論文98-35S-4-5

# 비선형 시스템의 동적 궤환 입출력 선형화

# (Input-Output Linearization of Nonlinear Systems via Dynamic Feedback)

金容敏*, 李鴻奇*, 全洪兌*

(Yong-Min Kim, Hong-Gi Lee, and Hong-Tae Jeon)

요 약

동적 궤환(dynamic feedback)은 비선형 시스템의 비선형 특성을 보상하기 위한 제어수단으로 static 피드백 보다 강력한 것으로 잘 알려져 있다. 본 논문에서는 동적 궤환을 사용하여 비선형 시스템의 출력중 입력에 의존하는 항이 초기상태에는 관계없이 입력에 대해 선형이 되도록 하는 입출력 선형화 문제를 고려하며, 동적 궤환을 전제로한 structure algorithm을 정의하고, 이것을 이용하여 동적 궤환 입출력 선형화 문제를 풀기 위한 필요 충분조건을 구한다.

**Abstract**

The dynamic feedback is well-known to be much more powerful tool compensating the nonlinearity in nonlinear control system than the static one. In this paper we consider the input-output linearization problem via a regular dynamic feedback which is to make linear the input-dependent part of the output of a nonlinear system in the input and independent of the initial state, and give necessary and sufficient conditions for the existence of such a regular dynamic feedback control law, after defining the structure algorithm for a dynamic feedback.

## I. 서 론

로보트와 항공기 같은 고도의 제어 기법이 요구되는 비선형 시스템의 이용이 증가함에 따라 최근 20여 년간 비선형 제어 기법에 대해 활발한 연구가 진행되어 왔다. 그 중에서도 비선형 시스템의 궤환(feedback) 선형화 제어는 비선형 좌표 변환(state coordinate change)과 비선형 궤환(feedback)을 이용하여 주어진 비선형 시스템의 전체 폐루프(closed-loop) 시스템이 새로운 좌표계에서 선형 시스템이 되도록 하여 제어하는 것이다. 만일 주어진 비선형 시스템의 선형화가 가능하면, 비선형 시스템을 제어하는데 이미 잘 개발된 선형 시스템 이론을 적용 할 수 있다. 이런 이유로 해서 비선형 시스템의 궤환 선형화 제어는 많은 관심을 끌어 왔다.[1-9,12]

상태 선형화보다 덜 제한적인 입출력 선형화(input-output linearization) 문제는 출력중 입력에 의존하는 부분이 초기상태에 독립적이고 입력에 대해 선형인 입출력 관계를 갖도록 하는 궤환을 구하는 것이다. 입출력 선형화 문제의 경우에 연속 시스템에 대해서는 Isidori and Ruberti[10]가, 불연속 시스템에 대해서는 Lee and Marcus[11]가 정적 궤환(static feedback)을 사용할 경우의 필요 충분 조건을 구하였

* 正會員, 中央大學校 電子電氣工學部

(Dept. of Electrical and Electronic Eng., Chung-Ang Univ.)

※ 본 연구는 한국과학재단 핵심전문 연구비(951-0914-095-2)지원으로 수행되었으며 지원에 감사를 드립니다.

接受日字: 1997年12月19日, 수정완료일: 1998年4月7日

다. 정적 궤환에 의해 입출력 선형화가 불가능한 비선형 시스템에 대해 좀더 일반적이고 강력한 동적 궤환(dynamic feedback)을 사용한 입출력 선형화 문제는 Lee and Jeon[13]이 연속 시스템에 대한 충분 조건을 발견하였고, 불연속적인 시스템에 대한 필요 충분 조건을 Kotta and Nijmeijer[14]가 발견하였다.

본 논문에서는 동적 궤환을 사용한 비선형 연속 시스템의 입출력 선형화 문제를 고려한다. 2절에서는 정적 궤환을 전제한 structure algorithm[10]을 일반화하여 동적 궤환을 전제한 structure algorithm을 정의한다. 3절에서는 이것을 이용하여 동적 궤환에 의한 입출력 선형화 문제의 필요 충분 조건을 구한다. 제 4 절에서는 예제를 통하여 우리의 조건을 쉽게 점검할 수 있음을 보인다. 본 논문에서 정의되지 않은 기호는 [1-2] 에서 찾을 수 있다

다음과 같은 형태의 비선형 affine 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}g_i(x)u_i=f(x)+g(x)u\ ,\quad x\in R^n,\ \ u\in R^m \tag{1.1a}$$

$$y=h(x),\ y\in R^p \tag{1.1b}$$

여기서 $f,\ g_1,\cdots,\ g_m$ 는 실해석적(real analytic)이고 complete 한 벡터 필드(vector fields)이고, $h$ 는 실해석적인 함수이다. 시스템 (1.1)에 대하여 정적 궤환을 포함하는 동적 궤환은 (1.2)식과 같은 동적(dynamic) 시스템으로 정의된다:

$$\dot{z}=\phi(x,z)+\psi(x,z)v \tag{1.2a}$$

$$u=a(x,z)+b(x,z)v \tag{1.2b}$$

이때 $z\in R^\nu$ 와 $v\in R^m$ 와 $u$ 는 각각 동적 보상기(dynamic compensator) (1.2)의 상태(state)와 새로운 입력과 출력이다. 여기서도 모든 벡터 필드와 함수들은 실해석적이고 complete 하다고 가정한다. 그러면 원래의 시스템 (1.1)에 동적 보상기 (1.2)를 걸어준 폐루프(closed-loop) 시스템은 다음과 같은 확장(extended) 시스템으로 표현할 수 있다:

$$\dot{x}_E=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(x)+g(x)a(x,z)\\ \phi(x,z)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g(x)b(x,z)\\ \psi(x,z)\end{bmatrix}v$$
$$\triangleq f_E(x_E)+g_E(x_E)v \tag{1.3a}$$

$$y=h_E(x_E)=h(x) \tag{1.3b}$$

**정의 1.1:** (regular dynamic feedback)

만일 시스템 (1.3a)가 (1.2b)식의 u를 출력으로 할 때 동적 궤환 입출력 decoupling이 가능하면, 동적 궤환(1.2)는 regular 하다고 정의한다.

즉, 동적 궤환 (1.2)가 regular일 때는, 어떤 정수 $d_i(\geq 0)$들에 대해 $u_i^{(d_i)}=\mu_i\ ,\ \ 1\leq i\leq m$ 을 만족하는 동적 궤환 (1.4)가 존재한다.

$$\dot{\zeta}=\bar{\phi}(x_E,\zeta)+\bar{\psi}(x_E,\zeta)\mu \tag{1.4a}$$

$$v=\bar{a}(x_E,\zeta)+\bar{b}(x_E,\zeta)\mu \tag{1.4b}$$

또한 다음과 같이 제한된 동적 궤환을 정의 할 수 있다.

**정의 1.2:** (restricted class of regular dynamic feedback)

만일 시스템 (1.3a)가 (1.2b)식의 u를 출력으로 할 때 정적 궤환 입출력 decoupling이 가능하면, 동적 궤환 (1.2)는 제한된 동적 궤환(restricted class of regular dynamic feedback)이라고 정의한다.

동적 궤환 문제가 풀기 어려울 때 종종 사용되는 순수 적분기를 연결한 후 확장된 시스템에 대하여 상태 궤환을 한번 사용하는 동적 궤환(pure integrators followed by extended state feedback)은 [12,13] 정의 1.2의 제한된 동적 궤환에 속한다. 정의 1.2의 제한된 동적 궤환은 정의 1.1의 regular한 동적 궤환의 부분 집합이다.

다음에는 정적 궤환 입출력 선형화 문제와 같이[10], 동적 궤환 입출력 선형화 문제를 정의한다. 시스템 (1.1)의 입출력 동작은 Volterra 급수 전개를 사용하여, 다음의 식 (1.5)와 같이 나타낼 수 있다:[10,16]

$$y(t)=w^{(0)}(t,x)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t w_i^{(1)}(t,\tau_1,x)u_i(\tau_1)d\tau_1$$
$$+\sum_{i_1}\sum_{i_2}\int_0^t\int_0^{\tau_1}w_{i_1i_2}^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2,x)u_{i_1}(\tau_1)u_{i_2}(\tau_2)d\tau_1d\tau_2+\cdots \tag{1.5}$$

여기에서 Volterra kernel들은 다음과 같이 Taylor 급수 전개에 의해 표현된다.[10,17]

$$w^{(0)}(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}L_f^k h(x)\frac{t^k}{k!} \tag{1.6a}$$

$$w_i^{(1)}(t,\tau_1,x)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}L_f^{k_2}L_{g_i}L_f^{k_1}h(x)\frac{(t-\tau_1)^{k_1}}{k_1!}\frac{\tau_1^{k_2}}{k_2!} \tag{1.6b}$$

$$w_{i_1i_2}^{(2)}(t,\tau_1,\tau_2,x)=\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}L_f^{k_3}L_{g_{i_2}}L_f^{k_2}L_{g_{i_1}}L_f^{k_1}h(x)\frac{(t-\tau_1)^{k_1}(\tau_1-\tau_2)^{k_2}\tau_2^{k_3}}{k_1!k_2!k_3!}\cdots \tag{1.6c}$$

만일 시스템(1.1)이 선형인 경우에는 $w^{(1)}(t,\tau_1,x)$은 $x$에 무관하고, 따라서 Volterra kernel $w^{(i)}(t,\cdots,x)$, $i\geq 2$ 들은 모두 소거된다. 또한 시스템(1.1)이 시 불변이므로, $w^{(1)}(t,\tau,x)$ 은 단지 $t-\tau$ 만의 함수가 되므로, 식 (1.5)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t)=w^{(0)}(t,x)+\int_0^t w^{(1)}(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1.7a}$$

만일 시스템 (1.1)이 식(1.7a)을 만족하면, 출력 중에서 입력에 독립인 항은 초기 상태 $x$에 비선형 일지라도, 입력에 의존하는 항은 입력 $u(t)$에 선형이 된다. 입출력 선형화 문제는 상태 궤환을 사용하여 폐루프 시스템의 출력이 다음 식 (1.7b)을 만족하도록 만드는 것이다.

$$y(t)=w^{(0)}(t,x)+\int_0^t w^{(1)}(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{1.7b}$$

다음의 식(1.8)에 의하여,

$$w_i^{(1)}(t,0,x)=\sum_{k=0}^{\infty}L_{g_i}L_f^k h(x)\frac{t^k}{k!}, \tag{1.8}$$

$w_i^{(1)}(t,\tau_1,x)$가 $t-\tau_1$만의 함수일 필요 충분 조건은 다음의 (1.9)식과 같다:

$$L_{g_i}L_f^k h(x)=\text{constant},\quad \text{for}\quad 1\leq i\leq m \quad \text{and} \quad k\geq 0. \tag{1.9}$$

이제 위의 논의를 바탕으로 하여 정적 궤환 입출력 선형화 문제보다[10] 좀더 일반적인 동적 궤환 입출력 선형화 문제를 정의한다.

**정의 1.3:**(dynamic input-output linearization problem)

시스템(1.1)이 주어졌을 때, (1.10)식의 $p\times m$ 행렬이 $k\geq 0$에 대해

$$L_{g_E}L_{f_E}{}^k h_E(x_E) \tag{1.10}$$

$R^n\times R^\nu$ 의 open and dense subset $U$ 에서 상수가 되는 $U$ 와 $U$ 에서 정의되는 regular한 동적 궤환 (1.2)를 구하는 것을 동적 궤환 입출력 선형화 문제(dynamic input-output linearization problem)라고 정의한다. 이때, $f_E(x_E)$와 $g_E(x_E)$와 $h_E(x_E)$는 식 (1.3)과 같이 정의된다.

## Ⅱ. 동적 궤환(dynamic feedback)을 위한 structure algorithm

이 절에서는 [10]의 structure algorithm을 일반화한 동적 궤환을 전제로한 structure algorithm을 정의한다.

**정의 2.1:** [10]

$\mathbb{R}$을 실수체(field of real numbers)라고 하고, $K(C^\omega)$를 $\mathbb{R}^n$에서 정의된 실해석적 함수의 환(ring)과 관련된 상체(quotient field)라고 하고, $M(x)$를 $\mathbb{R}^n$의 실해석적 함수의 $p\times m$ 행렬이라고 할때, 행렬 $M(x)$에 대해 $\rho(M)$ 및 $\sigma(M)$을 각각 $M(x)$의 row에 의해 생성된 $\mathbb{R}$-벡터 공간 및 $K(C^\omega)$-벡터 공간의 차원(dimension)이라고 정의한다.

STRUCTURE ALGORITHM

**Step 1:**

$d$ 를 $\frac{\partial y^{(d)}}{\partial u}\neq 0$ 인 가장 작은 양의 정수라고 하자. 여기서 $y^{(d)}=\frac{d^d y}{dt^d}$ 이다. 그러면 입력이 처음 나타나는 출력의 시간에 대한 미분은 다음의 식 (2.1)로 나타낼 수 있다.

$$y^{(d)}=E^1(x)+D^1(x)u \tag{2.1}$$

만일

$$\sigma_1(x)=\sigma\{D^1(x)\} \tag{2.2a}$$

$$\rho_1=\rho\{D^1(x)\} \tag{2.2b}$$

라고 하면( $\delta_1=\sigma_1$라고 두자.), $\sigma_1(x)$ 이 $R^n$의 open dense한 부분 집합 $M_1$에서 상수이다. (예를 들어 모든 $x\in M_1$ 에 대해서 $\sigma_1(x)=\sigma_1$ ). 그러면 식 (2.3)을 만족하고,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ K_1^1 \end{bmatrix} y^{(d)}=\begin{bmatrix} E_1^1(x) \\ \overline{E}_1{}^1(x) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} D_1^1(x) \\ \overline{D}_1{}^1(x) \end{bmatrix}u \tag{2.3a}$$

$$\sigma\{D_1^1(x)\}=\sigma_1 \tag{2.3b}$$

$(p-\sigma_1)\times m$ 행렬 $\overline{D}_1{}^1(x)$ 의 마지막 끝 $(p-\rho_1)$행은 영(zero)이 되는 정칙(nonsingular)의 기본 행 연산 행렬(elementary row operation matrix) $V_1=\begin{bmatrix} P_1 \\ K_1^1 \end{bmatrix}$을 찾을 수 있다. 여기서, $P_1$과 $K_1^1$은 각

각 $\sigma_1 \times p$ 및 $(p-\sigma_1)\times p$ 행렬이다. 또한, 기본 열 (column) 연산에 의해서 다음의 (2.4)식을

$$\begin{bmatrix} D_1^1(x) \\ \overline{D}_1{}^1(x) \end{bmatrix} \beta^1(x) = \begin{bmatrix} I_{\delta_1} & 0_{\delta_1 \times (m-\sigma_1)} \\ \overline{S}^1(x) & 0_{(p-\sigma_1)\times(m-\sigma_1)} \end{bmatrix} \quad (2.4),$$

만족시키는 정칙 행렬 $\beta^1(x)$을 찾을 수 있다. 이를 이용하여 (2.5)식의 정적 궤환을 시스템 (1.1)에 가한다:

$$u = -\beta^1(x)\begin{bmatrix} E_1^1(x) \\ 0_{(m-\sigma_1)\times 1} \end{bmatrix} + \beta^1(x)\begin{bmatrix} u^1 \\ \overline{u}^1 \end{bmatrix}$$
$$\triangleq \alpha^1(x) + \beta_1{}^1(x)\,u^1 + \overline{\beta}_1{}^1(x)\,\overline{u}^1 \quad (2.5)$$

여기서, $\begin{bmatrix} u^1 \\ \overline{u}^1 \end{bmatrix}$은 새로운 입력이고, $u^1 \in R^{\sigma_1}$, $\overline{u}^1 \in R^{m-\sigma_1}$ 이다. 또한

$$\alpha^1(x) \triangleq -\beta^1(x)\begin{bmatrix} E_1^1(x) \\ 0_{(m-\sigma_1)\times 1} \end{bmatrix} = -\beta_1{}^1(x)E_1^1(x)$$

$$\beta^1(x) \triangleq [\ \beta_1{}^1(x) \quad \overline{\beta}_1{}^1(x)\ ]$$

이고, 이때 $\beta_1{}^1(x)$ 및 $\overline{\beta}_1{}^1(x)$는 각각 $m\times\delta_1$ 및 $m\times(m-\sigma_1)$행렬이다. 만일,

$$\gamma_1(x) \triangleq P_1 h(x) \ \text{and}\ \overline{\gamma}_1(x) \triangleq K_1^1 h(x) \quad (2.6)$$

라고 정의하면, (2.1)식과 (2.5)식에 의하여 (2.7)식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \overline{\gamma}_1(x)^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\sigma_1\times 1} \\ \hat{E}^1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0_{\sigma_1\times(m-\sigma_1)} \\ \overline{S}^1(x) & 0_{(p-\sigma_1)\times(m-\sigma_1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^1 \\ \overline{u}^1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\hat{E}^1(x) = \overline{E}_1{}^1(x) - \overline{S}^1(x)E_1^1(x). \quad (2.8)$$

그리고, 정적 궤환 (2.5)에 의한 폐루프 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,\alpha^1(x) + g(x)\,\beta_1{}^1(x)u^1 + g(x)\,\overline{\beta}_1{}^1(x)\,\overline{u}^1$$
$$= f^1(x) + g_1{}^1(x)\,u^1 + \overline{g}_1{}^1(x)\,\overline{u}^1$$
$$= f^1(x) + g^1(x)\begin{bmatrix} u^1 \\ \overline{u}^1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$f^1(x) \triangleq f(x) + g(x)\,\alpha^1(x) \quad (2.10a)$$

$$g_1{}^1(x) \triangleq g(x)\ \beta_1{}^1(x) \quad (2.10b)$$

$$\overline{g}_1{}^1(x) \triangleq g(x)\ \overline{\beta}_1{}^1(x) \quad (2.10c)$$

$$g^1(x) \triangleq [\ g_1{}^1(x) \quad \overline{g}_1{}^1(x)\ ] \quad (2.10d)$$

만일 $\overline{S}^1(x)=0$ 이면(즉 $\rho_1=\sigma_1$ 인 경우), step 2로 진행한다.

만일 $\overline{S}^1(x)\neq 0$ 이면(즉 $\rho_1>\sigma_1$ 인 경우), $\overline{\gamma}_1(x)^{(d)}$는 $x$ 뿐만 아니라 $u^1$의 함수이며, 이때 (2.11)식과 같이 $U^1$을 정의하고,

$$U^1 \triangleq \{\ u_j^1 \in u^1 \mid \frac{\partial\ \overline{\gamma}_1{}^{(d)}(x)}{\partial u_j^1} \neq 0\ \} \quad (2.11a)$$
$$= \{\ u_j^1 \mid \overline{S}_j{}^1(x) \neq 0\ \}$$

$$\overline{S}^1(x) \triangleq [\ \overline{S}_1{}^1(x) \ \cdots\ \overline{S}_{\delta_1}{}^1(x)\ ] \quad (2.11b)$$

(2.11)식에 따라, (2.12)식과 같이 동적 궤환을 정의한다:

$$\text{for } 1\le j\le \sigma_1,\quad \begin{array}{lll} \text{if } u_j^1 \in U^1, & u_j^1 = z_j^1; & \dot{z}_j{}^1 = w_j \\ \text{if } u_j^1 \notin U^1, & u_j^1 = w_j & \end{array} \quad (2.12a)$$

$$\overline{u}_j{}^1 = w_{j+\sigma_1},\quad \text{for } 1\le j\le m-\sigma_1 \quad (2.12b)$$

동적 궤환 (2.12)는 $a^1, b^1$ 및 $\phi^1$가 적당한 상수 행렬이라고 하여 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ \overline{u}^1 \end{bmatrix} = a^1 z^1 + b^1 w \quad (2.13a)$$

$$\dot{z}^1 = \phi^1 w \quad (2.13b)$$

따라서 이때( $\overline{S}^1(x)\neq O$)의 전체 폐루프의 확장된 시스템은

$$\dot{x}_E = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1(x) + g^1(x)a^1 z^1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g^1(x)b^1 \\ \phi^1 \end{bmatrix} w$$
$$\triangleq f_E(x_E) + g_E(x_E)w \quad (2.14a)$$

$$y = h(x_E) = h(x) \quad (2.14b)$$

이다. 기호의 편의상 $x_E$ 및 $w$ 를 각각 $x$ 및 $u$ 라 두고, step 1으로 되돌아간다.

**Step 2:**

바로 전의 step 1에서 얻은 $\overline{\gamma}_1(x)^{(d)}$을 시간 t 에 대해 한번 더 미분을 하면

$$\overline{\gamma}_1(x)^{(d+1)} = E^2(x) + \hat{\Pi}_1{}^1(x)u^1 + D^2(x)\ \overline{u}^1 \quad (2.15)$$

$$E^2(x) = L_{f^1(x)}\ \hat{E}^1(x) \quad (2.16a)$$

$$\hat{\Pi}_1{}^1(x) = L_{g_1^1(x)}\ \hat{E}^1(x) \quad (2.16b)$$

$$D^2(x) = L_{\overline{g}_1{}^1(x)}\ \hat{E}^1(x) \quad (2.16c)$$

을 얻을 수 있고, (2.7)식에 의하여 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \bar{\gamma}_1(x)^{(d+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\sigma_1\times 1} \\ E^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0 \\ \hat{\Pi}_1{}^1(x) & D^2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

이때,

$$\sigma_2(x) = \sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{\sigma_1\times\sigma_1} & 0 \\ \hat{\Pi}_1{}^1(x) & D^2(x) \end{bmatrix}\right\} \text{ and}$$

$$\rho_2(x) = \rho\left\{\begin{bmatrix} I_{\sigma_1\times\sigma_1} & 0 \\ \hat{\Pi}_1{}^1(x) & D^2(x) \end{bmatrix}\right\} \tag{2.18}$$

라고 정의 하면, $\rho_2 \geq \sigma_2$ 이고 ( $\delta_2 \triangleq \sigma_2 - \sigma_1$), (2.17)식의 우변의 두 번째 항의 행렬에 대해 기본 행 연산을 이용하여 (2.19)식을 만족하고

$$\begin{bmatrix} I_{\delta_1} & 0 \\ 0 & P_2 \\ K_1^2 & K_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \bar{\gamma}_1(x)^{(d+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\sigma_1\times 1} \\ E_1{}^2(x) \\ \bar{E}_1{}^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0_{\sigma_1\times(m-\sigma_1)} \\ \Pi_1{}^1(x) & D_1^2(x) \\ \bar{\Pi}_1{}^1(x) & \bar{D}_1{}^2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} \tag{2.19a}$$

$$\sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0_{\sigma_1\times(m-\sigma_1)} \\ \Pi_1{}^1(x) & D_1^2(x) \end{bmatrix}\right\} = \sigma_2 \tag{2.19b}$$

$(p-\sigma_2)\times m$ 행렬$[\ \bar{\Pi}_1{}^1(x)\ \ \bar{D}_1{}^2(x)\ ]$의 마지막 $(p-\rho_2)$개의 행들은 영(zero)이 되는 기본 행 연산 행렬 $V_2 \triangleq \begin{bmatrix} I_{\delta_1} & 0_{\delta_1\times(p-\sigma_1)} \\ 0_{\delta_2\times\delta_1} & P_2 \\ K_1^2 & K_2^2 \end{bmatrix}$ 이 존재한다. 여기서, $P_2$와 $K_1^2$와 $K_2^2$는 각각 $\delta_2\times(p-\sigma_1)$과 $(p-\sigma_2)\times\sigma_1$과 $(p-\sigma_2)\times(p-\sigma_1)$인 행렬이다. 또 기본 열 연산에 의해서 (2.20)식을 만족시키는

$$\begin{bmatrix} D_1^2(x) \\ \bar{D}_1{}^2(x) \end{bmatrix} \beta^2(x) = \begin{bmatrix} I_{\delta_2} & 0_{\delta_2\times(m-\sigma_2)} \\ \bar{S}^2(x) & 0_{(m-\sigma_2)\times(m-\sigma_2)} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

정칙인 $(m-\sigma_1)\times(m-\sigma_1)$ 행렬 $\beta^2(x)$ 을 찾을 수 있다. 이를 이용하여

$$\bar{u}^1 = -\beta^2(x)\begin{bmatrix} E_1{}^2(x) \\ 0_{(m-\sigma_2)\times 1} \end{bmatrix} - \beta^2(x)\begin{bmatrix} \Pi_1{}^1(x) \\ 0_{(m-\sigma_2)\times\delta_1} \end{bmatrix} u^1 + \beta^2(x)\begin{bmatrix} u^2 \\ \bar{u}^2 \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \alpha^2(x) + \beta_1{}^2(x)\,u^1 + \beta_2{}^2(x)\,u^2 + \bar{\beta}_2{}^2(x)\,\bar{u}^2 \tag{2.21a}$$

$$\alpha^2(x) \triangleq -\beta^2(x)\begin{bmatrix} E_1{}^2(x) \\ 0_{(m-\sigma_2)\times 1} \end{bmatrix} = -\ \beta_2{}^2(x)E_1{}^2(x) \tag{2.21b}$$

$$\beta^2(x) \triangleq [\ \beta_2{}^2(x)\ \ \ \bar{\beta}_2{}^2(x)\ ] \tag{2.21c}$$

$$\beta_1{}^2(x) \triangleq -\beta^2(x)\begin{bmatrix} \Pi_1{}^1(x) \\ 0_{(m-\sigma_2)\times\delta_1} \end{bmatrix} = -\ \beta_2{}^2(x)\Pi_1{}^1(x) \tag{2.21d}$$

라고 정적 궤환 (2.21)을 정의한다. 여기서, $\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \bar{u}^2 \end{bmatrix}$ 는 새로운 입력이고 ( $u^1 \in R^{\delta_1}$, $u^2 \in R^{\delta_2}$, and $\bar{u}^2 \in R^{m-\sigma_2}$), $\beta_2{}^2(x)$ 및 $\bar{\beta}_2{}^2(x)$는 각각 $(m-\sigma_1)\times\delta_2$ 및 $(m-\sigma_1)\times(m-\sigma_2)$ 행렬이다. 그러면, 정적 궤환 (2.21)에 의한 폐루프 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다:

$$\dot{x} = f^1(x) + g_1^1(x)u^1 + \bar{g}_1{}^1(x)\{\ \alpha^2(x) + \beta_1{}^2(x)u^1 + \beta_2{}^2(x)u^2 + \bar{\beta}_2{}^2(x)\,\bar{u}^2\}$$

$$= f^2(x) + g_1{}^2(x)\,u^1 + g_2{}^2(x)\,u^2 + \bar{g}_2{}^2(x)\,\bar{u}^2$$

$$= f^2(x) + g^2(x)\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \bar{u}^2 \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

$$f^2(x) \triangleq f^1(x) + \ \bar{g}_1{}^1(x)\ \alpha^2(x) \tag{2.22b}$$

$$g_1{}^2(x) \triangleq\ g_1{}^1(x) + \ \bar{g}_1{}^1(x)\ \ \beta_1{}^2(x) \tag{2.22c}$$

$$g_2{}^2(x) \triangleq\ \bar{g}_1{}^1(x)\ \ \beta_2{}^2(x) \tag{2.22d}$$

$$\bar{g}_2{}^2(x) \triangleq\ \bar{g}_1{}^1(x)\ \ \bar{\beta}_2{}^2(x) \tag{2.22e}$$

$$g^2(x) \triangleq [\ g_1{}^2(x)\ \ \ g_2{}^2(x)\ \ \ \bar{g}_2{}^2(x)\ ] \tag{2.22f}$$

또,

$$\gamma_2(x) \triangleq P_2 L_{f^2(x)}\,\bar{\gamma}_1(x) \quad \text{and} \quad \bar{\gamma}_2(x) \triangleq K_1^2\gamma_1(x) + K_2^2 L_{f^2(x)}\,\bar{\gamma}_1(x) \tag{2.23}$$

라고 정의하면, (2.19a)식과 (2.21)식에 의하여 (2.24)식을 얻을 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \gamma_2(x)^{(d)} \\ \bar{\gamma}_2(x)^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\sigma_1\times 1} \\ 0_{\delta_2\times 1} \\ \hat{E}^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\delta_2} & 0 \\ \hat{\Pi}_1{}^1(x) & \bar{S}^2(x) & 0_{(p-\sigma_2)\times(m-\sigma_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \bar{u}^2 \end{bmatrix} \tag{2.24a}$$

$$\hat{E}^2(x) = \ \bar{E}_1{}^2(x) - \bar{S}^2(x)E_1^2(x) \tag{2.24b}$$

$$\hat{\Pi}_1{}^1(x) = \ \bar{\Pi}_1{}^1(x) - \bar{S}^2(x)\Pi_1{}^1(x) \tag{2.24c}$$

만일 $[\ \hat{\Pi}_1{}^1(x)\ \ \bar{S}^2(x)\ ] = 0$ (즉 $\rho_2 = \sigma_2$ 이면), 다음의 step 3로 계속 진행한다..

만일 $[\ \hat{\Pi}_1{}^1(x)\ \ \bar{S}^2(x)\ ] \neq 0$ (즉 $\rho_2 > \sigma_2$이면), $\bar{\gamma}_2(x)^{(d)}$ 는 $x$, $u^1$ 및 $u^2$의 함수이며, 이때 (2.25)식과 같이 $U^2$를 정의하고,

$$U^2 \ \triangleq \{\ u_j^1 \in u^1 \mid \frac{\partial\ \bar{\gamma}_2{}^{(d)}(x)}{\partial u_j^1} \neq 0\ \} \cup \{\ u_j^2 \in u^2 \mid \frac{\partial\ \bar{\gamma}_2{}^{(d)}(x)}{\partial u_j^2} \neq 0\ \}$$

$$= \{\ u_j^1 \mid (\ \hat{\Pi}_1{}^1)_j(x) \neq 0\ \} \cup \{\ u_j^2 \mid \ \bar{S}_j{}^2(x) \neq 0\ \} \tag{2.25a}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1{}^1(x) &\triangleq [\ (\ \hat{\Pi}_1{}^1)_1(x)\ \cdots\ (\ \hat{\Pi}_1{}^1)_{\delta_1}(x)\ ] \\ \bar{S}^2(x) &\triangleq [\ \bar{S}_1{}^2(x)\ \cdots\ \ \bar{S}_{\delta_2}{}^2(x)\ ] \end{aligned} \tag{2.25b}$$

(2.25)식에 따라, (2.26)식과 같이 동적 궤환을 정의한다:

$$\text{for } 1\le j\le \delta_1, \quad \begin{array}{lll} \text{if } u_j^1\in U^2, & u_j^1=z_j^1\,; & \dot{z}_j^{\,1}=w_j \\ \text{if } u_j^1\notin U^2, & u_j^1=w_j & \end{array} \tag{2.26a}$$

$$\text{for } 1\le j\le \delta_2, \quad \begin{array}{lll} \text{if } u_j^2\in U^2, & u_j^2=z_j^2\,; & \dot{z}_j^{\,2}=w_{j+\sigma_1} \\ \text{if } u_j^2\notin U^2, & u_j^2=w_{j+\sigma_1} & \end{array} \tag{2.26b}$$

$$\bar{u}_j^{\,2}=w_{j+\sigma_2}, \quad \text{for } 1\le j\le m-\sigma_2 \tag{2.26c}$$

동적 궤환 (2.26)은 $a^2, b^2$ 및 $\psi^2$가 적당한 상수 행렬이라고 하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \bar{u}^2 \end{bmatrix} = a^2 z + b^2 w \tag{2.27a}$$

$$\dot{z}=\psi^2 w \tag{2.27b}$$

여기서, $z\triangleq\begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$ 는 동적 궤환에 의해 도입된 새로운 상태이다.

따라서, $[\ \Pi_1^{\ 1}(x)\quad \bar{S}^2(x)\ ]\neq 0$ 일 때 전체 폐루프의 확장된 시스템은

$$\dot{x}_E=\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f^2(x)+g^2(x)a^2 z \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g^2(x)b^2 \\ \psi^2 \end{bmatrix} w$$
$$\triangleq f_E(x_E)+g_E(x_E)w \tag{2.28a}$$

$$y=h(x_E)=h(x) \tag{2.28b}$$

이다. 이 경우에도 전 step과 마찬가지로 기호의 편의상 $x_E$ 및 $w$ 를 각각 $x$ 및 $u$ 라 두고, step 1으로 되돌아간다.

**Step i:** $i\ge 3$ 에 대해서, 바로 전의 step i-1 에서 얻은 $\bar{\gamma}_{i-1}(x)^{(d)}$ 을 시간 t 에 대해 한번 더 미분을 하면,

$$\bar{\gamma}_{i-1}(x)^{(d+1)}=E^i(x)+\sum_{j=1}^{i-1}\widehat{\Pi}_j^{\ i-1}(x)u^j+D^i(x)\,\bar{u}^{\,i-1} \tag{2.29}$$

$$E^i(x)=L_{f^{i-1}(x)}^{d+1}\ \bar{\gamma}_{i-1}(x)=L_{f^{i-1}(x)}\ \widehat{E}^{\ i-1}(x) \tag{2.30a}$$

$$\widehat{\Pi}_j^{\ i-1}(x)=L_{g_j^{\ i-1}(x)}\ \widehat{E}^{\ i-1}(x),\quad 1\le j\le i-1 \tag{2.30b}$$

$$D^i(x)=L_{\bar{g}_{i-1}^{\ i-1}(x)}\ \widehat{E}^{\ i-1}(x) \tag{2.30c}$$

을 얻을 수 있고, ((2.24)식에 의하여) 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \vdots \\ \gamma_{i-1}(x)^{(d)} \\ \bar{\gamma}_{i-1}(x)^{(d+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0_{\delta_1\times 1} \\ \vdots \\ 0_{\delta_{i-1}\times 1} \\ E^i(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\delta_1} & \cdots & 0 & 0_{\delta_1\times(m-\sigma_{i-1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_{\delta_{i-1}} & 0 \\ \widehat{\Pi}_1^{\ i-1}(x) & \cdots & \widehat{\Pi}_{i-1}^{\ i-1}(x) & D^i(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{i-1} \\ \bar{u}^{\,i-1} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

이때,

$$\sigma_i(x)=\sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{\sigma_{i-1}} & 0_{\sigma_{i-1}\times(m-\sigma_{i-1})} \\ \widehat{\Pi}^{\,i-1}(x) & D^i(x) \end{bmatrix}\right\}=\sigma_{i-1}+\sigma\{D^i(x)\} \tag{2.32a}$$

$$\rho_i(x)=\rho\left\{\begin{bmatrix} I_{\sigma_{i-1}} & 0_{\sigma_{i-1}\times(m-\sigma_{i-1})} \\ \widehat{\Pi}^{\,i-1}(x) & D^i(x) \end{bmatrix}\right\} \tag{2.32b}$$

$$\widehat{\Pi}^{i-1}=[\ \widehat{\Pi}_1^{\ i-1}\ \cdots\ \widehat{\Pi}_{i-1}^{\ i-1}\ ] \tag{2.32c}$$

라고 정의하면, $\rho_i\ge\sigma_i$ 이고 ( $\delta_i\triangleq\sigma_i-\sigma_{i-1}$), (2.31)식의 우변의 두 번째 항의 행렬에 대해 기본 행 연산을 이용하여 (2.33)식을 만족하고

$$V_i\begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \vdots \\ \gamma_{i-1}(x)^{(d)} \\ \bar{\gamma}_{i-1}(x)^{(d+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0_{\sigma_{i-1}\times 1} \\ E_1^{\ i}(x) \\ \bar{E}_1^{\ i}(x) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} I_{\sigma_{i-1}} & 0_{\sigma_{i-1}\times(m-\sigma_{i-1})} \\ \Pi_1^{\ i-1}(x) & D_1^{\ i}(x) \\ \bar{\Pi}_1^{\ i-1}(x) & \bar{D}_1^{\ i}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{i-1} \\ \bar{u}^{\,i-1} \end{bmatrix} \tag{2.33a}$$

$$\sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{\sigma_{i-1}} & 0_{\sigma_{i-1}\times(m-\sigma_{i-1})} \\ \Pi_1^{\ i-1}(x) & D_1^{\ i}(x) \end{bmatrix}\right\}=\sigma_i \tag{2.33b}$$

$(p-\sigma_i)\times m$ 행렬 $[\ \bar{\Pi}_1^{\ i-1}(x)\quad \bar{D}_1^{\ i}(x)\ ]$의 마지막 끝 $(p-\rho_i)$개의 행들은 영이 되는 행 연산 행렬 (2.34)가 존재한다:

$$V_i=\begin{bmatrix} I_{\delta_1} & \cdots & 0 & 0_{\delta_1\times(p-\sigma_{i-1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_{\delta_{i-1}} & 0 \\ 0_{\delta_i\times\delta_1} & \cdots & 0 & P_i \\ K_1^i & \cdots & K_{i-1}^i & K_i^i \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

이때 $P_i$, $K_1^i$, $\cdots$, $K_{i-1}^i$, 및 $K_i^i$ 은 각각 $\delta_i\times(p-\sigma_{i-1})$, $(p-\sigma_i)\times\delta_1$, $\cdots$, $(p-\sigma_i)\times\delta_{i-1}$ 및 $(p-\sigma_i)\times(p-\sigma_{i-1})$ 행렬이다. 또, 기본 열 연산에 의해서 다음의 (2.35)식을 만족시키는

$$\begin{bmatrix} D_1^i(x) \\ \bar{D}_1^{\ i}(x) \end{bmatrix}\beta^i(x)=\begin{bmatrix} I_{\delta_i} & 0_{\delta_i\times(m-\sigma_i)} \\ \bar{S}^{\,i}(x) & 0_{(p-\sigma_i)\times(m-\sigma_i)} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

정칙의 $(m-\sigma_{i-1})\times(m-\sigma_{i-1})$ 행렬 $\beta^i(x)$를 구하여, (2.36)식의

$$\bar{u}^{\,i-1}=-\beta^i(x)\begin{bmatrix} E_1^{\ i}(x) \\ 0_{(m-\sigma_i)\times 1} \end{bmatrix}-\beta^i(x)\begin{bmatrix} \Pi_1^{\ i-1}(x) \\ 0_{(m-\sigma_i)\times\sigma_{i-1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{i-1} \end{bmatrix}+\beta^i(x)\begin{bmatrix} u^i \\ \bar{u}^{\,i} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \alpha^i(x) + \sum_{j=1}^{i} \beta_j{}^i(x)\, u^j + \bar{\beta}_i{}^i(x)\, \bar{u}^i \tag{2.36a}$$

$$\alpha^i(x) \triangleq -\beta^i(x)\begin{bmatrix} E_1{}^i(x) \\ 0 \end{bmatrix} = -\beta_i{}^i(x) E_1{}^i(x) \tag{2.36b}$$

$$\beta^i(x) \triangleq \begin{bmatrix} \beta_i{}^i(x) & \bar{\beta}_i{}^i(x) \end{bmatrix} \tag{2.36c}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1{}^i(x) & \cdots & \beta_{i-1}{}^i(x) \end{bmatrix} \triangleq -\beta^i(x)\begin{bmatrix} \Pi_1{}^{i-1}(x) \\ 0_{(m-\sigma_i)\times\sigma_{i-1}} \end{bmatrix} = -\beta_i{}^i(x)\Pi_1{}^{i-1}(x) \tag{2.36d}$$

정적 궤환을 가하면 전체 폐루프 시스템은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^{i-1}(x) + \sum_{j=1}^{i-1} g_j^{i-1}(x) u^j + \bar{g}_{i-1}{}^{i-1}(x)\left\{ \alpha^i(x) + \sum_{j=1}^{i} \beta_j{}^i(x) u^j + \bar{\beta}_i{}^i(x)\bar{u}^i \right\} \\ &= f^i(x) + \sum_{j=1}^{i} g_j{}^i(x)\, u^j + \bar{g}_i{}^i(x)\, \bar{u}^i \\ &= f^i(x) + g^i(x)\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^i \\ \bar{u}^i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.37a}$$

$$f^i(x) \triangleq f^{i-1}(x) + \bar{g}_{i-1}{}^{i-1}(x)\ \alpha^i(x) \tag{2.37b}$$

$$g_j{}^i(x) \triangleq g_j{}^{i-1}(x) + \bar{g}_{i-1}{}^{i-1}(x)\ \beta_j{}^i(x), \quad 1 \le j \le i-1 \tag{2.37c}$$

$$g_i{}^i(x) \triangleq \bar{g}_{i-1}{}^{i-1}(x)\ \beta_i{}^i(x) \tag{2.37d}$$

$$\bar{g}_i{}^i(x) \triangleq \bar{g}_{i-1}{}^{i-1}(x)\ \bar{\beta}_i{}^i(x) \tag{2.37e}$$

$$g^i(x) \triangleq \begin{bmatrix} g_1{}^i(x) & \cdots & g_i{}^i(x) & \bar{g}_i{}^i(x) \end{bmatrix} \tag{2.37f}$$

이때 $\beta_i{}^i(x)$ 및 $\bar{\beta}_i{}^i(x)$는 각각 $(m-\sigma_{i-1})\times\delta_i$ 및 $(m-\sigma_{i-1})\times(m-\sigma_i)$인 행렬이고, $\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^i \\ \bar{u}^i \end{bmatrix}$는 새로운 입력이다. ( $u^1 \in R^{\delta_1}$, $\cdots$ , $u^i \in R^{\delta_i}$, and $\bar{u}^i \in R^{m-\sigma_i}$ ) 또,

$$\gamma_i(x) \triangleq P_i L_{f^i(x)} \bar{\gamma}_{i-1}(x) \quad \text{and} \quad \bar{\gamma}_i(x) \triangleq \sum_{j=1}^{i-1} K_j^i \gamma_j(x) + K_i^i L_{f^i(x)} \bar{\gamma}_{i-1}(x) \tag{2.38}$$

라고 정의하면, (2.33a)식과 (2.36)식에 의하여 (2.39)식을 얻을 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(d)} \\ \vdots \\ \gamma_i(x)^{(d)} \\ \bar{\gamma}_i(x)^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\sigma_{i-1}\times 1} \\ 0_{\delta_i\times 1} \\ \tilde{E}^i(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\sigma_{i-1}} & 0 & 0_{\sigma_{i-1}\times(m-\sigma_i)} \\ 0 & I_{\delta_i} & 0 \\ \tilde{\Pi}_1{}^{i-1}(x) & \bar{S}^i(x) & 0_{(p-\sigma_i)\times(m-\sigma_i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{i-1} \\ u^i \\ \bar{u}^i \end{bmatrix} \tag{2.39a}$$

$$\tilde{E}^i(x) = \bar{E}_1{}^i(x) - \bar{S}^i(x) E_1^i(x) \tag{2.39b}$$

$$\tilde{\Pi}_1{}^{i-1}(x) = \bar{\Pi}_1{}^{i-1}(x) - \bar{S}^i(x)\Pi_1{}^{i-1}(x) \tag{2.39c}$$

만일 $\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1{}^{i-1}(x) & \bar{S}^i(x) \end{bmatrix} = 0$ (즉 $\rho_i = \sigma_i$ ) 이면, 다음의 step $i+1$로 계속 진행한다.

만일 $\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1{}^{i-1}(x) & \bar{S}^i(x) \end{bmatrix} \neq 0$ (즉 $\rho_i > \sigma_i$ ) 이면, $\bar{\gamma}_i(x)^{(d)}$는 $x$, $u^1$, $\cdots$, 및 $u^i$의 함수이며, 이때 (2.40)식과 같이 $U^i$를 정의하고,

$$\begin{aligned} U^i &\triangleq \bigcup_{\ell=1}^{i} \left\{ u_j^\ell \in u^\ell \ \middle|\ \frac{\partial\ \bar{\gamma}_i{}^{(d)}(x)}{\partial u_j^\ell} \neq 0 \right\} \\ &= \bigcup_{\ell=1}^{i-1} \left\{ u_j^\ell \ \middle|\ (\tilde{\Pi}_1{}^\ell)_j(x) \neq 0 \right\} \cup \left\{ u_j^i \ \middle|\ \bar{S}_j{}^i(x) \neq 0 \right\} \end{aligned} \tag{2.40a}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1{}^{i-1}(x) &\triangleq \begin{bmatrix} (\tilde{\Pi}_1{}^{i-1})_1(x) & \cdots & (\tilde{\Pi}_1{}^{i-1})_{\delta_{i-1}}(x) \end{bmatrix} \\ \bar{S}^i(x) &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{S}_1{}^i(x) & \cdots & \bar{S}_{\delta_i}{}^i(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.40b}$$

(2.40)식에 따라, (2.41)식과 같이 동적 궤환을 정의한다:

$$\text{for } 1 \le j \le \delta_1, \quad \begin{aligned} &\text{if } u_j^1 \in U^i, \quad u_j^1 = z_j^1;\ \ \dot{z}_j{}^1 = w_j \\ &\text{if } u_j^1 \notin U^i, \quad u_j^1 = w_j \end{aligned} \tag{2.41a}$$

$$\cdots$$

$$\text{for } 1 \le j \le \delta_i, \quad \begin{aligned} &\text{if } u_j^i \in U^i, \quad u_j^i = z_j^i;\ \ \dot{z}_j{}^i = w_{j+\sigma_{i-1}} \\ &\text{if } u_j^i \notin U^i, \quad u_j^i = w_{j+\sigma_{i-1}} \end{aligned} \tag{2.41b}$$

$$\bar{u}_j{}^i = w_{j+\sigma_i}, \quad \text{for } 1 \le j \le m-\sigma_i \tag{2.41c}$$

$a^i$, $b^i$ 및 $\phi^i$ 을 각각 적당한 상수 행렬, $z \triangleq \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^i \end{bmatrix}$가 새로운 상태라고 하여, 동적 궤환 (2.41)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^i \\ \bar{u}^i \end{bmatrix} = a^i z + b^i w \tag{2.42a}$$

$$\dot{z} = \phi^i w \tag{2.42b}$$

따라서, $\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1{}^{i-1}(x) & \bar{S}^i(x) \end{bmatrix} \neq 0$ 일 때, 전체 폐루프의 확장된 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}_E = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f^i(x) + g^i(x) a^i z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g^i(x) b^i \\ \phi^i \end{bmatrix} w \\ &\triangleq f_E(x_E) + g_E(x_E) w \end{aligned} \tag{2.43a}$$

$$y = h(x_E) = h(x) \tag{2.43b}$$

이다. 이 경우에도 전 step과 마찬가지로 기호의 편의상 $x_E$ 및 $w$ 를 각각 $x$ 및 $u$ 라 두고, step 1으로 되돌아간다.

만일 $\sigma_i = \sigma_{i-1}$ 이면 step은 degenerate 되어 $P_i$ 는 행이 없는 행렬 그리고 $K_i^i$ 는 단위행렬(identity matrix)로 각각 간주할 수 있다. 만일 $\sigma_x = p$ 인 정수 $x$ 가 존재하면 algorithm은 종료되며, 그런 정수가 존재하지 않는 경우에는 $x$ 를 degenerate 되지 않는 algorithm의 마지막 step이라고 정의한다. 이때, $\sigma_x = \sigma_{x+1} = \sigma_{x+2} = \cdots$ 이고 $D$ 행렬의 $\sigma-$rank는 동적 궤환에 의해서 더 이상 증가하지 않게 된다. 만일 모든 $i$ 에 대해서 $\sigma_i = \rho_i$ 이면, 시스템 (1.1)은 정적 궤환에 의해 입출력 선형화가 가능하고 본 절의 structure algorithm은 Isidori and Ruberti의 algorithm [10] 과 같게 된다.

우리의 structure algorithm은 $\sigma_i < \rho_i$ 인 경우 적당한 동적 궤환을 가하고 그에 의한 전체 폐루프의 확장된 시스템에 대해 다시 처음부터 structure algorithm을 수행하게된다. 따라서 algorithm이 종료되었을 때의 마지막 $x$ step들은 동적 궤환을 포함하지 않는다. 즉, 본 절의 structure algorithm은 크게 두 부분으로 생각할 수 있다. 첫 번째는 너무 일찍 나타나는 입력들을 보상하기(precompensating) 위한 동적 궤환을 구하는 부분이고, 두 번째는 첫 번째 부분에서 얻은 전체 폐루프의 확장된 시스템의 정적 궤환을 구하는 것이다. 그러나 정적 궤환 structure algorithm [10] 의 경우와 달리 본 algorithm에서는 $i \geq x$에 대해 $\sigma_i$ 가 $\rho_i$ 와 같지 않을 수도 있다.

structure algorithm이 끝났을 때 $x$ step에서 확장 시스템은 (2.44)식과 같지만(이때는 수식의 편의상 $x$가 확장된 상태변수를 포함하고 있다.),

$$\dot{x} = f^x(x) + g^x(x) \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^x \\ u^x \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

이제 원래의 상태변수와 구별하기 위해 확장된 상태변수를 $x_E = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$로 나타내면 (2.44)식은 다음의 (2.45)식으로 쓸 수 있다:

$$\dot{x}_E = f^x(x_E) + g^x(x_E) \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^x \\ u^x \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

또, structure algorithm에서 정의된 동적 궤환식을 (2.46b)와 (2.46c)로 표현하여 (2.45)식을 (2.46)식으로 나타낼 수도 있다:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.46a}$$

$$u = \alpha(x, z) + \beta(x, z)v \tag{2.46b}$$

$$\dot{z} = \phi(x, z) + \psi(x, z)v \tag{2.46c}$$

여기서, $v \triangleq \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^x \\ u^x \end{bmatrix}$ 는 새로운 입력이다.

## Ⅲ. Dynamic 입출력 선형화

이 절에서는 동적 궤환 입출력 선형화의 필요 충분 조건을 유도한다.

**보조 정리 3.1:** 만일 시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다고 가정하자. 그러면 임의의 정칙의 정적 궤환을 가한 시스템 (1.1)도 또한 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다.

<u>증명:</u>

시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다고 가정하자. 그러면 시스템 (1.1)의 확장된 시스템이 선형의 입출력 관계를 갖도록 하는 동적 궤환 (3.1)이 존재한다.

$$u = a(x, z) + b(x, z)v \tag{3.1a}$$

$$\dot{z} = \phi(x, z) + \psi(x, z)v \tag{3.1b}$$

임의의 정적 궤환 $u = \alpha(x) + \beta(x)\tilde{u}$ 을 가한 시스템 (1.1)의 폐루프 시스템을 다음의 (3.2)식으로 쓸 때,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)\tilde{u} \\ &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)\tilde{u} \end{aligned} \tag{3.2}$$

다음의 동적 궤환 (3.3)을 가한 시스템 (3.2)의 전체 확장된 시스템은 명백하게 선형의 입출력 관계를 갖는다.

$$\tilde{u} = \tilde{a}(x, z) + \tilde{b}(x, z)v \tag{3.3a}$$

$$\dot{z} = \phi(x, z) + \psi(x, z)v \tag{3.3b}$$

$$\tilde{a}(x, z) = \beta(x)^{-1}\{-\alpha(x) + a(x, z)\} \tag{3.3c}$$

$$\tilde{b}(x, z) = \beta(x)^{-1}b(x, z) \tag{3.3d}$$

(Q.E.D.)

**보조 정리 3.2 :** 만일 시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다고 가정하면, 전 절의 structure algorithm에 의해서 얻어진 동적 궤환

(2.46b) 및 (2.46c)을 가한 시스템 (1.1)의 확장된 시스템도 또한 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다.

증명:

시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다고 가정하자. 그러면 보조정리 3.1에 의해서 폐루프 시스템 (2.9)도 또한 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다. 즉 동적 궤환 (3.4)식을 가한

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1(x,z) \\ \bar{a}^1(x,z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1(x,z) \\ \bar{b}^1(x,z) \end{bmatrix} v \tag{3.4a}$$

$$\dot{z} = \phi(x,z) + \psi(x,z)v \tag{3.4b}$$

시스템 (2.9)의 확장된 시스템 (3.5)는 선형의 입출력 관계를 갖는다.

$$\dot{x}_E = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = f_E{}^1(x_E) + g_E{}^1(x_E)v \tag{3.5a}$$

$$f_E{}^1(x_E) = \begin{bmatrix} f^1(x) + g_1^1(x)a^1(x,z) + \bar{g}_1{}^1(x,z)\,\bar{a}^1(x,z) \\ \phi(x,z) \end{bmatrix} \tag{3.5b}$$

$$g_E{}^1(x_E) = \begin{bmatrix} g_1^1(x)b^1(x,z) + \bar{g}_1{}^1(x,z)\,\bar{b}^1(x,z) \\ \psi(x,z) \end{bmatrix} \tag{3.5c}$$

이제 $\sigma_1 = 1$로 가정하면, 동적 보상된 시스템 (2.14)는 다음으로 다시 쓸 수 있고, 또한 이 시스템 (2.14)가 동적 궤환 입출력 선형화가 가능함을 보이자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^1(x) + g_1{}^1(x)\,\xi^1 + \bar{g}_1{}^1(x)\,\bar{\mu}^1 \\ \dot{\xi}^1 &= \mu^1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

(3.4a) 및 (2.7)식에 의해 $b^1(x,z)$는 상수가 되어야 한다. 만일 $b^1(x,z) = 0$ 이면 $u^1 = a^1(x,z)$ 이므로, 다음의 (3.6)식과 같이 두면,

$$\xi^1 = a^1(x,z) \tag{3.6}$$

동적 궤환 (3.4)의 regular 조건으로부터 다음 식이 만족함을 쉽게 알 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial z} a^1(x,z) \neq 0 \tag{3.7}$$

새로운 상태 $\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$를 다음의 (3.8)식과 같이 정의하면(이때, $\frac{\partial}{\partial x_E} T(x_E)$ 는 정칙 행렬이다),

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \xi^1 \\ \bar{\xi}^1 \end{bmatrix} = T(x,z) = \begin{bmatrix} x \\ a^1(x,z) \\ \bar{T}^1(x,z) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$\xi$ 의 상태 방정식은 다음의 (3.9)식과 같이 되고,

$$\dot{\xi} = \hat{\phi}(x,\xi) + \hat{\psi}(x,\xi)v \tag{3.9a}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}^1(x,\xi) \\ \hat{\phi}(x,\xi) \end{bmatrix} = T_*(f_E{}^1(x_E)) \tag{3.9b}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{g}^1(x,\xi) \\ \hat{\psi}(x,\xi) \end{bmatrix} = T_*(g_E{}^1(x_E)) \tag{3.9c}$$

또한 다음의 (3.10)식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a^1(x,z) &= L_{f_E{}^1} a^1(x_E) + L_{g_E{}^1} a^1(x_E)v \\ &= \tilde{a}^1(x,\xi) + \tilde{b}^1(x,\xi)v \end{aligned} \tag{3.10a}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}^1(x,\xi) &= L_{f_E{}^1} a^1(x_E)\,\big|_{x_E = T^{-1}(x,\xi)} \\ \tilde{b}^1(x,\xi) &= L_{g_E{}^1} a^1(x_E)\,\big|_{x_E = T^{-1}(x,\xi)} \end{aligned} \tag{3.10b}$$

새로운 입력을 다음의 (3.11)식으로 정의 하면,

$$\begin{bmatrix} \mu^1 \\ \bar{\mu}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}^1(x,\xi) \\ \hat{a}^1(x,\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}^1(x,\xi) \\ \hat{b}^1(x,\xi) \end{bmatrix} v \tag{3.11a}$$

$$\hat{a}^1(x,\xi) = \bar{a}^1(x,z)\,\big|_{x_E = T^{-1}(x,\xi)} \tag{3.11b}$$

$$\hat{b}^1(x,\xi) = \bar{b}^1(x,z)\,\big|_{x_E = T^{-1}(x,\xi)} \tag{3.11c}$$

동적 궤환 (3.11a) 및 (3.9a)를 가한 (2.14)의 확장된 시스템의 입출력 관계가 동적 궤환 (3.4)를 가한 (2.9)의 확장된 시스템의 입출력 관계와 같음을 쉽게 알 수 있다. 따라서, $b^1(x,z) = 0$ 일때 시스템 (2.14)는 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다.

만일 $b^1(x,z) \neq 0$ 인 경우에는 일반성을 잃지 않고 동적 궤환을 (3.12)식으로 가정할 수 있다.

$$b^1(x,z) = [\,1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0\,] \tag{3.12a}$$

$$u^1 = a^1(x,z) + v^1 \tag{3.12b}$$

새로운 입력을 $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \bar{v}^1 \end{bmatrix}$라 놓고, 다음의 동적 궤환 (3.13)을 고려하자.

$$\begin{aligned} v^1 &= \eta \;;\; \dot{\eta} = w^1 \\ \bar{v}^1 &= \bar{w}^1 \end{aligned} \tag{3.13}$$

그러면 동적 궤환 (3.4) 및 (3.13)을 가한 (2.9)의 확장된 시스템 (3.14)의 입출력관계 선형임을 쉽게 알 수 있다.

$$\dot{x} = f^1(x) + g_1{}^1(x)\,u^1 + \bar{g}_1{}^1(x)\,\bar{u}^1 \tag{3.14a}$$

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2(x,z,\eta) \\ \bar{a}^2(x,z,\eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2(x,z,\eta) \\ \bar{b}^2(x,z,\eta) \end{bmatrix} w \tag{3.14b}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \phi^2(x,z,\eta) + \psi^2(x,z,\eta)w \tag{3.14c}$$

$$a^2(x,z,\eta) = a^1(x,z) + \eta \tag{3.14d}$$

$$b^2(x,z,\eta) = 0 \tag{3.14e}$$

$$\bar{a}^2(x,z,\eta) = \bar{a}^1(x,z) + \bar{b}^1(x,z)\begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.14f}$$

$$\bar{b}^2(x,z,\eta) = \bar{b}^1(x,z)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.14g}$$

$$\phi^2(x,z,\eta) = \begin{bmatrix} \phi(x,z) + \psi(x,z)\begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.14h}$$

$$\psi^2(x,z,\eta) = \begin{bmatrix} 0 & \psi(x,z)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-1} \end{bmatrix} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14i}$$

$$w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \bar{w}^1 \end{bmatrix} \tag{3.14j}$$

따라서, $b^2(x,z,\eta)=0$ 이므로 확장된 시스템 (2.14)는 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다. 지금까지 $\sigma_1=1$인 경우에 대해 증명하였다. 비슷한 방법으로, $\sigma_1>1$인 경우에도 시스템 (2.14)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능함을 알 수 있다. 이와 같은 방법으로 structure algorithm에 의해서 얻어진 동적 궤환을 가한 시스템 (1.1)의 확장된 시스템도 또한 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다.

(Q.E.D.)

**보조 정리 3.3** : [10] 시스템 (1.1)이 정적 궤환 입출력 선형화가 가능하기 위한 필요충분 조건은 다음과 같다

$$\sigma\{\Theta_i(x)\} = \rho\{\Theta_i(x)\}, \quad i\ge 0 \tag{3.15}$$

이때 Toeplitz행렬 $\Theta_i(x)$ 들은 식(3.16) 및 (3.17)로 정의되고,

$$\Theta_i(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & \cdots & T_i(x) \\ 0 & T_0(x) & \cdots & T_{i-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_0(x) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$T_j(x) = L_{g^x(x)} L^j_{f^x(x)} h(x)^{(d-1)}, \quad \text{for } j\ge 0 \tag{3.17}$$

$d-1$ 은 출력 $y=h(x)$의 특성수(characteristic number)이다.

<u>증명</u>: [10] 참조.

**보조 정리 3.4**: 만일 시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하면, 다음의 (3.18)식이 성립한다.

$$L_{g^x(x_E)}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} = \text{constant} \tag{3.18}$$

이때 $g^x(x_E)$ 및 $\bar{\gamma}_x(x)$는 3 절의 structure algorithm에서 얻어지고, $d-1$ 는 출력 (3.19)의 특성수이다.

$$\begin{bmatrix} \Gamma(x) \\ \bar{\gamma}_x(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_x(x) \\ \bar{\gamma}_x(x) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

<u>증명</u>:

$\sigma_x=p$ 인 경우에는 (3.18)식이 명백히 성립하므로, $\delta_x<p$ 인 경우를 고려하자.(이때 $\bar{\gamma}_x(x)$는 $(p-\delta_x)-$개의 벡터 함수이다). 시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다고 가정하자. structure algorithm에 의해 (2.47b)식과 (2.47c)식의 regular한 동적 궤환을 가하면, 보조정리 3.2에 의해서, 확장된 시스템 (2.45) 또는 (2.46)도 또한 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다. 따라서, 다음의 (3.20)식의 regular한 동적 궤환이

$$v = a(x_E,\xi) + b(x_E,\xi)\lambda \tag{3.20a}$$

$$\dot{\xi} = \phi^1(x_E,\xi) + \psi^1(x_E,\xi)\lambda \tag{3.20b}$$

존재하여, 전체의 확장된 시스템 (3.21)은 선형의 입출력 관계를 갖는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^x(x_E) + g^x(x_E)a(x_E,\xi) \\ \phi^1(x_E,\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g^x(x_E)b(x_E,\xi) \\ \psi^1(x_E,\xi) \end{bmatrix}\lambda$$
$$= f_E(x_E,\xi) + g_E(x_E,\xi)\lambda \tag{3.21}$$

여기서, $\lambda$ 는 새로운 입력이다. 시스템 (2.45)의 입력을 다음과 같이 두면,

$$v \triangleq \begin{bmatrix} v^1 \\ \bar{u}^x \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

structure algorithm의 정의에 의해서 $(m-\sigma_x)$개의 입력 $\bar{u}^x$ 는 출력에 영향을 주지 않는다. 이제

$$v^1 = -a^1(x_E,\xi) + b^1(x_E,\xi)\lambda \tag{3.23}$$

$$\sigma\left\{\frac{\partial v^1}{\partial \lambda}\right\} = \sigma\{b^1(x_E,\xi)\} = d_1 \tag{3.24}$$

라고 놓으면, $W_1 b^1(x_E,\xi)$의 처음 $d_1$ 행은 서로 선형 독립(linearly independent)이 되는 $\sigma_x\times\sigma_x$ 순열(permutation) 행렬 $W_1$이 존재하고, 다음의 (3.25)식을

$$W_1\, b^1(x_E,\xi)\hat{\beta}^1(x_E,\xi)=\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_1)\times(m-d_1)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

만족시키는 $m\times m$ 정칙 행렬 $\hat{\beta}^1(x_E,\xi)$이 존재한다. 여기서, $*$ 는 $x_E$ 및 $\xi$ 의 함수로 구성된 $(\sigma_x-d_1)\times d_1$ 행렬이다. 그러므로 다음의 정칙의 정적 궤환 (3.26a)를

$$\lambda=\hat{\beta}^1(x_E,\xi)\{\mu^1+\begin{bmatrix} \bar{\alpha}^1(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix}\} \quad (3.26a)$$

가하여, 다음의 시스템 (3.26b)를

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}=f_E(x_E,\xi)+g_E(x_E,\xi)\hat{\beta}^1(x_E,\xi)\begin{bmatrix} \bar{\alpha}^1(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix}+g_E(x_E,\xi)\hat{\beta}^1(x_E,\xi)\mu^1$$
$$\triangleq \bar{f}_E^1(x_E,\xi)+\bar{g}_E^1(x_E,\xi)\mu^1 \quad (3.26b)$$

$$\bar{\alpha}^1(x_E,\xi)=W_1\,\alpha^1(x_E,\xi) \quad (3.26c)$$

얻을 수 있고, 또한 다음의 (3.27)식이

$$L^{d-1}_{\bar{f}_E^1(x_E,\xi)}\Gamma(x)=L^{d-1}_{f_E(x_E,\xi)}\Gamma(x)=L^{d-1}_{f^*(x_E)}\Gamma(x) \quad (3.27a)$$

$$L_{g_E(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\bar{f}_E^1(x_E,\xi)}\Gamma(x)=L_{g^*(x_E)}L^{d-1}_{f^*(x_E)}\Gamma(x)\ \ b(x_E,\xi)=b^1(x_E,\xi) \quad (3.27b)$$

성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\Upsilon^1(x)\triangleq W_1\Gamma(x) \quad (3.28)$$

라고 두면, 식(3.25) 및 (3.27)에 의해, 다음의 (3.29)식이 성립한다.

$$L_{\bar{g}_E^1(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\bar{f}_E^1(x_E,\xi)}\Upsilon^1(x)=L_{g_E(x_E,\xi)}L^{d-1}_{f_E(x_E,\xi)}\Upsilon^1(x)\ \ \hat{\beta}^1(x_E,\xi)$$
$$=W_1 b^1(x_E,\xi)\,\hat{\beta}^1(x_E,\xi)=\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_1)\times(m-d_1)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$W_1$은 정칙 상수 행렬이므로 다음의 세 문장은 서로 동치(equivalent)임을 쉽게 알 수 있다:

(i) $h(x)$를 출력으로 한 시스템 (3.21)은 선형의 입출력관계를 갖는다.

(ii) $\Gamma(x)$를 출력으로 한 시스템 (3.21)은 선형의 입출력관계를 갖는다.

(iii) $\Upsilon^1(x)$를 출력으로 한 시스템 (3.21)은 선형의 입출력관계를 갖는다.

시스템 (3.26b)가 정적 궤환 입출력 입출력 선형화가 가능하므로, 보조정리 3.3에 의해 다음의

$$\sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_1)\times(m-d_1)} \end{bmatrix}\right\}=\rho\left\{\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_1)\times(m-d_1)} \end{bmatrix}\right\} \quad (3.30)$$

(3.30)식이 성립하고, 이것은 $*$ 가 상수행렬임을 의미한다. 이제 다음과 같이 두면,

$$\hat{\Upsilon}^1(x)\triangleq P^1\Upsilon^1(x)=\hat{P}^1\Gamma(x)=\begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}^{1,1}(x) \\ \hat{\Upsilon}^{1,2}(x) \end{bmatrix} \quad (3.31a)$$

$$P^1\triangleq\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ -* & I_{(\sigma_x-d_1)\times(\sigma_x-d_1)} \end{bmatrix},\quad \hat{P}^1\triangleq P^1W_1 \quad (3.31b)$$

$$\hat{\Upsilon}^{1,1}(x)\in R^{d_1},\quad \hat{\Upsilon}^{1,2}(x)\in R^{\sigma_x-d_1} \quad (3.31c)$$

$\hat{P}^1$이 nonsingular 상수 행렬이므로, 시스템 (3.21)이 $\hat{\Upsilon}^1(x)$를 출력으로 하여 선형의 입출력관계를 갖는 것과 $\Gamma(x)$를 출력으로 하여 선형의 입출력관계를 갖는 것은 서로 동치임을 쉽게 알 수 있다. 다음과 같이 두면,

$$\hat{v}^1\triangleq \hat{P}^1 v^1 \quad (3.32)$$

출력은 다음 (3.33)식으로 쓸 수 있다.

$$\Gamma(x)^{(d)}=v^1 \quad (3.33a)$$

$$\hat{\Upsilon}^1(x)^{(d)}=\hat{v}^1 \quad (3.33b)$$

$$\hat{v}^1=-\hat{\alpha}^1(x_E,\xi)+\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ 0 & 0_{(\sigma_x-d_1)\times(m-d_1)} \end{bmatrix}\mu^1 \quad (3.33c)$$

$$\hat{\alpha}^1(x_E,\xi)=\begin{bmatrix} 0_{d_1\times d_1} & 0 \\ -* & I_{(\sigma_x-d_1)\times(\sigma_x-d_1)} \end{bmatrix}\bar{\alpha}^1(x_E,\xi)\triangleq\begin{bmatrix} 0_{d_1\times 1} \\ \hat{\alpha}^{1,2}(x_E,\xi) \end{bmatrix} \quad (3.33d)$$

변환된 입력 $\hat{v}^1$과 정적 궤환의 새로운 입력 $\mu^1$을 다음 식과 같이 정의하고,

$$\hat{v}^1\triangleq\begin{bmatrix} \hat{v}^{1,1} \\ \hat{v}^{1,2} \end{bmatrix},\quad \mu^1\triangleq\begin{bmatrix} \mu^{1,1} \\ \mu^{1,2} \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

$$\hat{v}^{1,1}\in R^{d_1},\ \hat{v}^{1,2}\in R^{\sigma_x-d_1},\ \mu^{1,1}\in R^{d_1},\ \mu^{1,2}\in R^{m-d_1} \quad (3.34b)$$

새로운 입력 $\mu^1$에 의존하지 않는 $\hat{v}^{1,2}$의 $\mu^1$에 대한 영향을 구하기 위해 미분을 구하여 다음의 (3.35)식을 얻는다.

$$\hat{v}^{1,1}=\mu^{1,1} \quad (3.35a)$$

$$\hat{v}^{1,2\,(1)}=-\alpha^2(x_E,\xi)+b^2(x_E,\xi)\mu^1 \quad (3.35b)$$

$$\alpha^2(x_E,\xi)\triangleq L_{\bar{f}_E^1}\,\hat{\alpha}^{1,2}(x_E,\xi) \quad (3.35c)$$

$$b^2(x_E,\xi)\triangleq -L_{\bar{g}_E^1}\,\hat{\alpha}^{1,2}(x_E,\xi) \quad (3.35d)$$

이제 또 다시 다음 식과 같이 두면

$$\sigma\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\ \hat{v}^{1,1}}{\partial\mu^1} \\ \dfrac{\partial\ \hat{v}^{1,2\,(1)}}{\partial\mu^1} \end{bmatrix}\right\} = \sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0_{d_1\times(m-d_1)} \\ b^2(x_E,\xi) & \end{bmatrix}\right\} = d_2 \tag{3.36}$$

명백하게 $d_2 \geq d_1$이다. 또, 행렬 $W_2\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0_{d_1\times(m-d_1)} \\ b^2(x_E,\xi) & \end{bmatrix}$의 처음 $d_2$행이 선형독립이 되도록 하는 $\sigma_x\times\sigma_x$ 순열 행렬 $W_2 = \begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0_{d_1\times(\sigma_x-d_1)} \\ 0_{(\sigma_x-d_1)\times d_1} & \overline{W_2} \end{bmatrix}$를 구하고,

$$W_2\begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ b^2(x_E,\xi) & \end{bmatrix}\hat{\beta}^2(x_E,\xi) = \begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix} \tag{3.37a}$$

$$\hat{\beta}^2(x_E,\xi) = \begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0_{d_1\times(m-d_1)} \\ 0_{(m-d_1)\times d_1} & \overline{\beta}^2(x_E,\xi) \end{bmatrix} \tag{3.37b}$$

(3.37)식이 만족하는 $m\times m$ 기본 열 연산 행렬 $\hat{\beta}^2(x_E,\xi)$ 를 구하여(이때 $*$ 는 $x_E$ 와 $\xi$의 함수로 구성된 $(\sigma_x-d_2)\times d_2$ 행렬이다), 다음과 같은 (3.38a)식의 정칙의 정적 궤환을 가하면, (3.38b)식 및 (3.38c)식을 얻는다:

$$\begin{aligned} \lambda &= \hat{\beta}^1(x_E,\xi)\left\{\mu^1 + \begin{bmatrix} \overline{\alpha}^1(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \hat{\beta}^1(x_E,\xi)\hat{\beta}^2(x_E,\xi)\left\{\mu^2 + \begin{bmatrix} \overline{\alpha}^2(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix}\right\} + \hat{\beta}^1(x_E,\xi)\begin{bmatrix} \overline{\alpha}^1(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.38a}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \overline{f}_E^{\,1}(x_E,\xi) + \overline{g}_E^{\,1}(x_E,\xi)\hat{\beta}^2(x_E,\xi)\begin{bmatrix} \overline{\alpha}^2(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix} + \overline{g}_E^{\,1}(x_E,\xi)\hat{\beta}^2(x_E,\xi)\mu^2 \\ &\triangleq \overline{f}_E^{\,2}(x_E,\xi) + \overline{g}_E^{\,2}(x_E,\xi)\mu^2 \end{aligned} \tag{3.38b}$$

$$\overline{\alpha}^2(x_E,\xi) = W_2\begin{bmatrix} 0_{d_1\times 1} \\ \alpha^2(x_E,\xi) \end{bmatrix} \tag{3.38c}$$

이때, 다음과 같이 두면,

$$\Upsilon^2(x) \triangleq W_2\hat{\Upsilon}^1(x) \triangleq \begin{bmatrix} \Upsilon^{2,1}(x) \\ \Upsilon^{2,2}(x) \\ \Upsilon^{2,3}(x) \end{bmatrix} \tag{3.39a}$$

$$\Upsilon^{2,1}(x)\in R^{d_1},\quad \Upsilon^{2,2}(x)\in R^{d_2-d_1},\quad \Upsilon^{2,3}(x)\in R^{\sigma_x-d_2} \tag{3.39b}$$

$\Upsilon^{2,1}(x) = \hat{\Upsilon}^{1,1}(x)$ 이고,

$$\begin{bmatrix} \Upsilon^{2,1}(x)^{(d)} \\ \Upsilon^{2,2}(x)^{(d+1)} \\ \Upsilon^{2,3}(x)^{(d+1)} \end{bmatrix} = W_2\begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}^{1,1}(x)^{(d)} \\ \hat{\Upsilon}^{1,2}(x)^{(d+1)} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

이다. (3.35), (3.37a) 및 (3.38c)식에 의해, 변환된 출력은 다음의 (3.41)식을 만족시킨다:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}^{1,1}(x)^{(d)} \\ \hat{\Upsilon}^{1,2}(x)^{(d+1)} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} 0_{d_1\times 1} \\ \alpha^2(x_E,\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0_{d_1\times(m-d_1)} \\ b^2(x_E,\xi) & \end{bmatrix}\mu^1 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2(x_E,\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ b^2(x_E,\xi) & \end{bmatrix}\hat{\beta}^2(x_E,\xi)\left\{\mu^2 + \begin{bmatrix} \overline{\alpha}^2(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix}\right\} \\ &= -W_2^{-1}\overline{\alpha}^2(x_E,\xi) + W_2^{-1}\begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix}\left\{\mu^2 + \begin{bmatrix} \overline{\alpha}^2(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1} \end{bmatrix}\right\} \end{aligned} \tag{3.41a}$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon^{2,1}(x)^{(d)} \\ \Upsilon^{2,2}(x)^{(d+1)} \\ \Upsilon^{2,3}(x)^{(d+1)} \end{bmatrix} = -\hat{\alpha}^2(x_E,\xi) + \begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix}\mu^2 \tag{3.41b}$$

$$\begin{bmatrix} L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,1}(x) \\ L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,2}(x) \\ L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,3}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix} \tag{3.41c}$$

$$\hat{\alpha}^2(x_E,\xi) = \begin{bmatrix} 0_{d_2\times d_2} & 0 \\ -* & I_{(\sigma_x-d_2)\times(\sigma_x-d_2)} \end{bmatrix}\overline{\alpha}^2(x_E,\xi) \triangleq \begin{bmatrix} 0_{d_2\times 1} \\ \hat{\alpha}^{2,3}(x_E,\xi) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}^{2,3}(x_E,\xi)\in R^{\sigma_x-d_2} \tag{3.41d}$$

$W_2$는 정칙의 상수 행렬이므로 $\Upsilon^2(x)$를 출력으로 하여 시스템 (3.21)이 선형의 입출력관계를 갖는 것과 $\Upsilon^1(x)$를 출력으로 하여 시스템 (3.21)이 선형의 입출력관계를 갖는 것은 서로 동치임을 쉽게 알 수 있다. (3.38b)식의 페루프 시스템은 정적 궤환 입출력 선형화가 가능하므로 보조정리 3.3에 의해 다음의 (3.42)식이 성립한다:

$$\sigma\{\Theta_1\} = \rho\{\Theta_1\} \tag{3.42a}$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^2(x) & L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^2(x) \\ 0 & L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^2(x) \end{bmatrix} \tag{3.42b}$$

다음의 (3.43)식에 의해,

$$L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^2(x) = \begin{bmatrix} I_{d_1\times d_1} & 0 \\ 0 & 0_{(\sigma_x-d_1)\times(m-d_1)} \end{bmatrix} \tag{3.43a}$$

$$L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^2(x) = \begin{bmatrix} 0_{d_1\times d_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{(d_2-d_1)\times(d_2-d_1)} & 0 \\ & * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix} \tag{3.43b}$$

(3.42)식으로부터, (3.44)식이

$$\sigma\left\{\begin{bmatrix} L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,1}(x) \\ L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,2}(x) \\ L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,3}(x) \end{bmatrix}\right\} = \rho\left\{\begin{bmatrix} L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,1}(x) \\ L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,2}(x) \\ L_{\overline{g}_E^2(x_E,\xi)}L^{d}_{\overline{f}_E^2(x_E,\xi)}\Upsilon^{2,3}(x) \end{bmatrix}\right\} \tag{3.44}$$

성립함을 쉽게 알 수 있다. 따라서, (3.41c)식에 의해,

$$\sigma\left\{\begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix}\right\}=\rho\left\{\begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ * & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix}\right\} \tag{3.45}$$

이고, 이 식은 $*$ 가 상수 행렬임을 의미한다. 이제 다음과 같이 두면,

$$\hat{P}^2 \triangleq P^2 W_2 \tag{3.46a}$$

$$\hat{\Gamma}^2(x)\triangleq P^2\Gamma^2(x)=\hat{P}^2\hat{\Gamma}^1(x)=\hat{P}^2\hat{P}^1\Gamma^1(x)\triangleq\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}^{2,1}(x)\\ \hat{\Gamma}^{2,2}(x)\\ \hat{\Gamma}^{2,3}(x)\end{bmatrix} \tag{3.46b}$$

$$\hat{v}^2\triangleq\hat{P}^2\hat{v}^1=\hat{P}^2\hat{P}^1v^1\triangleq\begin{bmatrix}\hat{v}^{2,1}\\ \hat{v}^{2,2}\\ \hat{v}^{2,3}\end{bmatrix} \tag{3.46c}$$

$$\mu^2\triangleq\begin{bmatrix}\mu^{2,1}\\ \mu^{2,2}\\ \mu^{2,3}\end{bmatrix} \tag{3.46d}$$

$$P^2\triangleq\begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ -* & I_{(\sigma_x-d_2)\times(\sigma_x-d_2)} \end{bmatrix} \tag{3.46e}$$

$$\hat{\Gamma}^{2,1}(x)\in R^{d_1},\quad \hat{\Gamma}^{2,2}(x)\in R^{d_2-d_1},\quad \hat{\Gamma}^{2,3}(x)\in R^{\sigma_x-d_2} \tag{3.46f}$$

$$\hat{v}^{2,1}\in R^{d_1},\ \hat{v}^{2,2}\in R^{d_2-d_1},\ \hat{v}^{2,3}\in R^{\sigma_x-d_2},\ \ \mu^{2,1}\in R^{d_1},\ \mu^{2,2}\in R^{d_2-d_1},\ \mu^{2,3}\in R^{m-d_2} \tag{3.46g}$$

$\hat{P}^2$ 가 정칙의 상수 행렬이므로 $\hat{\Gamma}^1(x)$를 출력으로 한 시스템 (3.21)은 선형의 입출력관계를 갖는 것과 $\hat{\Gamma}^2(x)$를 출력으로 한 시스템 (3.21)은 선형의 입출력 관계를 갖는 것은 서로 동치임을 쉽게 알 수 있고, 또한 다음의 (3.47)식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\hat{\Gamma}^2(x)^{(d)}=\hat{v}^2 \tag{3.47a}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{v}^{2,1}\\ \hat{v}^{2,2\,(1)}\\ \hat{v}^{2,3\,(1)}\end{bmatrix}=-\hat{\alpha}^2(x_E,\xi)+\begin{bmatrix} I_{d_2\times d_2} & 0 \\ 0 & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \end{bmatrix}\mu^2 \tag{3.47b}$$

$$\hat{\alpha}^2(x_E,\xi)=\begin{bmatrix} 0_{d_2\times d_2} & 0 \\ -* & I_{(\sigma_x-d_2)\times(\sigma_x-d_2)} \end{bmatrix}\bar{\alpha}^2(x_E,\xi)\triangleq\begin{bmatrix}0_{d_2\times 1}\\ \hat{\alpha}^{2,3}(x_E,\xi)\end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}^{2,3}(x_E,\xi)\in R^{\sigma_x-d_2} \tag{3.47c}$$

이제 다시 (3.47)식의 $\hat{v}^2$ 중에서 $\mu^2$ 에 의존하지 않는 부분을 미분하여 얻은 (3.48)식을 고려하자:

$$\hat{v}^{2,1}=\mu^{2,1} \tag{3.48a}$$

$$\hat{v}^{2,2\,(1)}=\mu^{2,2} \tag{3.48b}$$

$$\hat{v}^{2,3\,(2)}=-\alpha^3(x_E,\xi)+b^3(x_E,\xi)\mu^2 \tag{3.48c}$$

$$\alpha^3(x_E,\xi)\triangleq L_{\bar{f}_E^2}\,\hat{\alpha}^{2,3}(x_E,\xi) \tag{3.48d}$$

$$b^3(x_E,\xi)\triangleq -L_{\bar{g}_E^2}\,\hat{\alpha}^{2,3}(x_E,\xi) \tag{3.48e}$$

이와 같은 방법으로, 식(3.49c)-(3.49s)들을 만족하는 정칙의 정적 궤환 (3.49a)와 (3.49b)를 구할 수 있다: [15]

$$v^1=-\alpha^1(x_E,\xi)+b^1(x_E,\xi)\lambda \tag{3.49a}$$

$$\lambda=\bar{\beta}^1(x_E,\xi)\cdots\bar{\beta}^k(x_E,\xi)\mu^k+\sum_{i=1}^{k}\{\prod_{j=1}^{i}\bar{\beta}^j(x_E,\xi)\}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}^i(x_E,\xi)\\ 0_{(m-\sigma_x)\times 1}\end{bmatrix} \tag{3.49b}$$

$$d_k=\sigma_x \tag{3.49c}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_E\\ \dot{\xi}\end{bmatrix}=\bar{f}_E^{\,k}(x_E,\xi)+\bar{g}_E^{\,k}(x_E,\xi)\mu^k \tag{3.49d}$$

$$W_k\triangleq I_{\sigma_x} \tag{3.49e}$$

$$\Gamma^k(x)\triangleq W_k\hat{\Gamma}^{k-1}(x)\triangleq\begin{bmatrix}\Gamma^{k,1}(x)\\ \Gamma^{k,2}(x)\\ \vdots\\ \Gamma^{k,k}(x)\end{bmatrix} \tag{3.49f}$$

$$\hat{\Gamma}^k(x)\triangleq P^k\Gamma^k(x)=\hat{P}^k\hat{\Gamma}^{k-1}(x)=\hat{P}^k\cdots\hat{P}^1\Gamma(x)\triangleq\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}^{k,1}(x)\\ \hat{\Gamma}^{k,2}(x)\\ \vdots\\ \hat{\Gamma}^{k,k}(x)\end{bmatrix} \tag{3.49g}$$

$$P^k\triangleq I_{d_k}=I_{\sigma_x} \tag{3.49h}$$

$$\hat{P}^k\triangleq P^kW_k=I_{\sigma_x} \tag{3.49i}$$

$$\begin{bmatrix}\Gamma^{k,1}(x)^{(d)}\\ \Gamma^{k,2}(x)^{(d+1)}\\ \vdots\\ \Gamma^{k,k}(x)^{(d+k-1)}\end{bmatrix}=W_k\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}^{k-1,1}(x)^{(d)}\\ \hat{\Gamma}^{k-1,2}(x)^{(d+1)}\\ \vdots\\ \hat{\Gamma}^{k-1,k}(x)^{(d+k-1)}\end{bmatrix} \tag{3.49j}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}^{k,1}(x)^{(d)}\\ \hat{\Gamma}^{k,2}(x)^{(d+1)}\\ \vdots\\ \hat{\Gamma}^{k,k}(x)^{(d+k-1)}\end{bmatrix}=\hat{P}^k\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}^{k-1,1}(x)^{(d)}\\ \hat{\Gamma}^{k-1,2}(x)^{(d+1)}\\ \vdots\\ \hat{\Gamma}^{k-1,k}(x)^{(d+k-1)}\end{bmatrix} \tag{3.49k}$$

$$\begin{bmatrix}L_{\bar{g}_E^{\,k}(x_E,\xi)}L^{d-1}_{\bar{f}_E^{\,k}(x_E,\xi)}\hat{\Gamma}^{k,1}(x)\\ L_{\bar{g}_E^{\,k}(x_E,\xi)}L^{d}_{\bar{f}_E^{\,k}(x_E,\xi)}\hat{\Gamma}^{k,2}(x)\\ \vdots\\ L_{\bar{g}_E^{\,k}(x_E,\xi)}L^{d+k-2}_{\bar{f}_E^{\,k}(x_E,\xi)}\hat{\Gamma}^{k,k}(x)\end{bmatrix}=[\,I_{\sigma_x}\ \ 0_{\sigma_x\times(m-\sigma_x)}\,] \tag{3.49l}$$

$$\hat{v}^k\triangleq\hat{P}^k\ \hat{v}^{k-1}=\hat{P}^k\cdots\hat{P}^1\ v^1 \tag{3.49m}$$

$$\hat{v}^k\triangleq\begin{bmatrix}\hat{v}^{k,1}\\ \hat{v}^{k,2}\\ \vdots\\ \hat{v}^{k,k}\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\mu^k\triangleq\begin{bmatrix}\mu^{k,1}\\ \mu^{k,2}\\ \vdots\\ \mu^{k,k}\\ \mu^{k,k+1}\end{bmatrix} \tag{3.49n}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{v}^{k,1}\\ \hat{v}^{k,2\,(1)}\\ \vdots\\ \hat{v}^{k,k\,(k-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu^{k,1}\\ \mu^{k,2}\\ \vdots\\ \mu^{k,k}\end{bmatrix} \tag{3.49o}$$

$$\hat{\Gamma}^k(x)^{(d)}=\hat{v}^k \tag{3.49p}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Gamma}^{k,1}(x)^{(d)} \\ \hat{\Gamma}^{k,2}(x)^{(d+1)} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}^{k,k}(x)^{(d+k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{k,1} \\ \mu^{k,2} \\ \vdots \\ \mu^{k,k} \end{bmatrix} \tag{3.49q}$$

$$\begin{bmatrix} L_{\bar{g}_E^k(x_E,\xi)} L^{d-1}_{\bar{f}_E^k(x_E,\xi)} \hat{\Gamma}^{k,1}(x) \\ L_{\bar{g}_E^k(x_E,\xi)} L^{d}_{\bar{f}_E^k(x_E,\xi)} \hat{\Gamma}^{k,2}(x) \\ \vdots \\ L_{\bar{g}_E^k(x_E,\xi)} L^{d+k-2}_{\bar{f}_E^k(x_E,\xi)} \hat{\Gamma}^{k,k}(x) \end{bmatrix} = I_{\sigma_x} \tag{3.49r}$$

$\hat{v}^{k,i} \in R^{d_i-d_{i-1}}$, $\mu^{k,i} \in R^{d_i-d_{i-1}}$, $\hat{\Gamma}^{k,i} \in R^{d_i-d_{i-1}}$, $\hat{\Gamma}^{k-1,i} \in R^{d_i-d_{i-1}}$, for $1 \le i \le k$
$\mu^{k,k+1} \in R^{m-d_k}$, and $d_0 = 0$

(3.49s)

즉, 지금까지 동적 궤환 (3.20)이 동적 궤환에 의해 decoupling이 가능함을 이용하여, 정적 궤환 (3.49b)을 가하여 (3.20)식을 다음의 (3.50)식 및 (3.51)식으로

$$v^1 = \tilde{a}^k(x_E,\xi) + \tilde{b}^k(x_E,\xi)\mu^k \tag{3.50a}$$

$$\tilde{a}^k(x_E,\xi) = -a^1(x_E,\xi) + b^1(x_E,\xi)\sum_{i=1}^{k}\{\prod_{j=1}^{i}\tilde{\beta}^j(x_E,\xi)\}\begin{bmatrix} \bar{a}^i(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_i)\times 1} \end{bmatrix}$$
$$\tilde{b}^k(x_E,\xi) = b^1(x_E,\xi)\tilde{\beta}^1(x_E,\xi)\cdots\tilde{\beta}^k(x_E,\xi) \tag{3.50b}$$

$$\hat{v}^k = \hat{a}^k(x_E,\xi) + \hat{b}^k(x_E,\xi)\mu^k \tag{3.51a}$$

$$\hat{a}^k(x_E,\xi) = \hat{P}^k\cdots\hat{P}^1\tilde{a}^k(x_E,\xi)$$
$$\hat{b}^k(x_E,\xi) = \hat{P}^k\cdots\hat{P}^1\tilde{b}^k(x_E,\xi) \tag{3.51b}$$

쓸 때, $\hat{v}^k(=\hat{P}^k\cdots\hat{P}^1 v^1)$ 가 다음의 (3.52)식을

$$\begin{bmatrix} \hat{v}^{k,1} \\ \hat{v}^{k,2\,(1)} \\ \vdots \\ \hat{v}^{k,k\,(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{k,1} \\ \mu^{k,2} \\ \vdots \\ \mu^{k,k} \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

만족시키는 것을 보였다. 이때 확장된 시스템 (2.45)를 다음의 (3.53)식으로

$$\dot{x}_E = f^x(x_E) + g^x(x_E)\begin{bmatrix} v^1 \\ \bar{u}^x \end{bmatrix} = f^x(x_E) + \tilde{g}^x(x_E)v^1 + g^x_{x+1}(x_E)\bar{u}^x$$
$$= f^x(x_E) + \hat{g}^k(x_E)\hat{v}^k + g^x_{x+1}(x_E)\bar{u}^x \tag{3.53a}$$

$$g^x(x_E) \triangleq [\ \tilde{g}^x(x_E)\ \ g^x_{x+1}(x_E)\ ] \tag{3.53b}$$

$$\hat{g}^k(x_E) = \tilde{g}^x(x_E)(\hat{P}^k\hat{P}^{k-1}\cdots\hat{P}^1)^{-1} = [\ \hat{g}^{k,1}(x_E)\ \cdots\ \hat{g}^{k,k}(x_E)\ ] \tag{3.53c}$$

쓸 수 있으므로, 전체 확장된 시스템 (3.21)은 다음의 (3.54)식과 (3.55)식으로 쓸 수 있다:

$$\dot{x}_E = f^x(x_E) + \hat{g}^k(x_E)\hat{v}^k + g^x_{x+1}(x_E)\bar{u}^x \tag{3.54a}$$

$$\hat{v}^k = \hat{a}^k(x_E,\xi) + \hat{b}^k(x_E,\xi)\mu^k \tag{3.54b}$$

$$\dot{\xi} = \hat{\vartheta}^1(x_E,\xi) + \hat{\psi}^1(x_E,\xi)\mu^k \tag{3.54c}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \bar{f}^k(x_E,\xi) + \bar{g}^k(x_E,\xi)\mu^k + g^x_{x+1}(x_E)\bar{u}^x(x_E,\xi,\mu^k)$$
$$= \bar{f}_E^k(x_E,\xi) + \bar{g}_E^k(x_E,\xi)\mu^k \tag{3.54d}$$

$$\hat{\vartheta}^1(x_E,\xi) = \phi^1(x_E,\xi) + \psi^1(x_E,\xi)\sum_{i=1}^{k}\{\prod_{j=1}^{i}\tilde{\beta}^j(x_E,\xi)\}\begin{bmatrix} \bar{a}^i(x_E,\xi) \\ 0_{(m-\sigma_i)\times 1} \end{bmatrix} \tag{3.55a}$$

$$\hat{\psi}^1(x_E,\xi) = \psi^1(x_E,\xi)\tilde{\beta}^1(x_E,\xi)\cdots\tilde{\beta}^k(x_E,\xi) \tag{3.55b}$$

$$\bar{f}^k(x_E,\xi) = \begin{bmatrix} f^x(x_E) + \hat{g}^k(x_E)\hat{a}^k(x_E,\xi) \\ \hat{\vartheta}^1(x_E,\xi) \end{bmatrix} \tag{3.55c}$$

$$\bar{g}^k(x_E,\xi) = \begin{bmatrix} \hat{g}^k(x_E)\hat{b}^k(x_E,\xi) \\ \hat{\psi}^1(x_E,\xi) \end{bmatrix} \tag{3.55d}$$

다음에는 (3.54)식과 출력 $\begin{bmatrix} \Gamma(x) \\ \gamma_x(x) \end{bmatrix}$가 다음의 (3.56)식을 만족하는 것을 증명한다:

$$L_{\bar{g}^k(x_E)}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} = \text{constant} \tag{3.56}$$

$1 \le i \le k$ 에 대해 출력 $\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)}$ 는 $x_E$, $\hat{v}^k$, $\hat{v}^{k(1)}, \cdots, \hat{v}^{k(i-1)}$ 의 함수이고, $\hat{v}^k$, $\hat{v}^{k(1)}, \cdots, \hat{v}^{k(i-1)}$는 $x_E$, $\xi$, $\mu^k$, $\mu^{k(1)}, \cdots,$ $\mu^{k(i-1)}$의 함수이므로 다음의 식이

$$\frac{\partial}{\partial\mu^{k,j}}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)} = \sum_{\ell_1=0}^{i-1}\frac{\partial\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)}}{\partial\hat{v}^{k(\ell_1)}}\frac{\partial\hat{v}^{k(\ell_1)}}{\partial\mu^{k,j}}, \quad \text{for } 1 \le j \le k \tag{3.57a}$$

$$\frac{\partial\hat{v}^{k,\ell_2(\ell_1)}}{\partial\mu^{k,j}} = 0, \quad \text{for } \ell_2 \ne j \text{ (by equation (3.52))}, \tag{3.57b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu^{k,j}}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)} = \sum_{\ell_1=0}^{i-1}\frac{\partial\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)}}{\partial\hat{v}^{k,j(\ell_1)}}\frac{\partial\hat{v}^{k,j(\ell_1)}}{\partial\mu^{k,j}}, \quad \text{for } 1 \le j \le k \tag{3.57c}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu^{k,j}}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)} = 0, \quad \text{for } j \ge i+1 \tag{3.57d}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu^{k,i}}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)} = L_{\hat{g}^{k,i}(x_E)}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} \tag{3.57e}$$

성립한다. 따라서,

$$L_{\bar{g}^{k,j}(x_E,\xi)}L^{i-1}_{\bar{f}^k(x_E,\xi)}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} = 0, \text{ for } 1 \le i \le k \text{ and } j \ge i+1 \tag{3.58a}$$

$$\bar{g}^k(x_E,\xi) = [\ \bar{g}^{k,1}(x_E,\xi)\ \cdots\ \bar{g}^{k,k+1}(x_E,\xi)\ ] \tag{3.58b}$$

이고, (3.58a)식에 의해 $1 \le j \le d_i$ 일 때

$$\frac{\partial}{\partial\mu_j^{k,i}}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1+i)} = \sum_{\ell=0}^{i-1}L^{\ell}_{\bar{f}^k(x_E,\xi)}L_{\bar{g}_j^{k,i}(x_E,\xi)}L^{i-1-\ell}_{\bar{f}^k(x_E,\xi)}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)}$$
$$= L_{\bar{g}_j^{k,i}(x_E,\xi)}L^{i-1}_{\bar{f}^k(x_E,\xi)}\bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} \tag{3.59a}$$

이므로, (3.57e)식은 다음의 (3.59b)식을

$$L_{\bar g^{k,i}(x_E,\xi)} L^{i-1}_{\bar f^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} = L_{g^{\pi,i}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)}, \quad \text{for } 1 \le i \le k \tag{3.59b}$$

의미한다. 여기서,

$$\bar g^{k,i}(x_E,\xi) = [\ \bar g_1{}^{k,i}(x_E,\xi) \ \cdots \ \bar g_{d_i-d_{i-1}}{}^{k,i}(x_E,\xi)\ ]$$

및

$\mu^{k,i} = [\ \mu_1^{k,i} \ \cdots \ \mu^{k,i}_{d_i-d_{i-1}}\ ]$ 이다. (3.54)식은 정적 궤환 입출력 선형화가 가능하므로 보조정리 3.3에 의해

$$\sigma\{\Theta_0\} = \rho\{\Theta_0\} \tag{3.60a}$$

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^k(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0_{(\sigma_x-d_1)\times d_1} & 0 \\ L_{g^{\pi,1}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} & 0_{(p-\sigma_x)\times(m-d_1)} \end{bmatrix} \tag{3.60b}$$

이며, (3.60)식은 $L_{g^{\pi,1}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)}$ 가 상수임을 의미한다. 마찬가지로 다음의 (3.61)식이

$$\sigma\{\Theta_1\} = \rho\{\Theta_1\} \tag{3.61a}$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^k(x)^{(d-1)} & L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^k(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} & L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \\ 0 & L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^k(x)^{(d-1)} \\ 0 & L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \end{bmatrix} \tag{3.61b}$$

성립해야 하고, (3.58a)식 및 (3.59b)식에 의해,

$$\begin{bmatrix} L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^k(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{d_1\times d_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_2-d_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{(\sigma_x-d_2)\times(m-d_2)} \\ * & L_{g^{\pi,2}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} & 0_{(p-\sigma_x)\times(m-d_2)} \end{bmatrix} \tag{3.62a}$$

이므로, 다음의 (3.62)식이

$$\sigma\{\hat\Theta_1\} = \rho\{\hat\Theta_1\} \tag{3.62b}$$

$$\hat\Theta_1 = \begin{bmatrix} L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^{k,1}(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^{k,2}(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_2-d_1} & 0 \\ * & L_{g^{\pi,2}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} & 0_{(p-\sigma_x)\times(m-d_2)} \end{bmatrix} \tag{3.62c}$$

성립한다. 따라서, $L_{g^{\pi,2}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)}$ 도 또한 상수이다.

이와 같은 방법으로, $1 \le i \le k$ 에 대해 다음의 식이 성립함을 쉽게 알 수 있으므로,

$$\begin{bmatrix} L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L^{i-1}_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^k(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L^{i-1}_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{d_{i-1}\times d_{i-1}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_i-d_{i-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{(\sigma_x-d_i)\times(m-d_i)} \\ * & L_{g^{\pi,i}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} & 0_{(p-\sigma_x)\times(m-d_i)} \end{bmatrix} \tag{3.63a}$$

다음의 (3.63b)식과 (3.63c)식은 서로 동치이다:

$$\sigma\{\Theta_{i-1}\} = \rho\{\Theta_{i-1}\}, \quad \text{for } 1 \le i \le k \tag{3.63b}$$

$$\sigma\{\hat\Theta_{i-1}\} = \rho\{\hat\Theta_{i-1}\}, \quad \text{for } 1 \le i \le k \tag{3.63c}$$

여기서,

$$\hat\Theta_{i-1} = \begin{bmatrix} L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^{k,1}(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^{k,2}(x)^{(d-1)} \\ \vdots \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L^{i-1}_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \hat\Gamma^{k,i}(x)^{(d-1)} \\ L_{\bar g_E^k(x_E,\xi)} L^{i-1}_{\bar f_E^k(x_E,\xi)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{d_{i-1}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_i-d_{i-1}} & 0 \\ * & L_{g^{\pi,i}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} & 0_{(p-\sigma_x)\times(m-d_i)} \end{bmatrix} \tag{3.63d}$$

이다. 따라서, (3.63c) 및 (3.63d)식으로부터 $1 \le i \le k$ 에 대해 $L_{g^{\pi,i}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)}$ 는 상수이다. 그러므로, 다음의 (3.64)식이

$$L_{g^{\pi}(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} = \text{constant} \tag{3.64}$$

성립하고, 따라서 (3.65)식이 성립한다:

$$L_{g^x(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} = \text{constant} \tag{3.65}$$

(Q.E.D.)

**정리 3.5**: 시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하기 위한 필요 충분조건은

$$L_{g^x(x_E)} L^i_{f^x(x_E)} \bar\gamma_x(x)^{(d-1)} = \text{constant}, \quad i \ge 0 \tag{3.66}$$

이다.

<u>증명</u>:

(충분조건); 식 (3.66)이 성립한다고 가정하자. 그러면 structure algorithm에 의해 얻어진 확장 시스템 (2.45)에 대해 다음의 (3.67)식이

$$\gamma_i(x)^{(d)} = u^i, \quad \text{for } 1 \le i \le x \tag{3.67a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar u^x} \bar\gamma_x(x)^{(d+i)} = 0, \quad \text{for } i \ge 0 \tag{3.67b}$$

성립한다. 따라서,

$$\begin{bmatrix} L_{g^x(x_E)} L^i_{f^x(x_E)} \Gamma(x) \\ L_{g^x(x_E)} L^i_{f^x(x_E)} \bar\gamma_x(x) \end{bmatrix} = \text{constant}, \quad \text{for } i \ge 0 \tag{3.68a}$$

이고, 이것은 다음의 식이 성립함을 의미하고[10],

$$V_x \cdots V_1 L_{g^x(x_E)} L^i_{f^x(x_E)} h(x_E) = \text{constant}, \quad \text{for } i \ge 0. \tag{3.68b}$$

이때 $V_i$, $1 \le i \le k$ 가 정칙의 상수 행렬들이므로

$$L_{g^x(x_E)} L^i_{f^x(x_E)} h(x_E) = \text{constant}, \quad \text{for } i \ge 0. \tag{3.69}$$

이다. 따라서, 시스템 (1.1)은 동적 궤환 (2.47b) 와 (2.47c)을 사용하여, 입출력 선형화가 가능하다.

(필요조건); $\sigma_x = p$ 인 경우에는 명백하므로, $\delta_x < p$ 인 경우를 고려하자.

시스템 (1.1)이 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다고 가정하자. 그러면 보조정리 3.4 에 의해서 $(p-\sigma_x)$개의 벡터 함수 $\bar{\gamma}_x(x)$는 다음의 (3.70)식을

$$L_{g^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} = \text{constant} \tag{3.70}$$

만족한다. 다음의 (3.71)식이 성립하므로,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_x(x)^{(d)} &= L_{f^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} + L_{g^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} v \\ &= L_{f^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} + L_{\tilde{g}^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} v^1 \end{aligned} \tag{3.71}$$

다음과 같이, $\gamma_{x+1}(x)$를 정의하면

$$\gamma_{x+1}(x) = \bar{\gamma}_x(x)^{(d)} - [L_{\tilde{g}^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)}]\, \Gamma(x)^{(d)} = L_{f^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} \tag{3.72}$$

$\gamma_{x+1}(x)$는 출력 또는 출력의 미분값들의 선형 조합이므로, 시스템 (2.45)는 출력을 $\begin{bmatrix} \Gamma(x)^{(d-1)} \\ \gamma_{x+1}(x) \end{bmatrix}$라 두었을 때도 동적 궤환 입출력 선형화가 가능하다. (3.71)식의 $\tilde{g}^x(x_E)$는 (3.53)식에서 정의하였다. 또, 출력 $\begin{bmatrix} \Gamma(x)^{(d-1)} \\ \gamma_{x+1}(x) \end{bmatrix}$의 특성수는 0이므로, 보조정리 3.4에 의해,

$$L_{g^x(x_E)} \gamma_{x+1}(x) = L_{g^x(x_E)} L_{f^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} = \text{constant} \tag{3.73}$$

이다. 이와 같은 방법으로 다음 식이 성립하는 것을 쉽게 보일 수 있다:

$$L_{g^x(x_E)} L^i_{f^x(x_E)} \bar{\gamma}_x(x)^{(d-1)} = \text{constant}, \quad \text{for } i \ge 0 \tag{3.74}$$

(Q.E.D.)

## Ⅳ. 예 제

**예제 4.1:** 다음의 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 + u_1 + x_2 u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_1 u_1 + x_1 x_2 u_2 \\ \dot{x}_3 &= u_2 \end{aligned} \tag{4.1a}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \tag{4.1b}$$

$d=1$ 인 것은 쉽게 알 수 있고, 따라서 출력의 미분을 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_1 & x_1 x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = E^1(x) + D^1(x) u \tag{4.2}$$

$\sigma_1 = \sigma\{D^1(x)\} = 1$ 및 $\rho_1 = \rho\{D^1(x)\} = 2$ 이므로, 다음의 (4.3)식과 같이 두고,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ K_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1(x) = y_1 = x_1, \quad \bar{\gamma}_1(x) = y_2 = x_2 \tag{4.3a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_1 & x_1 x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3b}$$

$\begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix}$를 새로운 입력이라고 하여, 다음 식의 정적 궤환을 가하면,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ -\begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} \right\} \tag{4.4a}$$

다음과 같은 변환된 출력의 미분식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_1(x)^{(1)} \\ \bar{\gamma}_1(x)^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 - x_1^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E}^1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{S}^1(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \bar{u}^1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4b}$$

$\bar{S}_1(x) = \dfrac{\partial}{\partial u^1} \bar{\gamma}_1(x)^{(1)} \ne 0$ 이므로, 다음의 식과 같이 동적 궤환을 정의하면,

$$\begin{aligned} u^1 &= z_1 \\ \bar{u}^1 &= w_2 \\ \dot{z}_1 &= w_1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

시스템 (4.1a)에 가하는 동적 궤환은

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_1 - x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ \dot{z}_1 &= w_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

이고, 이때의 확장된 폐루프 시스템(resulting extended closed-loop system)은

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= z_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_1 z_1 - x_1^4 \\ \dot{x}_3 &= w_2 \\ \dot{z}_1 &= w_1 \end{aligned} \tag{4.7a}$$

이다. 여기서 $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$는 새로운 입력이다.

이제 다시 algorithm의 처음으로 가서 algorithm의 step 1을 다시 수행한다. $d=2$ 이므로,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_1^2 - 4x_1^3 z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

이고, 다음의 (4.8)식과 같이 두고,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

다음 식의 정적 궤환을 가하여,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -z_1^2 + 4x_1^3 z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -z_1^2 + 4x_1^3 z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

다음과 같은 선형화된 출력 (4.10)식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

결과적으로 이 예제에서 사용된 동적 궤환은

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_1 - x_1^3 + x_2 z_1^2 - 4x_1^3 x_2 z_1 \\ -z_1^2 + 4x_1^3 z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 x_2 & -x_2 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \dot{z}_1 &= v_1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

이고, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 는 새로운 입력이다.

## V. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템의 입출력 선형화 문제를 동적 궤환을 사용하여 풀기 위한 structure algorithm을 제한하고, 이를 이용하여 동적 궤환 입출력 선형화 문제의 필요 충분 조건을 유도하였다. 예제 4.1에 정적 궤환으로 입출력 선형화가 불가능한 비선형 시스템을 고려하여,동적 궤환을 사용하여 입출력 선형화가 가능한 비선형 시스템의 범위를 확장 할 수 있음을 보였다.

## 참 고 문 헌

[1] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[2] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed., Springer-Verlag, 1995.

[3] R. Su, "On the linear equivalents of nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, Vol.2, 1982, pp.48-52.

[4] B. Jakubczyk and W. Respondek, "On the linearization of control systems," *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Physics*, Vol.28, 1980, pp.517-522.

[5] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Design for multi-input nonlinear system," in *Differential Geometric Control Theory*, R.W. Brockett, et al. (ed), Boston: Brikhauser, 1983, pp.268-293.

[6] J.W. Grizzle, "Feedback linearization of discrete-time systems," in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol.83, Springer-Verlag, 1986, pp.273-281.

[7] H.G. Lee, A. Arapostathis, and S.I. Marcus, "On the linearization of discrete time systems," *International Journal of Control*, Vol.45, No.5, 1987, pp.1803-1822.

[8] W.M. Boothby, "Some comments on global linearization of nonlinear systems," *System & Control Letters*, Vol.4, 1984, pp.143-147.

[9] D. Cheng, A. Isidori, W. Respondek, and T.J. Tarn, "Exact linearization of nonlinear systems with outputs," *Math. Systems Theory*, Vol.21, 1988, pp.63-83.

[10] A. Isidori and A. Ruberti, "On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, Vol.4, 1984, pp.17-22.

[11] H.G. Lee and S.I. Marcus, "On input-output linearization of discrete time nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, Vol.8, 1987, pp.249-259.

[12] B. Charlet, J. Levine, and R. Marino, "Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization," *SIAM J. Control Optim.*, Vol.29, 1991, pp.38-57.

[13] 이홍기, 전홍태, "비선형 시스템의 Dynamic Feedback을 이용한 합성," *전자공학회지, 제 28 권 제 12호*, 1991년 12월, pp.19-26.

[14] U. Kotta and H. Nijmeijer, "On dynamic input-output linearization of discrete-time nonlinear systems," *International Journal of Control*, Vol.60, No.6, 1994, pp.1319-1337.

[15] H. Nijmeijer and W. Respondek, "Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.33, 1988, pp.1065-1070.

[16] W. J. Rugh, *Nonlinear System Theory*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1981.

[17] M. Fliess, "A note on Volterra series expansions for nonlinear differential systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.25, 1980, pp.116-117.

## 저 자 소 개

金 容 敏(正會員) 第 32卷 第 10號 參照
현재 중앙대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중

李 鴻 奇(正會員) 第 31卷 第 6號 參照
현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수

全 洪 兌(正會員) 第 31卷 第 6號 參照
현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수