

## 축압축하중을 받는 복합적층원통셸의 좌굴해석

이 종 선\*, 하 영 민\*\*

### Buckling Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells under Axial Compression

Jong-Sun Lee\*, Young-Min Ha\*\*

#### Abstract

The objective of this study is to investigate effects of prebuckling on the buckling of laminated composite cylindrical shells. Axial compression is considered for laminated composite cylindrical shells with length to radius ratios. The shell walls are made of a laminate with several symmetric ply orientations. This study was made using finite difference energy method, utilizing the nonlinear bifurcation branch with nonlinear prebuckling displacements. The results are compared to the buckling loads determined when membrane prebuckling displacements are considered.

Keywords : Buckling Analysis(좌굴해석), Laminated Composite Cylindrical Shell(복합적층 원통셸), Membrane Prebuckling(막전좌굴), Carbon Fiber(탄소섬유)

#### 1. 서론

높은 비강성과 비강도 및 낮은 열팽창률 등의 우수한 기계적 성질을 갖는 섬유강화 복합재료의 사용이 급격히 확산되고 있으며 금속재료에 비해 상당한 중량감소가 가능한 Graphite, Glass, Carbon, Boron 등과 같은 복합재료는 기존의 재료를 대체해 나가는 추세이다. 복합적층 구조물은 각 단층의 방향성과 적층구조에 의한 이방성

으로 복잡한 기계적 거동을 보인다. 특히 복합적층원통셸의 좌굴현상은 갑작스런 붕괴를 일으키므로 설계시 좌굴 거동은 중요 관심사이다. 일반적으로 복합적층원통셸은 후좌굴강도를 가질 수 있으나 과도한 좌굴은 최대변형률제한이나 반복하중에 따른 피로한도와 관련된 파손에 이를 수 있다. 등방성 원통셸의 경우 반경대 두께비, 길이대 반경비, 초기결합, 전좌굴변형 그리고 좌굴지지조건에 따른 좌굴강도 등의 변화에 대한 연구가 수행되어왔다.

\* 대전대학교 기계설계공학과

\*\* 국민대학교 기계설계학과

Jones 등<sup>1)</sup>은 단순지지된 비대칭 복합적층원통셸의 전좌굴이 좌굴강도에 미치는 영향에 대하여 연구하였으며 Harper 등<sup>2)</sup>은 축하중 또는 횡하중이 작용하는 고정지지된 복합적층원통셸의 전좌굴 영향에 대하여 연구하였다. 또한 Becker 등<sup>3)</sup>은 복합적층 원통형페널의 경우 유한차분에너지법<sup>4)</sup>에 의한 선형좌굴해석과 실험을 통하여 페널 길이대 폭비와 지지조건 등의 영향에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 에폭시 수지계에 탄소섬유를 함침시킨 USN 125로 구성된 복합적층원통셸에 축압축이 작용하는 경우 지지조건, 길이대 반경비 및 적층각의 변화에 따른 전좌굴의 영향을 해석하기 위하여 고전좌굴하중과 실제좌굴하중을 구하여 비교, 검토한다.

## 2. 이론

Fig. 1과 같은 복합적층원통셸의 좌굴하중을 산정하기 위하여 Fig. 2와 같은 막전좌굴상태로부터 고전좌굴하중을 구하고 유한차분에너지법을 사용하여 실제전좌굴상태로부터 실제좌굴하중을 구한다.

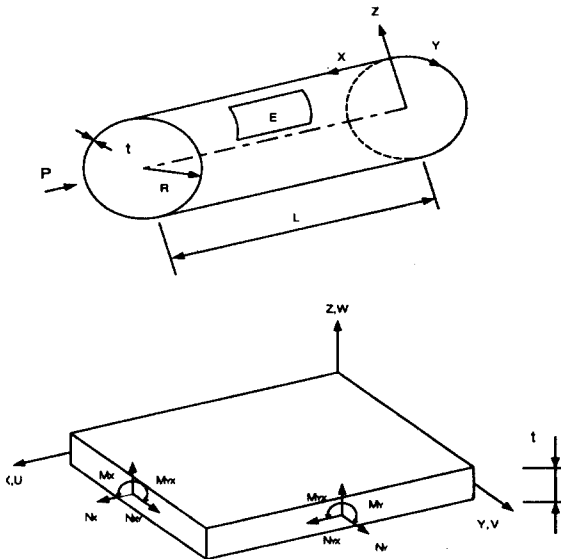


Fig. 1 Sign convention and notation

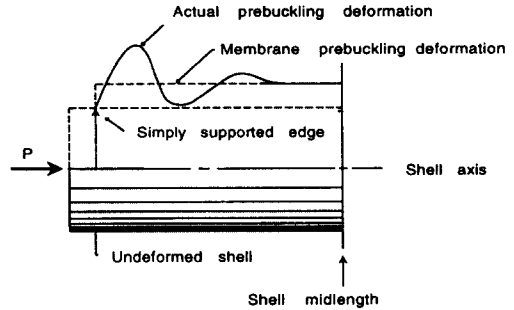


Fig. 2 Actual and membrane prebuckling deformation near the end of a simply supported circular cylindrical shell

### 2.1 고전좌굴하중

복합적층원통셸이 막변형률상태에 있다는 가정하에서 막변형률  $\epsilon_x^o, \epsilon_y^o, \gamma_{xy}^o$ 는 인장강성  $A_{ij}$ <sup>5)</sup>와 합응력  $N_x, N_y, N_{xy}$ 로 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서  $A_{ij}$ 는 변환된 축소강성행렬  $\bar{Q}_{ij}$ 로 다음과 같다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2)$$

전단 및 불균형적층을 고려하여 x, y, z 축방향 변위성분 u, v, w를 다음과 같이 일반적인 형태로 가정한다<sup>6)</sup>.

$$\begin{aligned} u &= \bar{A} n^2 m [ \sin(ny - mx) + \sin(ny + mx) ] \\ v &= \bar{B} n [ \sin(ny - mx) - \sin(ny + mx) ] \\ w &= \bar{C} [ \cos(ny - mx) - \cos(ny + mx) ] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 m, n은 x, y축방향의 좌굴파장계수이며  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 는 상수이다.

좌굴과정에서 하중과 합응력에 의한 변형에너지와 일은

다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^x \{ \varepsilon \} [C] \{ \varepsilon \} dx dy$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^x (N_x^0 w^2, x + N_y^0 w^2, y + 2N_{xy}^0 w, x w, y) dx dy \quad (4)$$

Donnell의 이론<sup>7)</sup>을 적용하면 전포텐셜에너지  $\Pi$ 는 다음과 같다.

$$\Pi = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서  $a_{ij}$ 는 적층강성, 합응력 및 좌굴과장계수로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{11} &= (A_{11} m^2 + A_{66} n^2) m^2 n^4 \\ a_{12} &= (A_{12} + A_{66}) m^2 n^4 \\ a_{13} &= -B_{11} m^4 n^2 \\ a_{22} &= (A_{22} n^2 + A_{66} m^2) n^2 \\ a_{23} &= B_{22} n^4 \\ a'_{33} &= [ 2D_{11} m^2 / n^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} n^2 / m^2 ] m^2 n^2 \\ a_{33} &= a'_{33} + 2(N_x^0 m^2 + N_y^0 n^2 + 2N_{xy}^0 mn) \end{aligned} \quad (6)$$

식 (5)에 최소포텐셜에너지원리를 적용하면 단순지지인 경우 고전좌굴하중계수는 다음과 같다.

$$\lambda_{cl} = \frac{a'_{33} + \frac{2a_{12} a_{13} a_{23} - a_{22} a_{13}^2 - a_{11} a_{23}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}{- (N_x m^2 + N_y n^2 + 2N_{xy} mn)} \quad (7)$$

### 2.2 실제좌굴하중

분기좌굴문제는 전포텐셜에너지의 2차변분으로 다음과 같다.

$$\delta^2 U = \int_s \int_\theta [ [ \varepsilon^1 ] [ C ] \{ \varepsilon^1 \}$$

$$+ [ \varepsilon^2 ] [ C ] \{ \varepsilon^0 \} + [ \varepsilon^0 ] [ C ] \{ \varepsilon^2 \} + [ \delta u, \delta v, \delta w ] [ P ] \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} r d\theta ds \quad (8)$$

여기서  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ 는 각각 변분  $\delta u, \delta v, \delta w$ 의 변형률벡터를 의미하고,  $[C]$ 는 합응력과 변형률계수행렬을 나타내며,  $[P]$ 는 압력과 회전효과,  $s$ 와  $\theta$ 는 길이 및 원주방향의 좌표 그리고  $r$ 은 셀의 회전반경을 나타낸다.

좌굴중의 변형률증분의 선형부  $\varepsilon^1$ 은 전좌굴회전  $\alpha_0$ 를 포함하며 전좌굴 변형률벡터  $\varepsilon^0$ 는 전좌굴회전에서 선형과 2차항을 포함한다. 적분을 수행하고 2차변분을 종속변수  $\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i$  그리고 Lagrange multiplier에 관해서 최소화 시키면 다음과 같이 고유치문제가 된다.

$$K_1 x + \lambda K_2 x + \lambda^2 K_3 x = 0 \quad (9)$$

식 (9)로부터 inverse power method를 사용하여 고유치를 구하면 실제좌굴하중계수를 산정할 수 있다.

수치해석을 위한 컴퓨터 프로그램은 FORTRAN 77으로 작성하였으며 그 흐름도는 Fig. 3과 같다

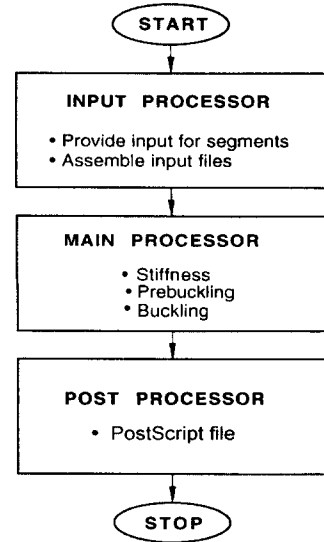


Fig. 3 Flow diagram for buckling analysis

### 3. 수치 예

#### 3.1 해석모델

본 논문에서는 복합적층원통셀에 축압축이 작용하는 경우 길이대 반경비와 적층각의 변화에 따른 좌굴하중을 구하고 전좌굴의 영향을 검토한다. 사용된 복합재는 에폭시 수지계에 탄소섬유를 함침시킨 USN 125이며, 적층은  $[0, \pm \theta, 90]_s$ 과 같이 대칭으로 재료적 성질 및 기하학적 형상은 다음과 같다.

$$E_{11} = 111\text{GPa}, \quad E_{22} = 7.0\text{GPa}, \quad G_{12} = 4.7\text{GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.28, \quad R = 75\text{mm}, \quad t = 1.0\text{mm}$$

길이대 반경비  $L/R = 1, 5, 9$ 로 변화시키고 적층각  $\theta = 0^\circ$  에서  $90^\circ$  까지  $15^\circ$  간격으로 변화시키면서 각 경우에 대한 좌굴하중을 구한다.

#### 3.2 지지조건

사용된 해석모델의 지지조건은 다음과 같이 단순지지(S1~S4)인 경우와 고정지지(C1~C4)인 경우를 각각 고찰한다<sup>8)</sup>.

	u	v	w	$w_{,xx}$
S1	0	0	0	0
S2	FREE	0	0	0
S3	0	FREE	0	0
S4	FREE	FREE	0	0
	u	v	w	$w_{,x}$
C1	0	0	0	0
C2	FREE	0	0	0
C3	0	FREE	0	0
C4	FREE	FREE	0	0

### 4. 결과 및 검토

#### 4.1 실제전좌굴의 영향

단순지지(S2)조건에 대한 고전좌굴하중과 실제좌굴하중을 산정하여 수치결과를 Fig. 4-6에 도시하였다.

상기 결과에서  $L/R=1$ 일 때는 실제좌굴하중과 고전좌굴하중이 거의 같은 값을 나타내나  $L/R$ 이 증가하면 전좌굴의 영향에 의하여 그 차가 증가함을 알 수 있다. 최대좌굴하중은 고전좌굴하중에서는 적층각  $\theta = 45^\circ \sim 60^\circ$  부

근에서 발생하고 실제좌굴하중에서는  $L/R$ 의 증가에 따라  $\theta = 60^\circ \sim 75^\circ$  부근에서 발생한다.

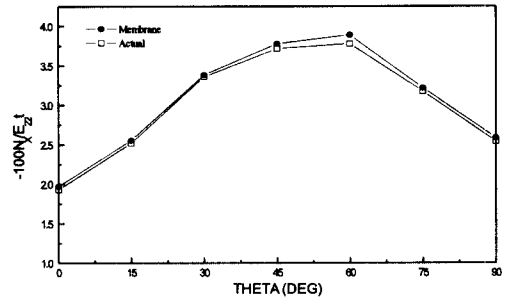


Fig. 4 Prebuckling effect(  $L/R=1$  )

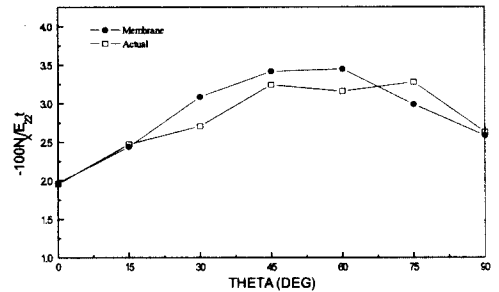


Fig. 5 Prebuckling effect(  $L/R=5$  )

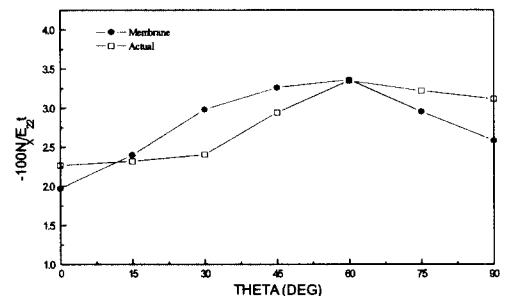


Fig. 6 Prebuckling effect(  $L/R=9$  )

#### 4.2 지지조건에 따른 실제좌굴하중

단순지지 및 고정지지조건에 대한 실제좌굴하중을 산정하여 수치결과를 Fig. 7-12에 도시하였다. 단순지지조건에서는 S1의 좌굴하중이 가장 크며 고정지지조건에서는

L/R의 변화에 관계없이 C1과 C3 그리고 C2와 C4가 거의 같은 좌굴하중을 나타낸다. 최대좌굴하중은 단순지지조건에서는 적층각  $\theta = 45^\circ \sim 60^\circ$  부근에서 발생하고 고정지지조건에서 C1과 C3의 경우에는 적층각  $\theta = 45^\circ \sim 60^\circ$  부근, C2와 C4의 경우에는 적층각  $\theta = 60^\circ \sim 75^\circ$  부근에서 발생한다.

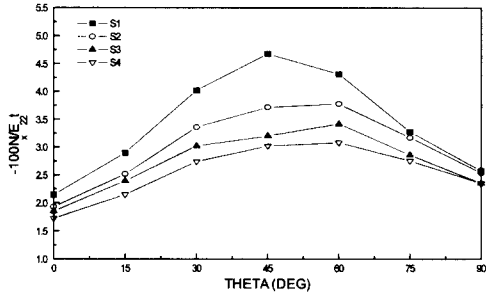


Fig. 7 Actual buckling load( L/R=1 )

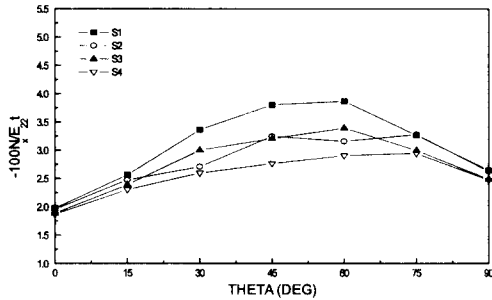


Fig. 8 Actual buckling load( L/R=5 )

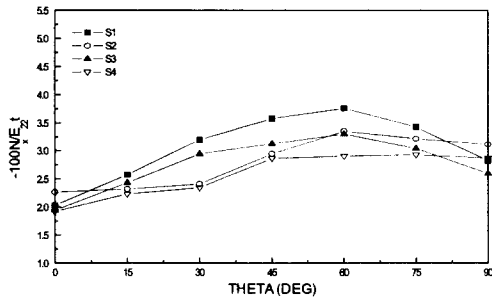


Fig. 9 Actual buckling load( L/R=9 )

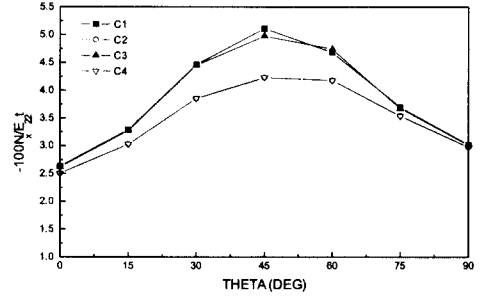


Fig. 10 Actual buckling load( L/R=1 )

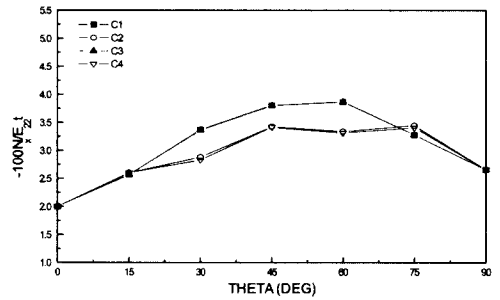


Fig. 11 Actual buckling load( L/R=5 )

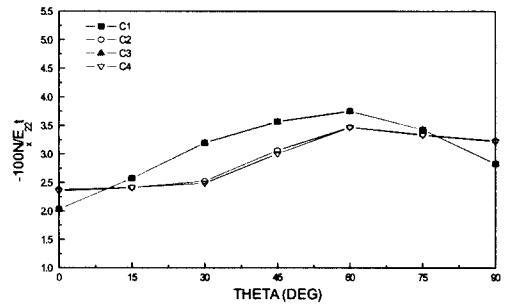


Fig. 12 Actual buckling load( L/R=9 )

## 5. 결론

복합적층원통셴에 축압축이 작용할 때 전좌굴의 영향을 해석하기 위하여 고전좌굴하중과 실제좌굴하중을 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 길이대 반경비가 작으면 실제좌굴하중과 고전좌굴하중이 거의 같은 값을 나타내나 길이대 반경비가 증가하면 전좌굴의 영향에 의하여 그 차가 커진다.
- 2) 최대좌굴하중을 갖는 적층각은 고전좌굴하중에서는  $45^\circ \sim 60^\circ$  부근에서, 실제좌굴하중에서는 길이대 반경비의 변화에 따라  $60^\circ \sim 75^\circ$  부근을 나타낸다.
- 3) 지지조건에 따른 실제좌굴하중은 단순지지에서는 S1이 가장 크나 고정지지에서는 C1과 C3 그리고 C2와 C4가 거의 같은 좌굴하중을 나타낸다.

### 참 고 문 헌

- 1) R.M.Jones and J.C.F.Hennemann, "Effect of Prebuckling Deformation on Buckling of Laminated Composite Circular Cylindrical Shells", AIAA J., Vol.18, No.1, pp.110-115, 1980.
- 2) J.G.Harper and A.N.Palazotto, "Buckling Analysis of Laminated Composite Circular Cylindrical Shells", SAE 790981, pp.91-104, 1979.
- 3) M.L.Becker, A.N.Palazotto and N.S.Knot, "Experimental Investigation of the Instability of Composite Cylindrical Panels", Experimental Mech., Vol.15, No.4, pp.393-403, 1982.
- 4) D.Bushnell, "Computerized Analysis of Shells-Governing Equations", Computers & Structures, Vol.18, No.3, pp.471-536, 1984.
- 5) R.M.Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, 1975.
- 6) D.Bushnell, "PANDA:Interactive Program for Minimum Weight Design of Composite and Elastic-Plastic Stiffened Cylindrical Panels and Shells", Pergamon Press, 1986.
- 7) L.H.Donnell, "A New Theory for the Buckling of a Thin Cylinder under Compression and Bending", Trans. ASME, Vol.56, No.11, pp.759-806, 1934.
- 8) B.O.Almroth, "Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells", AIAA J., Vol.4, No.1, pp.134-140, 1966.