論文98-35S-7-5

비 매칭 불확실성이 있는 비선형시스템의 균일 종국적 유계성 및 대역적 점근 안정성

(Uniform ultimate boundedness and global asymptotic stabilization for systems with mis-matched uncertainties)

張 忠 煥 *, 成 烈 完 **, 李 健 一 *

(Chung-Hwan Chang, Yul-wan Sung, and Kuhn-Il Lee)

요 약

본 논문에서는 유사-리아프노프 함수를 이용하여 비매칭 불확실성이 있는 시스템을 안정화시키는 제어법칙을 제안한다. 기존의 제어법칙에서는 대역적 점근 안정성을 얻기 위하여 시스템이 평형점 근방에서 국소적으로 점근 안정할 것을 가정하고 있다. 여기에서는 이러한 가정을 만족하지 않는 시스템에 대하여도 균일 종국적 유계성을 주는 제어법칙을 설계하여 보다 넓은 범주의 시스템에 적용될 수 있게 하였다. 또한 균일 종국적 유계성을 이용하여 시스템을 대역적으로 점근안정화 하는 제어법칙을 보다 체계적으로 설계할 수 있게 하였다.

Abstract

In this paper we propose a control law using a Lyapunov-like function that makes stable the systems which have mis-matched uncertainties. The existing control law using a Lyapunov-like function, which gives global asymptotic stability, is designed under the assumption of a target system to be stable locally. But we broaden here the class of target systems by designing the control law which can give uniform ultimate boundedness to even the systems not satisfing the locally asymptotic stability. And we also show that the control law giving global asymptotic stability can be designed more systematically through using the uniform ultimate boundedness.

I. 서 론

리아프노프 직접법을 이용하여 불확실성이 있는 시스템을 제어하는 방법에서는 실제의 시스템을 안정하게 하기 위하여 공칭시스템(nominal system)의 안정성을 이용한다. 이 방법에서는 제어법칙을 다음과 같이 설계할 수 있다. 먼저 공칭시스템의 리아프노프 함수를 선택하고 이 함수를 불확실성이 있는 시스템 전체의 리아프노프 함수로 간주한다. 그리고 리아프노프 함수가 불확실성이 있는 시스템의 해의 모든 궤적을 따라 감소하도록 제어법칙을 만든다. 또, 여기에서는 시스템의 불확실성을 공칭시스템에 대하여 매칭이 되는 것과 매칭이 되지 않는 것으로 분류한다. 최소-최대방법(Min-max method)[1]과 포화 방법(Saturation type method)[2]은 매칭 불확실성이 있는 시스템에 대한 대표적인 방법이다. 이 방법들에서는 불확실성에 대한 정보를 추정하기 위하여 놈(norm)을 사용한다. 만약 불확실성이 어떤 함수의 형태로 표현

* 正會員, 慶北大學校 電子工學科
(Department of Electronic Engineering, Kyungpook National University)
** 正會員, Servo-land Co.
(Servo-land Co.)
接受日字:1997年8月30日, 수정완료일:1998年6月19日

된다고 할 때에 이 불확실성 함수의 크기가 정확히 알려지지는 않더라도 어떤 기지의 함수의 놈에 의해 항상 유계로 되는 정도만의 정보가 알려진다면 이러한 불확실성이 있는 시스템은 위와 같은 제어방법으로 안정화 할 수 있다. 그러나 비매칭 불확실성을 가진 시스템에 대해서 적용했을 때 이 제어방법으로 설계된 제어법칙은 페루프 시스템을 불안정하게 만들 수도 있다. 페루프 시스템이 불안정하게 되는 이유는 제어법칙이 유계로 되지 않는 경우가 생기기 때문이며, 제어법칙의 유계성은 선택된 리아프노프 함수에 의존한다. 그러나 제어법칙이 유계가 되도록 하는 리아프노프 함수를 선택하는 것은 매우 어렵다.

최근에 성, 박 등[4,5]에 의해 불확실성을 가진 시스템을 제어하는 방법으로 유사-리아프노프 함수를 이용하는 방법이 제안되었다. 여기에서는 국소적으로만 리아프노프 함수로 동작하는 유사-리아프노프 함수를 이용하여 제어법칙을 설계하고 있으며 이것에 의하여 기존의 제어방법[3]보다 더 넓은 범주의 비매칭 불확실성이 있는 시스템을 점근안정화 할수 있음을 보여주고 있다.

본 논문에서는 성[4]에서 제안된 유사-리아프노프 함수를 이용하여 비매칭 불확실성이 있는 비선형시스템을 균일 종국적 유계로 하는 것과 대역적으로 점근 안정화하는 문제를 검토한다.

먼저 비매칭 불확실성이 있는 비선형시스템의 해를 종국적으로 유계로 하는 제어기를 설계하고 그 후에 이것을 이용하여 대역적으로 점근 안정화하는 제어기를 설계한다. 또 본 논문에서는 성, 박[4,5]에서 대역적 점근안정성을 얻기위해 가정하고 있는 조건 즉 비제어시스템이 평형점 근방에서 점근적으로 안정하다는 가정을 필요로 하지 않는다. 성, 박[4,5]에서는 평형점 근방에서 비제어시스템이 점근적으로 안정해도 제어기를 설계하기 위하여 주어진 리아프노프 함수를 이용하여 계산된 비제어 시스템의 평형점에 대한 흡수영역과 주어진 유사-리아프노프 함수를 이용하여 계산된 비제어 공칭 시스템의 평형점 근방에 대한 흡수영역이 서로 중첩할 때에만 대역적 점근 안정성을 보장할 수 있었다. 그러나 이러한 조건이 만족되도록 유사-리아프노프 함수를 선택하는 것은 시스템의 차수가 커지면 매우 어렵게 된다. 이것에 대하여 본 논문에서는 주어진 리아프노프 함수에 대한 비제어 시스템의 흡수영역만 알면 되므로 유사-리아프노프 함수를 선택하는 것이 용이하며 또한 제어기를 구성하는 것이 보다 체계적으로 된다.

II. 균일 종국적 유계성을 위한 제어법칙

다음과 같이 비매칭 불확실성이 있는 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(x(t)) \tag{1}$$

여기서 $t \in \mathrm{R}$ 은 시간, $x(t) \in R^n$ 은 상태, $u(t) \in R$은 입력, $\xi(x(t)) \in R^n$ 은 비매칭 불확실성이다. (1)식에서 $\xi(\cdot) = 0$ 일 때 이 시스템을 공칭 시스템이라 하며 $u(\cdot) = 0$ 일 때의 시스템을 비제어시스템이라 한다. 만약 (1)식의 비제어 시스템이 국소적으로 점근 안정하다면 이 시스템의 초기치가 흡수영역안에 있을 때의 해는 평형점에 수렴한다. 그러나 초기상태가 흡수영역 밖에서 있있을 때의 해는 발산할 수도 있다. 그러므로 (1)식과 같은 시스템을 대역적으로 점근 안정화하는 것이 필요하다. 리아프노프 직접법을 이용하는 제어방법의 관점에서 보면 (1)식의 시스템을 대역적으로 점근 안정화하는 문제는 $\nabla_x V(x(\cdot))B \neq 0$ 이 만족되는 리아프노프 함수 $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ (P는 *positive* definite 이다) 를 찾는 것으로 귀착시킬 수 있다. 그러나 비매칭 불확실성이 있는 경우에는 이러한 리아프노프 함수를 찾는 것은 거의 불가능하다. [4,5]에서는 다음과 같이 유사-리아프노프 함수를 만들어 위의 문제를 해결하고 있다.

$$\overline{V}(x(t)) = \begin{cases} V_1(x(t)) & \text{for } p(x(t)) \le -\pi/4 \\ V_2(x(t)) & \text{for } p(x(t)) > -\pi/4 \end{cases} \tag{2}$$

$$V_1(x(t)) = qV(x(t)) \tag{3}$$

$$V_2(x(t)) = qV(x(t)) + \cos(p(x(t) - \pi/4)) \tag{4}$$

여기서 $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ 는

$$p(x(t)) = (\nabla_x V(x(t)))B \tag{5}$$

$$q = (\nabla_x p(x(t)))B \tag{6}$$

$$c_1 \| x(t) \|^2 \le V(x(t)) \le c_2 \| x(t) \|^2 \tag{7}$$

이 만족되고 또한 q, c_1, c_2 는 양의 상수가 되도록 선택된다.

(2)식의 유사-리아프노프 함수는 (1)식에 대해서

$\nabla_x \overline{V}(x(t))B \neq 0$ 을 만족한다. [4] 에서는 (2)식의 유사-리아프노프 함수를 이용한 (8′) 식의 제어법칙에 의해서 (1)식의 한 예제 시스템을 대역적으로 점근안정시킬 수 있음을 보여준다.

$$u(t)=\begin{cases} u_1(x(t)) & \text{for} \quad \| x(t) \| > b \quad p(x(t)) \leq -\pi/4 \\ u_2(x(t)) & \text{for} \quad \| x(t) \| > b \quad p(x(t)) > -\pi/4 \\ 0 & \text{for} \quad \| x(t) \| \leq b \end{cases} \tag{8′}$$

$$u_i(x(t)) = -\frac{\rho_i(x(t))}{|\alpha_i(x(t))|} \cdot \frac{\mu_i(x(t))}{|\mu_i(x(t))|}$$

$$\mu_i(x(t)) = -\frac{\rho_i(x(t))}{|\alpha_i(x(t))|}\alpha_i(x(t)) = -\frac{\rho_i(x(t))}{|\alpha_i(x(t))|} \cdot \alpha_i(x(t))$$

여기서 b 는 $q(\nabla_x V(x(t))A(x(t)) + |\nabla_x p(x(t))| \leq -\varepsilon_1$ $(\varepsilon_1 > 0)$ 이 만족되는 $\| x(t) \|$ 의 최소값이다. 그러나 (8′)식에서 알 수 있는바와 같이 (1)식의 비제어시스템이 평형점 근방에서 점근적으로 안정되어야하는 조건이 요구된다. 이러한 조건 때문에 위의 제어법칙을 적용할 수 있는 시스템은 그것의 비제어시스템이 국소적으로 그리고 점근적으로 안정하거나 또는 안정화 가능한 것이어야 한다. 더구나 (8′)식을 적용하기위해서는 비제어시스템의 흡수영역이 알려져야 하고 또 흡수영역에 관계된 어떤 조건이 만족될 것이 요구된다 [Remark 1 참조]. 그러므로 이런 조건이 만족되도록 리아프노프함수를 선택하여야 한다. 그러나 목표 시스템의 차수가 커짐에 따라 그러한 리아프노프 함수를 선택하는 것은 더욱 어렵게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 [4] 에서의 제어법칙을 다음과 같이 수정한다.

$$u(t)=\begin{cases} u_1(x(t)) & \text{for} \quad p(x(t)) \leq -\pi/4 \\ u_2(x(t)) & \text{for} \quad p(x(t)) > -\pi/4 \end{cases} \tag{8}$$

$$u_i(x(t)) = -\frac{\beta_i(x(t)) + \rho_i(x(t))}{|\alpha_i(x(t))|} \frac{\mu_i(x(t))}{|\mu_i(x(t))|} \tag{9}$$

$$\mu_i(x(t)) = \frac{\beta_i(x(t)) + \rho_i(x(t))}{\| \alpha_i(x(t)) \|}\alpha_i(x(t)) \tag{9-1}$$

여기서

$\alpha_i(x(t)) = (\nabla_x V_i(x(t)))B$,

$\rho_i(x(t)) = |\nabla_x V_i(x(t))| \cdot \eta(x(t))$

$\beta_i(x(t)) = \nabla_x V_i(x(t))Ax(t) + c_3 \| x(t) \|^2 \quad (i=1,2)$,

$\eta(x(t)) \geq \| \xi(x(t)) \|$

이며 스칼라함수이다.

[Remark 1]

[4,5] 에서는 (1)식의 비제어 시스템이 평형점 근방에서 점근적으로 안정한 것을 필요로 하고 있다. 또한 비제어계의 흡수영역 즉 $\dot{x}(t) = Ax + \xi(x)$의 리아프노프 함수가 $V(x)$라 할 때 $\nabla_x V(x) \cdot (Ax + \xi(x)) < 0$이 만족되는 x의 집합 S_1과, 유사-리아프노프 함수가 $\overline{V}(x)$라 할 때에 $\nabla_x \overline{V}(x) \cdot Ax < 0$이 만족되는 x의 집합 S_2을 구하고 이 두 집합의 교집합 $S = S_1 \cap S_2$가 공집합이 아니고 연결인 경우에만 시스템의 대역적 점근안정성이 보장된다. 따라서 [4,5] 에서는 다음과 같은 두가지 문제가 있었다. 첫째는 계의 차수가 커짐에 따라 집합 S_1, S_2를 계산하는 것이 어렵게 된다. 둘째는 첫째의 이유로 인해서 대역적 점근안정성을 보장하기위한 조건 $S_1 \cap S_2 \neq 0$가 되도록 유사-리아프노프 함수를 구해야 하는데 이것은 시스템의 차수가 커지면 매우 어렵다. 그러나 제어법칙을 (8)식과 같이 하면 S_1, S_2를 계산할 필요가 없게 된다.

Ⅲ. 균일 종국적 유계성

매칭 불확실성만이 있는 시스템의 제어에서와 같이 리아프노프 직접법을 이용하는 방법에서 기본적으로 행하여지는 가정은 다음과 같다.

(가정 1)

$\| \xi(x(t)) \| \leq \eta(x(t))$ 를 만족하는 연속함수 $\eta(x(t))$ 가 존재한다.

(가정 2)

(1)식의 공칭시스템은 제어가능하다.

위의 가정하에서 (8)식에 의하여 임의의 초기치를 가지는 (1)식의 해는 균일 종국적 유계로 됨을 다음의 보조정리와 정리1을 통해서 보여준다. 보조정리는 균일 유계성에 대한 것이며, [정리1] 은 균일 종국적 유계성에 대한 것이다

(보조정리)

$x(\cdot)$를 초기치가 x_0일 때의 (8)식과 (1)식으로 이루어진 폐루프 시스템의 해라고 하자. 그러면 $\| x_0 \| \leq r$ 과 $t \geq t_0$에 대해서 $\| x(t) \| \leq \delta(r)$이 된다. 여기서 r 은 양수이고

$$\delta(r)=\begin{cases}[\frac{c_2}{c_1}\varepsilon^2+\frac{2}{qc_1}]^{1/2} & \text{if} \quad r\le\varepsilon \\ [\frac{c_2}{c_1}r^2+\frac{2}{qc_1}]^{1/2} & \text{if} \quad r>\varepsilon\end{cases} \tag{10}$$

$$\varepsilon>\left(\frac{2}{qc_1}\right)^{1/2} \tag{11}$$

이다.

(증명)

$\overline{V}(x(t))$를 (1)식의 해궤적에 따라 미분하면

$$\frac{d\overline{V}(x(t))}{dt}=(\nabla_x\overline{V}(x(t)))Ax+(\nabla_x\overline{V}(x(t)))Bu(t)$$
$$+(\nabla_x\overline{V}(x(t)))\xi(x(t))$$

로 되고, 여기에 (2)식과 (8)식을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\le\nabla_x V_i(x(t))Ax(t)+\rho_i(x(t))$$
$$-(\nabla_x V_i(x(t)))B\cdot\frac{\beta_i(x(t))+\rho_i(x(t))}{|(\nabla_x V_i(x(t)))B|}\frac{\mu_i(x(t))}{|\mu_i(x(t))|}$$
$$=\nabla_x V_i(x(t))Ax(t)+|\rho_i(x(t))|+\frac{-|\mu_i(x(t))|^2}{|\mu_i(x(t))|}$$
$$(i=1,2)$$

(9-1)식으로부터 $|\mu_i(x(t))|=|\beta_i(x(t))|$이고, 여기에

$$\beta_i(x(t))=\nabla_x V_i(x(t))Ax(t)+c_3\|x(t)\|^2$$

을 대입하면

$$|\mu_i(x(t))|=|\nabla_x V_i(x(t))Ax(t)+c_3\|x(t)\|^2+\rho_i(x(t))|$$
$$\ge\nabla_x V_i(x(t))Ax(t)+c_3\|x(t)\|^2+\rho_i(x(t))$$

이다. 따라서

$$-|\mu_i(x(t))|<-\nabla_x V_i(x(t))Ax(t)+c_3\|x(t)\|^2-\rho_i(x(t))$$

이며, 이것을 이용하면

$$\frac{d\overline{V}(x(t))}{dt}\le -c_3\|x(t)\|^2 \tag{12}$$

가 얻어진다. 다음에 초기치 $x(t_0)=x_0(\le r)$인 (1)식의 해 $x(t)$를 생각하자.

$$\hat{r}=\max\{r,\varepsilon\}$$

이라고 하면 $\|x_0\|\le\hat{r}$ 과 $\varepsilon\le\hat{r}$ 이 만족된다. 그러면 (10)식으로부터 (10)식의 $\delta(r)$ 은 $\delta(r)=\{\frac{c_2}{c_1}\hat{r}^2+\frac{2}{qc_1}\}^{1/2}$와 같이 다시 쓸 수 있다. $c_1\|x(t)\|^2\le V(x(t))\le c_2\|x(t)\|^2$와 $(qc_1)\hat{r}^2\le(qc_2)\hat{r}^2$을 이용하면

$$\hat{r}\le\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/2}\hat{r}<\delta(r)$$

이 얻어진다. 따라서 $\|x(t_0)\|=\|x_0\|\le\hat{r}<\delta(r)$ 이 된다. 또한 임의의 $t_3(t_3>t_0)$ 에 대해서

$$\|x(t_3)\|>\delta(r) \tag{13}$$

이라고 가정하면, $x(\cdot)$는 연속이고 $\|x(t_0)\|\le\hat{r}<\delta(r)<\|x(t_3)\|$ 이므로 $\|x(t_2)\|=\hat{r}$, $\|x(t)\|\ge\hat{r}$, $t\in[t_2,t_3)$ 이 만족되는 $t_2\in[t_0,t_3)$ 가 존재해야만 한다. (2)식과 (3),(4)식으로부터

$$-1+qc_1\|x(t_3)\|^2\le qV(x(t_3))$$

이 얻어지며 (12)식을 이용하면 $qV(x(t_3))\le qV(x(t_2))\le qc_2\|x(t_2)\|^2+1$이 되고, 이것으로부터 $-1+qc_1\|x(t_3)\|^2<qc_2\|x(t_2)\|^2+1$ 이 얻어진다. 이 식으로부터

$$\|x(t_3)\|<[\frac{c_2}{c_1}\cdot\hat{r}^2+\frac{2}{qc_1}]^{1/2}=\delta(r)$$

이 얻어지며 이것은 (13)식의 가정에 배치된다. 이상의 결과로

$$\|x(t)\|\le\delta(r),\quad t\ge t_0$$

이 참인 것이 증명되었다.

위의 보조정리를 이용하여 다음의 [정리 1]에서는 (8)식의 제어법칙을 이용하여 (1)식의 해가 균일 종국적 유계가 됨을 보여준다.

[정리 1]

$r(>\|x_0\|)$ 과 (11)식의 ε에 대하여 $T(\varepsilon,r)<\infty$이 존재하고 이 $T(\varepsilon,r)<\infty$에 대해서 임의의 초기치 x_0에 대하여 (1)식과 (8)식의 폐루프시스템의 해는 $t\ge t_0+T(\varepsilon,r)$ 에서 $\|x(t)\|\le\overline{\delta}$ 로 된다. 여기서 r은 $\|x_0\|<r$인 상수이며,

$$\overline{\delta}=[\frac{c_2}{c_1}\varepsilon^2+\frac{2}{qc_1}]^{1/2}, \tag{14}$$

$$T(\varepsilon,r)=\frac{qc_1\phi^2+2}{c_3\delta_2^2} \tag{15}$$

$$c_2 r^2 < c_1 \psi^2, \quad \psi < \infty \tag{16}$$

$$qc_2 \delta_2^2 < \min\{qc_1 \varepsilon^2 - 2,\ qc_2 r^2\} \tag{17}$$

이다.

(증명)

먼저 $\| x(t_0) \| < r$ 의 초기치에 대하여 $\| x(t_1) \| < \delta_2$ 인 $t_1 \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon, r)]$이 존재함을 보자. 이것은 모순률에 의해서 다음과 같이 증명된다. 먼저

$$\| x(t) \| \geq \delta_2, \quad t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon, r)] \tag{18}$$

라고 가정하면, (2)식과 (18)식으로부터

$$-1 + qc_1 \delta_2^2 \leq \overline{V}(x(t_0 + T(\varepsilon, r)))$$

$$= \overline{V}(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_0 + T(\varepsilon, r)} \dot{\overline{V}}(x(\tau)) d\tau$$

이 된다. 그리고 $\| x(t_0) \| < r$ 과 (12)식을 이용하면

$$\leq 1 + qc_2 r^2 - \int_{t_0}^{t_0 + T(\varepsilon, r)} c_3 \| x(\tau) \|^2 d\tau$$

가 된다. 따라서 (18)식을 이용하면

$$\leq 1 + qc_2 r^2 - c_3 \delta_2^2 T(\varepsilon, r)$$

이 된다. 또한 (15)식을 이용하면

$$= -1 + qc_2 r^2 - qc_1 \psi^2$$

이 된다. 이것으로부터

$$qc_1 \delta_2^2 \leq qc_2 r^2 - qc_1 \psi^2$$

이 얻어지며, 또 (16)식을 이용하면

$$qc_1 \delta_2^2 < 0$$

가 얻어진다. 그러나 이것은 모순이며 결과적으로 (18)식이 거짓이 되고, 따라서 $t_1 \in [t_0 + T(\varepsilon, r)]$에서 $\| x(t) \| \leq \delta_2$ 가 된다.

다음에 $t' = t_0 + T(\varepsilon, r)$ 로 두면 $\dot{\overline{V}}(x(t)) \leq 0$ 으로부터

$$-1 + qc_1 \| x(t') \|^2 \leq \overline{V}(x(t')) \leq \overline{V}(x(t_1))$$

이 얻어지며, (2)식으로부터

$$-1 + qc_1 \| x(t') \|^2 \leq qc_2 \| x(t_1) \|^2 + 1$$

이 유도된다. 그리고 $\| x(t_1) \| < \delta_2$ 를 이용하면

$$-1 + qc_1 \| x(t') \|^2 \leq qc_2 \| \delta_2 \|^2 + 1$$

이 된다. 또, (17)식을 이용하면

$$-1 + qc_1 \| x(t') \|^2 < 1 + qc_1 \varepsilon^2 - 2$$

으로 된다. 따라서

$$c_1 \| x(t') \|^2 < c_1 \varepsilon^2$$

으로 되고 $\| x(t') \| < \varepsilon$ 이 된다. 마지막으로 $t' = t_0 + T(\varepsilon, r)$ 이고 $\| x(t') \| < \varepsilon$이므로 [보조정리 1] 로부터 $t \geq t'$ 에서 $\| x(t') \| \leq \delta(\varepsilon)$이며, 따라서 (14)식과 같이 $\overline{\delta} = \delta(\varepsilon)$으로 두면

$$x(t) \leq \overline{\delta} = [\frac{c_2}{c_1} \varepsilon^2 + \frac{2}{qc_1}]^{1/2} \quad t \geq t_0 + T(\varepsilon, r)$$

이 되어 증명이 완료되었다.

Ⅳ. 대역적 점근안정성

(1)식을 대역적으로 점근 안정화하는 방법은 다음과 같다.

먼저 (가정 2)로부터 (1)식을 $u(t) = v_1(t) + v_2(t)$ 에 의해 다음과 같이 변환시킨다.

$$\dot{x}(t) = \overline{A} x(t) + v_2(t) + \xi(x(t)) \tag{19'}$$

여기서

$$v_1(t) = -Fx(t) \tag{19}$$

$\overline{A} x(t) = (Ax(t) + Bv_1(t)) = (A - BF)x(t)$이다. 그리고 (19′)식에서 $\dot{x}(t) = \overline{A} x(t) + \xi(x(t))$의 흡수영역이 $\| x(t) \| \leq d$ $(> \overline{\delta})$ 이 되도록 F를 선택하고 외부입력 $v_2(t)$를 (20)식과 같이 설계하면 (19′)식의 대역적 점근안정성을 얻을 수 있음을 [정리 2] 로 부터 알 수 있으며, 또한 결과적으로 $u(t) = v_1(t) + v_2(t)$에 의하여 (1)식이 대역적으로 점근 안정이 됨을 알 수 있다.

$$v_2(t) = -\frac{c_3 \| x(t) \|^2 + \| \nabla_x \overline{V}(x(t) \| \cdot \eta(x(t))}{\nabla_x \overline{V}(x(t))B} S(\tau - t) \tag{20}$$

여기서, c_3는 양의 상수이고 τ는 $\| x(\tau) \| \leq \overline{\delta}$ 일때

의 시간이며, $S(t)$는 $t\geq 0$ 경우에만 1이고 그 이외에는 0의 값을 가지는 함수이다. (20)식에서 τ 대신에 $T(\varepsilon, r)$을 사용해도 되지만 일반적으로 $\tau\leq T(\varepsilon, r)$ 이므로 τ를 사용하는 것이 보다 실제적이다.

[정리 2]

(1′)식의 비제어시스템의 해가 초기치 $\|x(t_0)\|\leq d$ $(>\overline{\delta})$ 에 대하여 항상 평형점으로 수렴하게 되도록 F를 선택하면 $v_2(t)$ 에 의하여 (1′)식은 대역적으로 점근안정이 된다.

(증명)

[정리 1] 로부터 임의의 초기치 x_0 $(<r)$에서 출발한 (1′)식의 해는 $x(t)<\overline{\delta}(t)(t\geq\tau)$ 로 된다. 따라서 (20)식에서 $t=T$ 에서 $v_2(t)=0$로 되어 (1′)식은 $\dot{x}(t)=\overline{A}x(t)+\xi(x)$ 로 된다. 이 비제어 시스템의 흡수영역은 $\|x(t)\|<a$ 이고 $d\geq\overline{\delta}$ 이므로 $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ 로 된다.

[Remark 2]

여기에서 제안한 제어법칙은 [4, 5] 에서의 그것과 매우 유사하다. 그러나 제어기를 설계하는 면에서는 여기서 제안한 것이 더 체계적이며 더 넓은 범주의 시스템에 적용될 수 있다. 왜냐하면 [4, 5] 에서는 Remark 1에서의 S_1, S_2를 모두 계산해야 하며, 또한 안정성을 위한 조건이 만족되어야 하는 것에 비하여, 여기에서는 S_1 만 계산하면 되며, (정리 1)에서 $\overline{\delta}$ 가 계산되고 이것을 임의로 작게 선택할 수 있기 때문이다.

V. 모의 실험

1. 균일 종국적 유계성

다음의 수치 예를 통하여 3장의 결과를 확인하여 보자.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} 0.1x_1(t)^2 \\ 0\end{bmatrix} \tag{21}$$

여기서 $\xi(x(t))=[0.1x_1(t)^2 \quad 0]^T$ 는 비매칭 불확실성이다.

(21)식의 비제어시스템에 대한 리아프노프 함수로 다음과 같은 것을 취하자.

$$V(x(t))=x(t)^T Px(t)=x(t)^T\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}x(t) \tag{22}$$

그러면 $p(x(t))=2x_1(t)+4x_2(t)$, $q=4$ 가 된다. 이것을 이용하면 (2)식처럼 $\overline{V}(x(t))$를 얻을 수 있다.

(1)식과 (2)식의 $\overline{V}(x(t))$에서 다음과 같은 제어기 함수를 얻을 수 있다.

$$\alpha_1(x(t))=q\cdot(2x_1(t)+4x_2(t))$$

$$\alpha_2(x(t))=q\cdot(2x_1(t)+4x_2(t))-q\cdot\sin(p(x(t))-\pi/4)$$

$$\rho_1(x(t))=\|\nabla_x V_1(x(t))\|\cdot 0.1(1+x_1(t)^2)$$

$$\rho_2(x(t))=\rho_1(x(t))+0.2(1+x_1(t)^2)$$

$$\beta_1(x(t))=2q\cdot x(t)^T P\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+28\|x(t)\|^2$$

$$\beta_2(x(t))=\beta_1(x(t))-\sin(p(x(t)-\pi/4))\cdot\nabla_x p(x(t))\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

위의 식들을 이용하면 (8)식과 같은 제어법칙을 설계할 수 있다. 만약 초기치가 $x_0=[2 \ \ 1]^T$이라면 $r=2.5$으로 취할 수 있다. 또 $c_1=1.81$, $c_2=7.20$ 이기 때문에 $\varepsilon=0.7$ 으로 취할 수 있으며 이때 (정리1)로 부터 $T(\varepsilon, r)=95$, $\overline{\delta}=1.50$ 이 된다. 모의실험의 결과는 다음과 같다. 초기치 $x_0=[2 \ \ 1]^T$와 $u(\cdot)=0$ 에 대한 시스템의 응답은 그림 1과 같이 발산함을 알 수 있다. 반면에 유사-리아프노프 함수의 제어법칙을 이용하였을 때에는 그림 2(a) 에서와 같으며 $\|x(t)\|\leq 0.70(t\geq 10)$ 임을 알 수 있고, 3장에서 예측된 것과 같다. 또, [정리1] 의 시간 $T(\varepsilon, r)$에 대한 것은 보수적임을 알 수 있다. 이 때의 제어입력 $u(t)$는 그림 2(b)와 같다.

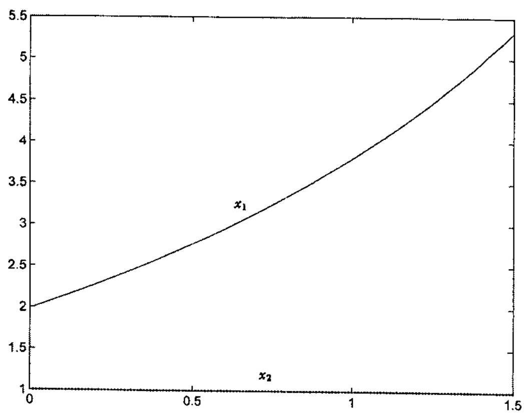
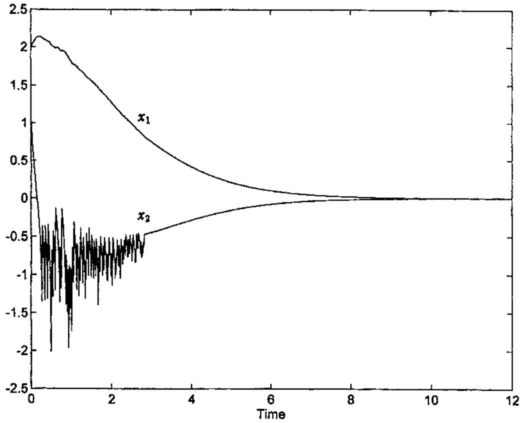
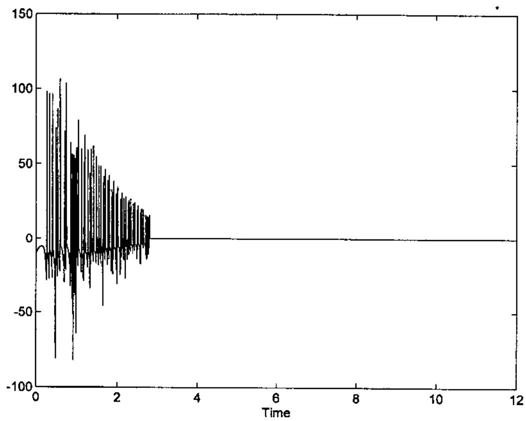


그림 1. $u=0$인 경우의 시스템의 응답
Fig. 1. The system response for $u=0$.



(a)



(b)

그림 2. (a) 균일 종국적 유계인 경우의 시스템의 응답
(b) 균일 종국적 유계성인 계의 제어입력

Fig. 2. (a) Uniform ultimate boundness responses of the system (b) The control law for uniform ultimate boundness responses.

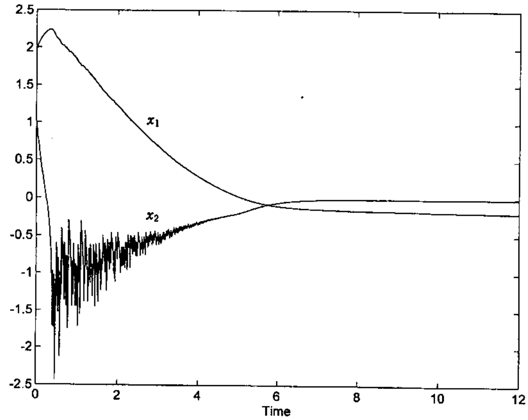
2. 대역적 점근 안정성

(21)식의 해를 대역적으로 점근 안정화 하기 위하여 (8)식의 제어법칙 대신에 $u=v_1(t)+v_2(t)$ 를 이용한다. 여기서 $v_1(t)=-Fx(t)=-[1\ 2]^T$로 취하고 (21)식에 대입하면

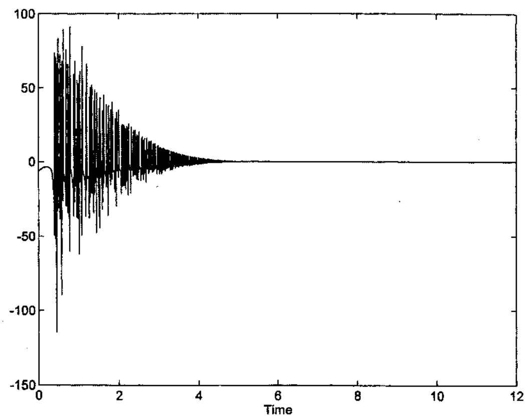
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v_2(t)+\begin{bmatrix}0.1x_1(t)^2\\ 0\end{bmatrix} \qquad (21')$$

이 얻어진다. (21′)식에 대하여 리아프노프 함수로 $V(x(t))=x^T(t)\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}x(t)$을 취하여 유사-리아프노프 함수를 만들고 $c_3=1$로 놓으면 (20)식과 같이 $v_2(t)$를 설계할 수 있다.

여기서 $\overline{\delta}=1.05$ 이고 $d=1.1$이므로 대역적 점근 안정성이 보장 되며, 그림 3(a)와 같이 상태가 수렴함을 볼 수 있다. 또 이 때의 제어입력은 그림 3(b)와 같다.



(a)



(b)

그림 3. (a) 대역적 점근안정인 경우의 시스템의 응답
(b) 대역적 점근안정인 경우의 제어입력

Fig. 3. (a) Global asymptotic stable responses of the system (b) The control law for global asymptotic stable responses.

VI. 결 론

본 논문에서는 유사-리아프노프 함수를 이용한 제어법칙을 이용하여 비매칭 불확실성이 있는 시스템을 균일 종국적 유계로 할 수 있음과 대역적으로 점근 안정화 할 수 있음을 보여 주었다. 여기서 제안한 제어법칙은 보다 넓은 범주의 시스템에 적용될 수 있으며 설계 절차가 기존의 제어법칙보다 더 체계적이다. 그

러나 여기에서 제안된 제어법칙은 공칭시스템이 선형인 시스템에 대하여 만들어진 유사-리아프노프 함수를 이용하였으므로 이 제어법칙을 공칭시스템이 비선형인 시스템에 응용하기 위해서는 유사-리아프노프 함수에 대한 연구가 선행되어야 한다.

참 고 문 헌

[1] M.J. Coreless and G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteering Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic systems," IEEE Tran. AC-26, 1139-1144, 1981.

[2] S. Gutmann, "Uncertain Dynamical Systems-A Lyapunov Min-Max Approach," IEEE Trans. Ac-24, 437-443, 1979.

[3] Z. Qu, "Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatching uncertainties," Systems and Control Lett., vol. 18, pp. 301-307, 1992.

[4] Y. Sung and H. Shibata, "Global asymptotic stabilization of nonlinear system with mismatched uncertainties by Lyapunov-like function," Trans. SICE vol. 31, pp. 1531-1533, 1995.

[5] 박창용, 성열완, 오노 토시로 "유사-리아프노프 함수에 의한 비매칭 불확실성이 있는 비선형계의 견실한 제어법," 대한기계학회 논문집(A) 제 21권 제 4호, pp. 549-554, 1997

저 자 소 개

張 忠 煥(正會員)
1982년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1988년 2월 경북대학교 대학원 졸업(공학석사). 1992년 3월 ~ 현재 경북대학교 대학원 박사과정 재학중. 주관심분야는 비선형 시스템, TV 음성신호처리, 영상압축 및 코딩

成 烈 完(正會員)
1991년 인하대학교 전기공학과 졸업(석사). 1995년 일본 오오사카대학 전자공학과 졸업(박사). 1996년 일본 오오사카 부립대학 연구원. 현재 일본 Servo-land 근무. 주관심분야는 비선형제어, 로버스트 제어, 적응제어, 고장진단, 생체제어 등

李 健 一(正會員) 第 34卷 S編 第 9號 參照
현재 경북대학교 전자·전기공학부 교수