

# 전달행렬법을 이용한 3차원 파이프 계의 진동해석

이 동 명\*

## Vibration Analysis of Three-Dimensional Piping System by Transfer Matrix Method

Dong-Myung Lee\*

### Abstract

For the vibration analysis of 3-dimensional piping system containing fluid flow, a transfer matrix method is presented. The fluid velocity and pressure were considered, that coupled to longitudinal and flexural vibrations. Transfer matrices and point matrices were derived from direct solutions of the differential equations of motion of pipe conveying fluids, and the variations of natural frequency with flow velocity for 3-dimensional piping system were investigated.

Keywords : Transfer matrix(전달행렬), State vector(상태벡터), Point matrix(절점행렬), Natural frequency(고유진동수), Coupled(연성), Piping system(파이프 계)

### 1. 서론

산업전반에 걸쳐 사용되고 있는 파이프라인의 내부에는 유체가 유동하고 있고, 파이프 계는 유동유체의 동적 상호작용에 영향을 받는다. 이들 상호작용으로부터 파이프 계의 진동특성은 파이프와 유체의 특성이 동시에 고려되지 않으면 안 된다. 산업현장에 설치되어 있는 파이프 계와 같이 복잡한 형상과 유동특성을 가지면 해석적인 방법<sup>(1,2,3)</sup>으로는 파이프의 진동특성을 정확히 규명하기 어렵고, 유한요소법<sup>(4,5)</sup>이나 전달행렬법<sup>(6)</sup>과 같은 수치해석적인 방법이 바람직하다.

기존 연구들은 횡진동<sup>(4,5)</sup>이나 종진동<sup>(7)</sup>에서의 유동특성과 파이프를 2차원 직선 탄성관으로 모델링하여 3차원 공간상에서의 유동특성과 파이프 각 방향의 자유도를 고려하지 못했다.

본 연구에서는 3차원 파이프의 내부에 정상유체가 흐를 때 유체와 파이프의 특성 및 파이프 각 방향의 자유도를 모두 고려하고, 해석방법으로 계산용량과 시간을 절감하기 위해 전달행렬법을 이용하였다. 또한 3차원 파이프의 진동해석을 할 때 방향이 바뀌는 곳에서 발생할 수 있는 각 방향의 연성은 굴곡파이프의 전달행렬을 구하여 해결하였다.

\* 경민대학

## 2. 운동방정식

내부 유체를 포함한 파이프 계의 진동특성은 유체의 유동특성에 영향을 받으므로 유체-파이프간의 상호작용은 정확하게 정의되고 고려되어야 한다. 이러한 상호작용은 Fig. 1에 나타낸바와 같이 힘과 변위로 나타나게 된다. 직선 파이프의 절점 하나에 자기 3개의 힘, 모멘트, 병진과 회전변위 그리고 유체의 속도와 압력으로 14개의 자유도를 갖는다. Fig.1에서  $u$ 는 변위,  $f$ 는 힘,  $m$ 은 모멘트,  $\theta$ 는 비틀림각,  $p$ 는 압력 그리고  $v$ 는 유속을 나타낸다.  $t_p, r, l$ 은 자기 파이프의 두께, 반경, 그리고 길이를 나타내며, 하첨자  $x, y, z$ 은 각 좌표를 나타낸다.

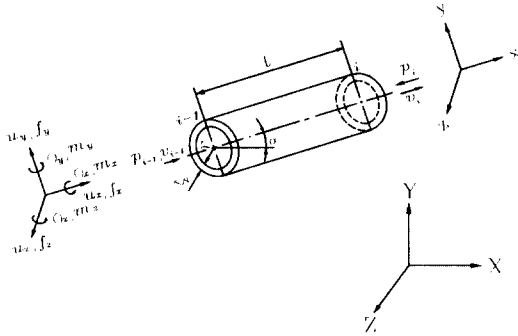


Fig. 1 Degree of freedom at node of pipe

유체를 포함한 파이프 종방향의 운동방정식은 축방향의 힘 :

$$a_p^2 \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial t^2} + \nu A_p b \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

유체의 압력 :  $a_f^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$

파이프의 변위 :

$$a_p^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \nu a_f^2 \frac{b}{d} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

유체의 속도 :  $a_f^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$

여기서

$$a_p^2 = \frac{E}{\rho_p}, \quad b = \frac{r}{t_p}, \quad a_f^2 = \frac{K^*}{\rho_f}, \quad d = \frac{\rho_p}{\rho_f}$$

$$K^* = \frac{K}{1 + (K/E)(r/t_p)c_1}, \quad c_1 = 1 - \frac{\nu}{2}$$

A는 단면적,  $\rho$ 는 밀도이다. 아래첨자  $p$ 와  $f$ 는 파이프와 유체를 의미한다.  $a_p^2$ 와  $a_f^2$ 는 자기 파이프와 유체의 파동속도이다. 상기 식들에서  $\sigma, \nu, E$ 는 자기 파이프의 응력, 포아송비 및 탄성계수이고,  $K$ 는 유체의 체적탄성계수이다.  $f_x(x, t) = F_x(x) e^{j\omega t}$  형태의 변수분리법 이용하면 운동방정식 (1)~(4)의 해인  $F_x, U_x, P, V$ 를 구할 수 있다. 이들 값은 파이프의 힘과 변위, 유체의 압력과 속도진폭을 의미한다. 그리고  $\omega$ 는 조화진동수,  $t$ 는 시간이며,  $j = \sqrt{-1}$ 이다.

유속  $v_0$ 와 내부압력  $p_0$ 인 유체가 흐를 때, 유체의 유동특성을 고려한 파이프 횡방향의 운동방정식은 변형식<sup>(10)</sup>으로 다음과 같이 주어진다.

$$EI_b \frac{\partial^4 f_y}{\partial x^4} + (m_f v_0^2 + p_0 A_f - F_{xi}) \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 f_y}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

식(5)에서  $f_y$ 는 파이프의 횡전단력이고,  $m_f = \rho_f A_f l$ 로 유체질량이며,  $M = p_f A_f + p_p A_p$ 로 유체와 파이프의 질량을 더한 값이며,  $I_p$ 는 파이프의 관성모멘트이다. 초기장력  $F_{xi} = \frac{EA_p}{l}(u_{xi} - u_{x(i-1)})$ 로 계가 정적인 평형상태에서 계에 작용하는 정적인 힘이다.  $f_y(x, t) = F_y(x) e^{j\omega t}$  변수분리법을 이용하면 식(5)의 해인 횡전단력의 진폭  $U_y$ 를 구할 수 있고, 변위진폭  $U_x$ 는 횡전단력 진폭  $F_y$ 와의 관계식(6)으로부터 구할 수 있다. 회전각 진폭  $\Theta_z$ 와 굽힘모멘트 진폭  $M_z$ 는 식(7)과 (8)로부터 구할 수 있다.

$$\frac{dF_y}{dx} = -M\omega^2 U_x \quad (6)$$

$$\Theta_z(x) = -\frac{\partial U_y}{\partial x} \quad (7)$$

$$M_z(x) = EI_p \frac{\partial \Theta_z}{\partial x} \quad (8)$$

3차원 파이프 계의 횡진동은 x-y 평면과 x-z 평면의 진동으로 나누어 생각할 수 있고, 두 평면의 운동방정식은 같고 단지 부호만 다를 뿐이다.

유체의 점성을 무시한다면, 파이프 축방향의 비틀림 각과 비틀림 모멘트에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - \rho_p J_p \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

$$m_x - G J_p \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

이들 식의 해도 변수분리법을 이용하면 쉽게 얻을 수 있고, 회전변위 진폭  $\theta_x$ 와 비틀림 모멘트 진폭  $M_x$ 를 구할 수 있다. 여기서  $G$ 와  $J_p$ 는 파이프의 전단탄성계수와 극관성모멘트이다.

### 3. 전달행렬

각 방향의 운동방정식에서 구해진 해의 적분상수는 파이프의 경계조건으로부터 일반적인 형태가 유도된다. 한편 이들 상수는 운동의 형태로부터 알게 되고, 전달행렬로 조합되어진다. 유체특성을 고려한 직선 파이프의 전달행렬과 굴곡 파이프의 절점행렬을 제시하였다.

입의의 정점에서 계의 변위와 힘은 상태벡터에 의해 배열되고, 전체전달행렬은 계행렬과 절점행렬의 체계적인 곱셈으로 조합되어진다. 계의 전달행렬은 인접단면에서 상당 힘과 변위에 의해 연속형태로 구조물의 한 단면에서 힘과 변위로 표시된다. 불연속계의 경우 계행렬은 질량간의 탄성체에 전달되는 것으로 고려한다. 계행렬은 파이프의 양끝단  $x=0$ 와  $l$ 에서 상태벡터의 함수로서 나타나게 된다<sup>(8)</sup>.

$$\{Z(x)\} = [B(x)]\{A\} \quad (11)$$

식(11)에서  $\{Z(x)\}$ 는 어떤 하나의 독립변수를 나타내는 상태벡터이고,  $[B(x)]$ 는 파이프의 재질이나 특성 또는 기하학적 형상에 의존되는 행렬이며,  $\{A\}$ 는 운동방정식의 적분 상수를 나타내는 벡터이다.

Fig. 1로부터  $x=0$ 에서  $\{Z(x)\} = \{Z\}_{i-1}$ 로 하고,  $x=l$ 에서  $\{Z(x)\} = \{Z\}_i$ 로 하면, 이들의 관계로부터 벡터  $\{A\}$ 에 대한 식을 얻을 수 있다. 벡터  $\{A\}$ 의 식을 식(11)에 대입하면 식(12)가 얻어지게 되고, 식(12)에서  $\{T\}$ 는 계의 전달행렬이 된다.

$$\{Z(x)\} = [B(l)]\{B(0)\}^{-1}\{Z\}_{i-1} = \{T\}\{Z\}_{i-1} \quad (12)$$

직선 파이프의 종진동에 대한 계의 전달행렬은 식(12)

로부터 구할 수 있고, 계산의 편의를 위해 계행렬을 무차원화 하면 다음과 같다.

$$[T_x] = \begin{bmatrix} \sigma C_2 - C_0 & -\frac{\nu b}{h} [C_1 - (\sigma + \tau)C_3] & -\frac{\nu b}{h} \tau C_2 & -C_1 + \sigma C_3 \\ 2\nu \sigma C_3 & \tau C_2 - C_0 & \tau(\tau C_3 - C_1) & -2\nu \tau C_2 \\ 2\nu \sigma C_2 & C_1 - (\tau + \frac{\sigma}{\tau})C_3 & \tau C_2 - C_0 & 2\nu[(\sigma + \tau)C_3 - C_1] \\ \sigma(C_1 + \sigma C_3) & -\frac{\nu b}{h} \sigma C_2 & -\frac{\nu b}{h} \sigma \tau C_3 & \sigma C_2 - C_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$\tau = \frac{\omega^2 l^2}{a_f^2}, \quad \sigma = \frac{\omega^2 l^2}{a_p^2}, \quad b = \frac{r}{t_p}, \quad h = \frac{E}{K^*}$$

$$C_0 = \Delta [ \lambda_2^2 \cos(\lambda_1) - \lambda_1^2 \cos(\lambda_2) ]$$

$$C_1 = \Delta [ \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sin(\lambda_1) - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin(\lambda_2) ]$$

$$C_2 = \Delta [ \cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2) ]$$

$$C_3 = \Delta [ \frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1) - \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2) ]$$

$$\Delta = [ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 ]^{-1}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2} [ (\tau + \sigma) - \sqrt{(\tau + \sigma)^2 - 4\tau\sigma} ]$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{2} [ (\tau + \sigma) + \sqrt{(\tau + \sigma)^2 - 4\tau\sigma} ]$$

Fig. 1의 위치  $i$ 에서 무차원의 상태벡터는 다음과 같다.

$$\{Z\}_i = \left\{ \frac{U_x}{l} \frac{P}{K^*} \frac{V}{l} \frac{F_x}{EA_p} \right\}_i^T \quad (14)$$

직선 파이프의 횡진동에 대한 계의 전달행렬은 식(12)로부터 구할 수 있고, 무차원의 계행렬은 다음과 같다.

$$[T_{xy}] = \begin{bmatrix} -\Delta C_1 & -\Delta C_2 & -\Delta C_3 & -\frac{\Delta}{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 C_4 \\ \Delta \lambda_1 \lambda_2 C_5 & \Delta C_6 & \Delta C_2 & \frac{\Delta}{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 C_3 \\ \Delta \lambda_1^2 \lambda_2^2 C_7 & \Delta C_8 & \Delta C_1 & \frac{\Delta}{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 C_2 \\ \gamma \Delta C_9 & \gamma \Delta C_3 & \gamma \Delta C_{10} & \Delta C_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서

$$\Delta = [ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 ]^{-1}, \quad \gamma = \frac{M}{EI_p} \omega^2 l^4$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \lambda_1 \sinh \lambda_1 + \lambda_2 \sin \lambda_2 \\
 C_1 &= \lambda_2^2 \cosh \lambda_1 - \lambda_1^2 \cos \lambda_2 \\
 C_3 &= \cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2 \\
 C_4 &= \lambda_2 \sinh \lambda_1 - \lambda_1 \sin \lambda_2 \\
 C_5 &= \lambda_2 \sinh \lambda_1 + \lambda_1 \sin \lambda_2 \\
 C_6 &= \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_2^2 \cos \lambda_2 \\
 C_7 &= \cosh \lambda_1 + \cos \lambda_2 \\
 C_8 &= \lambda_1^3 \sinh \lambda_1 - \lambda_2^3 \sin \lambda_2 \\
 C_9 &= \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \\
 C_{10} &= \sinh \lambda_1 - \sin \lambda_2
 \end{aligned}$$

Fig. 1의 위치  $i$ 에서 무차원의 상태벡터는 다음과 같다.

$$\{Z\}_i = \left\{ \frac{U_y}{l} \theta_z \frac{M_z l}{EI_b} \frac{F_y l^2}{EI_b} \right\}_i^T \quad (16)$$

x-z 평면의 계의 전달행렬은 식(15)와 같으나 부호만 다르고, Fig. 1의 위치  $i$ 에서 무차원의 상태벡터는 다음과 같다.

$$\{Z\}_i = \left\{ \frac{U_z}{l} \theta_y \frac{M_y l}{EI_b} \frac{F_z l^2}{EI_b} \right\}_i^T \quad (17)$$

직선 파이프의 비틀림 진동에 대한 계의 전달행렬도 식(12)로부터 구할 수 있고, 무차원의 계행렬은 다음과 같다.

$$[T_{\alpha}] = \begin{bmatrix} -\cos(\lambda) & -\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda) \\ \lambda \sin(\lambda) & -\cos(\lambda) \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서

$$\lambda = \omega l \sqrt{\frac{\rho_p}{G}}$$

Fig. 1의 위치  $i$ 에서 무차원의 상태벡터는 다음과 같다.

$$\{Z\}_i = \left\{ \theta_x \frac{M_x l}{GJ_p} \right\}_i^T \quad (19)$$

파이프 요소에 대한 계의 전달행렬은 앞서 정의된 4개의 부행렬로 구성되며, 아울러 상태벡터는 파이프요소의

절점 하나에 14개의 독립변수를 갖게 된다.

$$\{Z\}_i = [T_i] \{Z\}_{i-1} \quad (20)$$

여기서  $[T_i]$ 는 파이프 요소의 길이  $l$ 에 대한 국부 좌표계의 전달행렬로 다음과 같다.

$$[T_L] = \begin{bmatrix} [T_{fx}] & & & \\ & [T_{xy}] & & \\ & & [T_{xz}] & \\ & & & [T_{\alpha}] \end{bmatrix} \quad (21)$$

임의의 위치  $i$ 에서 무차원의 상태벡터는 다음과 같다.

$$\{Z\}_i = \left\{ \frac{U_x}{l} \frac{P}{K} \frac{V}{l} \frac{F_x}{A_p E} \frac{U_y}{l} \theta_z \frac{M_z l}{EI_b} \frac{F_y l^2}{EI_b} \frac{U_z}{l} \theta_y \frac{M_y l}{EI_b} \frac{F_z l^2}{EI_b} \theta_x \frac{M_x l}{GJ_p} \right\}_i^T \quad (29)$$

3차원 공간에서의 파이프 계는 직선 파이프뿐만 아니라 엘보나 밴드와 같은 굴곡 파이프들로 연결되어 방향도 서로 다르게 구성되어 있다. 파이프의 방향이 다르면 유체와 파이프의 특성 즉, 유체의 유속과 압력 그리고 파이프의 변위, 힘, 모멘트는 복합적인 연성현상으로 발생한다. 굴곡 파이프의 진동특성은 굴곡 보의 진동특성과 마찬가지로 면내 진동<sup>(2)</sup>과 면외진동<sup>(3)</sup>으로 구분하여 나타낼 수 있다.

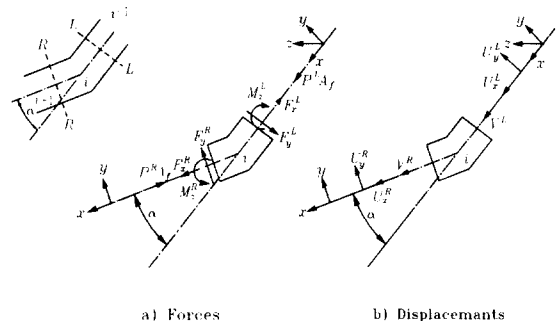


Fig. 2 Forces and displacements at elbow

Fig. 2a는 국부좌표계에서 굴곡부에 발생하는 내부 힘이고, Fig. 2b는 변위를 나타낸 것이다. 점  $i$ 에서 오른쪽

의 상태벡터  $\{Z\}_i^R$  과 왼쪽의 상태벡터  $\{Z\}_i^L$  의 관계는 평형조건과 연속성으로 나타낼 수 있다. 굴곡 파이프의 면내진동은 유체와 직선 파이프에서 수식화된 종진동에 굴곡 파이프의 각도  $\alpha$  를 고려하여 수식화 한다. 특히 굴곡 파이프의 휨에 대해서는 단면형상의 변화에 따라 굽힘강성의 변화가 무시될 수 없다는 지적(9)에 따라 횡진동에 있어서 카르만(Von Karman)의 휨 강성계수  $K$  를 고려해야 한다.

$$K = \frac{1 + 12\chi^2}{10 + 12\chi^2}, \quad \chi = \frac{Rt_f}{r^2} \quad (23)$$

식(23)에서  $\chi$  는 굴곡 파이프의 평균반지름  $R$  과 파이프의 반지름  $r$  의 비로서 굴곡 파이프의 특성을 나타내는 값이다. 굴곡 파이프의 면외진동은 직선 파이프에서  $x$ - $z$  평면의 횡진동과 비틀림 진동으로 수식화 한다. Fig. 2에서 점  $i$  에 대한 오른쪽 상태벡터  $\{Z\}_i^R$  과 왼쪽 상태벡터  $\{Z\}_i^L$  는 면내진동과 면외진동에서 정의된 수식으로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{Z\}_i^R = [P_L^E]_i \{Z\}_i^L \quad (24)$$

식(24)에서  $\{Z\}_i$  는 식(22)와 같고  $[P_L^E]$  는 열보의 절점행렬로 식(25)와 같다.

$$[P_L^E] = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (C-1) & 0 & 1 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae(1-C) & 0 & C & 0 & 0 & 0 & (1/r)S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa aeS & 0 & -\kappa S & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (25)$$

여기서

$$g = \frac{A_p l^2}{I_p}, \quad q = \frac{A_f}{A_p}, \quad e = \frac{K^*}{E}$$

$$C = \cos \alpha, \quad S = \sin \alpha$$

각 부구조계의 전달행렬이 얻어지게 되면 전체전달행렬은 다음 3단계계를 거쳐 형성된다. 첫째 행렬의 항들을 재배열한다. 둘째 변환행렬을 이용하여 국부 좌표계로 형성되어진 행렬을 전체 좌표계로 변형시킨다. 셋째 변형된 행

렬들을 순차적으로 곱한다. 이들 3단계계를 거쳐 형성된 전체 전달행렬  $[U]$  는 다음과 같다.

$$[U]_i = [P_L]_i [T_L]_i \quad (26)$$

유체를 포함하고 있는 파이프 계의 고유진동수는 경계 조건의 차수에 따라 결정되고, 파이프의 운동상태에 따라 행렬식의 차수가 결정된다.

$[U]$  와  $\{Z\}$  가 파이프의 전체전달행렬과 상태벡터라고 하면, 이들의 관계는 식(27)과 같이 나타낼 수 있다. 식(27)에서 0과 1은 좌·우측의 위치를 나타낸다.

$$\{Z\}_1 = [U]\{Z\}_0 \quad (27)$$

전체 전달행렬은 파이프 양 끝단의 경계조건에 의한 상태벡터와 관계가 있으며, 좌측 경계조건  $[R_L]$ , 우측 경계조건  $[R_R]$  을 적용하면

$$\begin{aligned} \{0\} &= [R_R][U][R_L]\{Z\}_0 \\ &= [U_G]\{Z\}_0 \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 벡터  $\{Z\}_0$  는 영이 아닌 변수를 나타내고, 행렬  $[U_G]$  는 유체와 파이프의 특성값을 나타낸다. 또 행렬  $[U_G]$  는  $\omega$  의 함수로서, 식(28)이 유용해(Non-trivial solution)의 값을 갖기 위해서는

$$\Delta(\omega) = |[U_G]| = 0 \quad (29)$$

$\Delta(\omega)$  를 진동수방정식이라고 하며, 진동수 방정식을 만족하는  $\omega$  의 값이 계의 고유진동수가 된다.

#### 4. 해석결과 및 고찰

굴곡각도  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ$  의 양단이 고정-고정인 세 종류의 3차원 형상의 굴곡 파이프를 예제로 선택하여 앞서 구해진 전달행렬과 알고리즘을 이용하여 해석하였다. 파이프의 각 모델은 모두 7개의 절점으로 나누었고, Fig. 3~5에서 0~6은 절점번호이다. 파이프와 유체의 물리적 특성값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{파이프} : E &= 124.11 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.34, \quad \rho = 8.900 \text{ Kg/m}^3 \\ \text{외경} &= 19.05 \text{ mm}, \quad \text{두께} = 0.9 \text{ mm}, \quad \text{길이} = 3.6 \text{ m} \end{aligned}$$

유 체 :  $\rho=1,000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $K=2.19 \text{ GPa}$

본 연구의 결과를 검증하기 위해 각 모델의 고유진동수를 2차까지만 구하여 ANSYS와 비교하였다. Table 1에 제시한 바와 같이 잘 일치함을 보여주고 있다. 이때 유체의 고유진동수는 파이프의 저차 고유진동수보다 훨씬 크기 때문에 무시하고 계산하였다.

Table 1 Comparison of natural frequencies

Curved Angle	Mode No.	Presented(Hz)	ANSYS(Hz)
$\alpha = 90^\circ$	1st	5.1	5.1
	2nd	11.3	11.4
$\alpha = 120^\circ$	1st	5.0	5.1
	2nd	10.6	10.5
$\alpha = 150^\circ$	1st	5.1	5.1
	2nd	10.8	10.7

Fig. 3~5는 파이프의 내부를 흐르는 유체의 유속이 일정할 때 유속의 변화에 따른 파이프 계의 고유진동수의 변화를 살펴본 것이다. Fig. 3~5에 나타난 바와 같이 유속이 영일 때 각 파이프의 1차 모드는 약 5.1Hz로 모두 비슷하고, 2차 모드는 파이프의 굴곡각도에 따라 다소 차이를 보이고 있다. Fig. 3의 경우 유속이 무한하게 되어도 고유진동수가 급격히 떨어지는 현상이 나타나지 않는데, 이는 정적인 평형상태에서 파이프의 초기 장력이 유체의 원심력에 해당하는 힘을 상쇄시켜주기 때문이다<sup>(10)</sup>. Fig. 4와 5의 경우는 굴곡각도가 커짐에 따라 고유진동수가 커지고, 직선 파이프와 2차원 형상의 굴곡 파이프<sup>(10)</sup>와 마찬가지로 유속이 증가하면 모델 모두 고유진동수는 감소한다.

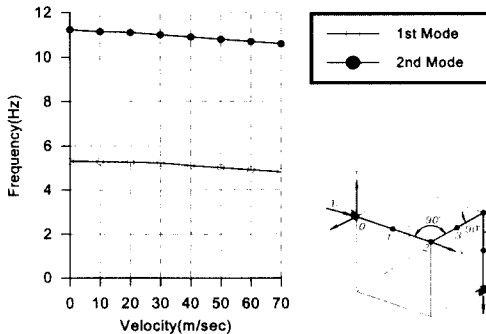


Fig. 3 Natural frequencies of the curved pipe for the curved angle of  $90^\circ$

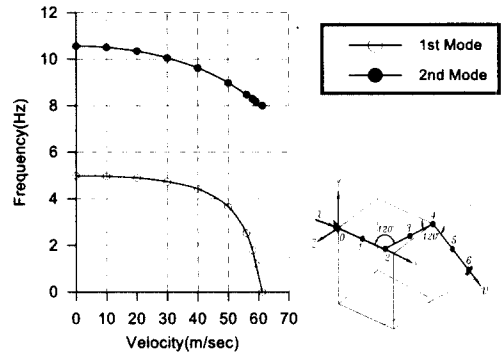


Fig. 4 Natural frequencies of the curved pipe for the curved angle of  $120^\circ$

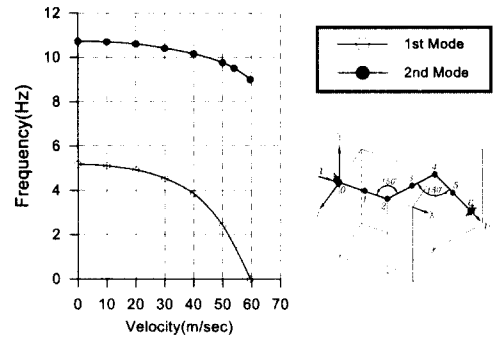


Fig. 5 Natural frequencies of the curved pipe for the curved angle of  $150^\circ$

## 5. 결론

내부 유체를 포함한 3차원 파이프 계의 진동해석을 위해 전달행렬법을 이용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 기존의 연구에서 별개로 다루던 시간의 함수로 주어지는 유속과 압력을 종진동과 횡진동에 결합시켜 3차원 파이프 계의 진동해석이론과 알고리즘을 제시하였다.
2. 파이프 계의 진동해석과 각 방향의 연성을 고려한 전달행렬과 절점행렬이 제시되었다.
3. 파이프 계의 진동모드는 유속의 변화에 따라 크게 좌우되고, 굴곡각도가 커짐에 따라 고유진동수가 커진다.
4. 본 연구의 해석이론과 알고리즘을 바탕으로 산업계에 설치되어있는 3차원 파이프 계에도 쉽게 응용할 수 있을 것으로 본다.

참 고 문 헌

1. G.W. Housner, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid", J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, June, pp.205-208, 1952.
2. S.S. Chen, "Vibration and Stability of a Uniformly Curved Tube Conveying Fluid", J. Acoust. Soc. Am., Vol.51, No.1, Part 2, pp.223-232, 1972.
3. S.S. Chen, "Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tubes Conveying Fluid", J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, June, pp.362-368, 1973.
4. A.K. Kohli and B.C. Nakra, "Vibration Analysis of Straight and Curved Tubes Conveying Fluid By Means of Straight Beam Finite Elements", J. of Sound and Vibration, Vol.93, No.2, pp.307-311, 1984.
5. G.C. Everstin, "Dynamic Analysis of Fluid-Filled Piping Systems Using Finite Element Techniques", J. of Pressure Vessel Technology, Trans. ASME, Vol.108, Feb., pp.57-61, 1986.
6. C.W.S. To and V. Kalad, "Vibration of Piping Systems Containing a Moving Medium", J. of Pressure Vessel Technology, Trans. ASME, Vol.107, Nov., pp.344-349, 1985.
7. J.S. Walker and J.W. Phillips, "Pulse Propagation in Fluid-Filled Tubes ", J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, pp.31~35, March 1977.
8. Pestel, E.C., Leckie, F.A., Matrix methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, Book Co., New York, pp.51-204, 1963.
9. J. P. Den Hartog, Advanced Strength of Materials, McGraw-Hill Book Co., Inc., pp.234~245, 1952.
10. Dong-Myung Lee, Myung-Jin Choi and Taek-Yul Oh, "Transfer Matrix Modelling for the 3-Dimensional Vibration Analysis of Piping System Containing Fluid Flow ", KSME Journal, Vol.10, No.2 , pp.180~189, 1996.