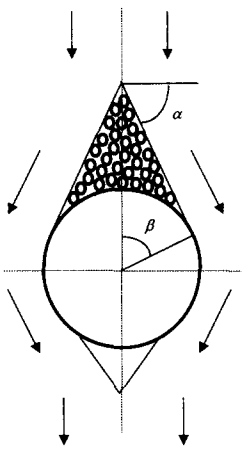

Fig. A1 Dead zone bubble region around a single tube.

(internal sliding plane)과 수평면 사이의 각도로서 다음과 같다.

$$\alpha=\pi/4+\varphi_e/2$$

여기서, φ_e는 입자의 내부 마찰각도(angle of internal friction)이다.

Fig. A1에서처럼 입자가 움직이기 시작하는 지점의 원주상 각도를 나타내는 β는 고체입자의 정지마찰특성에 의해 영향을 받는다. $\beta<\alpha$인 경우는 물리적으로 타당하지 않으므로 α는 β의 최대값이 된다. 따라서 미끌림 한계각 β는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\beta=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\sin\varphi_e}{2\sin\varphi_e}\right)+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin\varphi_w}{\sin\varphi_e}\right)+\frac{1}{2}\varphi_w \quad \text{if } \beta<\alpha$$

$$\beta=\alpha \quad \text{if } \beta\geq\alpha$$

여기서, φ_w는 입자와 벽과의 마찰각도이다.