

파동특성을 갖는 쌍곡선형 열전도방정식에 관한 수치해법

조 창 주*

Numerical method of hyperbolic heat conduction equation with wave nature

C. J. CHO

Key words : hyperbolic equation(쌍곡선형 방정식), wave nature(파동특성), discontinuity(불연속성), modified heat conduction equation(수정된 열전도방정식)

Abstract

The solution of hyperbolic equation with wave nature has sharp discontinuities in the medium at the wave front. Difficulties encountered in the numerical solution of such problem include, among others, numerical oscillation and the representation of sharp discontinuities with good resolution at the wave front. In this work inviscid Burgers equation and modified heat conduction equation is introduced as hyperbolic equation. These equations are calculated by numerical methods(explicit method, MacCormack method, Total Variation Diminishing(TVD) method) along various Courant numbers and numerical solutions are compared with the exact analytic solution. For inviscid Burgers equation, TVD method remains stable and produces high resolution at sharp wave front but for modified heat conduction equation MacCormack method is recommended as numerical technique.

1. 서 론

파동특성을 갖는 쌍곡선형(hyperbolic) 열전도 방정식의 일반적인 해는 포물선형(parabolic) 방정식의 해와는 달리 전파된 파의 선단에서 해가 급속히 변화하거나 불연속성(discontinuity)을 갖는다. 이러한 불연속점에서의 정확한 해를 수치해석에 의하여 구하기가 매우 어려우며, 또한 해가 심하게 진동하는 현상이 발생하게 되므로 이러한 불연속

점에서 정확한 해를 구할 수 있는 수치해법에 대한 연구가 필요하다. 이 연구에서는 파동특성을 갖는 쌍곡선형의 방정식으로는 비점성(inviscid) Burgers 방정식과 수정된 열전도방정식(modified heat conduction equation)을 선택 하였다. 임의의 점에서 일정한 속도로 흐르는 유체에 대하여, 일정한 시간후의 비점성 Burgers 방정식에 의한 속도는 속도파(wave of velocity)가 전파되는 것으로 해석될 수 있으므로 속도파의 선단에서 불연속성이 발

* 전남대학교 환경연구소(원고접수일 : 98년 6월)

생된다. 비점성 Burgers 방정식은 수치해석방법 연구에 있어서 선형(linear) 방정식의 특성과 비선형(nonlinear) 방정식의 특성을 연구하기 위한 방정식으로 많이 사용된다^{1, 2)}. 수정된 열전도방정식은 열이 전파되는 속도를 무한하다고 가정한 Fourier 열전도방정식과는 달리, 열의 전파속도가 유한하다는 가정에 의하여 얻어진 열전도 방정식이다. 따라서 유한한 열전파속도의 선단에서 극단적인 열유속(heat flux)이나 온도분포를 형성하게 된다. 수정된 열전도방정식에 대한 연구는 Maxwell³⁾를 비롯하여 많은 사람에 의하여 연구되었으며^{4, 5, 6)}, 극저온에서의 열해석이나 아주 짧은 시간(picosecond or femtosecond) 동안의 가열등과 같이 유한한 열유속파가 존재하는 경우의 열전달해석으로 수정된 열전도방정식을 적용할 필요가 있다⁷⁾.

이 연구에서는 파동특성을 갖는 비점성 Burgers 방정식과 수정된 열전도방정식의 해를 세가지의 유한차분방법(finite difference method)을 이용하여 구하였고, 그 결과를 해석해와 비교하였다. 수치해석법으로는 우리들에게 잘 알려진 명시방법(explicit method)과 MacCormack 방법, TVD 방법을 사용하였으며, 각 세가지 방법의 안정성과 정확성에 대하여 비교·고찰하였다.

2. 이 론

2.1 비점성 Burgers 방정식

비점성 1차원 Burgers 방정식은 속도를 u 라 할 때 다음과 같이 비선형 방정식으로 나타난다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

여기서 $E = \frac{u^2}{2}$

이다.

이 연구에서 사용한 초기 속도분포는 아래와 같이 $0 \leq x \leq 2$ 인 영역에서 1이고, $x=2.0$ 에서 불연속성을 갖는다.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1.0, \quad 0.0 \leq x \leq 2.0 \\ u(x, 0) &= 0.0, \quad 2.0 \leq x \leq 4.0 \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 수정된 열전도방정식

유한한 열전도파속도를 가정한 수정된 열전도 방정식은 Maxwell에 의하여 제안되었으며, 다음과 같이 쓸 수 있다^{3), 4)}.

$$q(x, t) + \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = -k \nabla T(x, t) \quad (3)$$

여기서 τ 는 열이완시간(thermal relaxation time, α/C^2)이다. 즉 물체내의 온도기울기가 형성되었을 때 열전도가 시작되는데 걸리는 지연시간을 나타낸다. α, C 는 열확산계수(thermal diffusivity)와 열전파속도(thermal propagation speed)이다. 상온에서 고체내의 열전파속도는 $10^2 \sim 10^3$ m/sec로 매우 큰 값을 갖으므로, 무한한 열전파 속도를 가정한 Fourier 열전도방정식이 실제 현상과 잘 일치하나, 열전파 속도가 아주 느린 극저온에서나, 높은 열유속에 의하여 짧은 시간에 가열된 경우와 같이 초기 현상이 중요한 경우의 열전도해석은 수정된 열전도방정식에 의하여 해석되어야 정확한 해를 얻을 수 있다^{8), 9), 10)}. 실제로 Fourier 열전도방정식은 위 수정된 열전도방정식에 있는 열유속에 대한 시간 미분항($\tau \frac{\partial q}{\partial t}$)이 생략된 방정식임을 알 수 있다. 또한 비정상(unsteady state) 1차원 에너지방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = S(x, t) \quad (4)$$

여기서 $S(x, t)$ 는 에너지 생성(energy generation) 항이다.

이 연구에서는 다음과 같이 각각 Case 1과 Case 2인 두가지 경우의 경계조건을 적용하여 수치해석을 행하였다.

Case 1.

$$\begin{aligned} q(0, t) &= q_0 \\ q(l, t) &= 0.0 \\ \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= 0.0 \\ \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} &= 0.0 \end{aligned} \quad (5)$$

Case 2.

$$\begin{aligned}
 q(0, t) &= q_0 \cos(i\Omega t) \\
 q(l, t) &= 0.0 \\
 \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= 0.0 \\
 \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} &= 0.0
 \end{aligned} \tag{6}$$

즉 Case 1의 경우에는 유한한 평판(slab)의 한쪽 면이 일정하게 q_0 에 의하여 가열되고 다른 한쪽은 단열되어 있는 경우이며, Case 2의 경우에는 한쪽 면이 주기적으로 $q_0 \cos(i\Omega t)$ 에 의하여 가열되고 다른 한쪽은 단열되어 있는 경우이다.

3. 수치해석

수치해석법으로는 명시(explicit)방법과 시간에 대한 다 단계(multi step)방법의 하나인 MacCormack방법, 최근 압축성 전산 유체분야에서 관심이 모아지는 TVD(Total Variation Diminishing) 방법을 사용하였다. 차분방정식의 전개방법으로 시간에 대하여 전진차분(forward difference), 공간에 대하여 중앙차분(central difference)을 사용한 명시(explicit)방법은 해의 전개가 쉽고, 계산시간이 비교적 빠르나 수렴조건에 매우 민감하다. MacCormack방법은 비정상 쌍곡선형방정식의 수치해석법으로 잘 알려져 있다. 이 연구에서는 시간에 대하여 2중(predictor step, corrector step) 전진차분을 사용하였으며 공간에 대해서는 predictor단계에서는 전진차분, corrector단계에서는 후진차분을 사용하였다. TVD방법은 최근에 활발히 연구되어 온 수치해석법의 하나로 해의 전개 방법이 다른 방법에 비하여 복잡하고 적용범위가 한정되나 제차(homogeneous) 비선형성을 갖는 방정식에 대한 수치해석법에 추천되고 있으며, 다른 수치해석법의 결과에 비하여 좋은 결과를 얻고 있다. 이 연구에서는 TVD수렴조건을 만족시키는 방법중에서 비교적 적용이 쉬운 Roe¹¹⁾에 의한 명시적 1차 풍상연산법(explicit, first order upwind algorithm)을 이용하여 해석하였다.

비점성 Burgers방정식에 대하여 수치해석을 하기 위하여 내부격자를 201개($\Delta x=0.05$)로 분할하였고, 각 수치해석법에 의한 Courant수의 영향을

알아보기 위하여 시간 증가분(Δt)을 0.05, 0.005, 0.0005sec($\Delta t/\Delta x=1.0, 0.1, 0.01$)로 감소 시키면서 계산을 수행하였다.

수정된 열전도방정식(3)과 에너지방정식(4)을 무차원화하여 벡터식으로 나타내면 식(7)과 같이 나타낼 수 있다. 무차원화된 방정식을 수치해석하기 위하여 무차원화된 길이를 $401(\Delta \xi=0.0025)$ 로 분할하였고 시간증가($\Delta \eta$)는 각 수치해석법의 특성을 잘 나타내고 있는 Courant 수($\Delta \eta/\Delta \xi$)가 0.98, 0.2, 0.1로 되도록 수행하였다. 수치해석의 결과는 무차원화 시간이 0.5와 1.5일 때의 열유속의 분포를 알아보았다.

무차원화된 수정된 열전도방정식 및 에너지방정식 -

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta} = \vec{H} \tag{7}$$

여기서

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \theta \\ Q \end{bmatrix}, \vec{F} = \begin{bmatrix} Q \\ \theta \end{bmatrix}, \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Q \end{bmatrix}$$

이다.

4. 결과 및 고찰

Fig.1~Fig.3은 비점성 Burgers 방정식에 의한 속도분포를 나타내고 있으며, Fig.4~Fig.6은 한쪽면을 일정하게 가열했을 때의 열유속(heat flux) 분포를 나타내고, Fig.7~Fig.10는 한쪽면을 주기적으로 가열했을 때의 열유속 분포이다. 각 그림에서 (a)는 0.5sec 후, (b)는 1.5sec 후의 결과를 나타낸 것이며, ㉑는 엄밀해(exact solution), ㉒는 명시방법에 의한 수치해석해, ㉓는 MacCormack 방법에 의한 수치해석해, ㉔는 TVD방법에 의한 수치해석해를 나타내고 있다. Fig.4~Fig.10에서 ㉑는 Fourier열전도방정식에 의한 열유속의 엄밀해를 나타내고 있다¹²⁾.

4.1 비점성 Burgers방정식에 의한 속도분포

Fig.1은 $\Delta t/\Delta x=1.0$ 일 때의 속도분포를 나타내고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 MacCormack

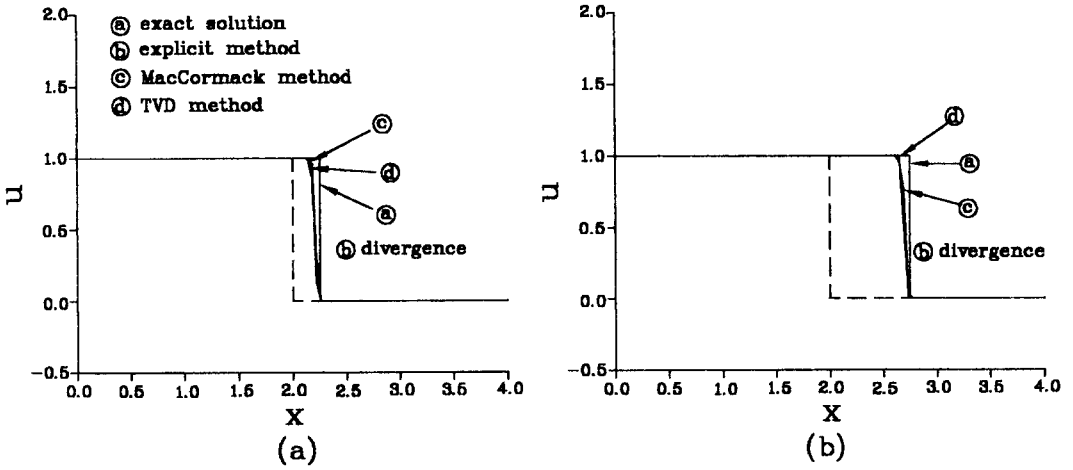


Fig. 1. The solutions of inviscid Burgers equation by various methods.

$\Delta x=0.04, \Delta t=0.04 (\Delta t/\Delta x=1.0)$

(a) time=0.5sec

(b) time=1.5sec

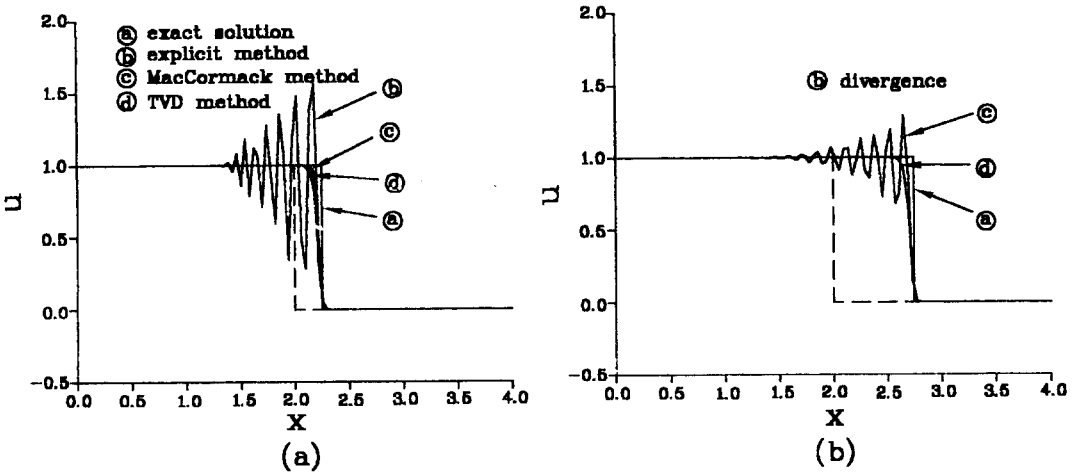


Fig. 2. The solutions of inviscid Burgers equation by various methods.

$\Delta x=0.04, \Delta t=0.004 (\Delta t/\Delta x=0.1)$

(a) time=0.5sec

(b) time=1.5sec

방법과 TVD 방법에 의한 해는 비교적 엄밀해에 근접하게 나타나며 불연속점에서 해의 진동 (oscillation) 이 거의 발생하지 않으나, 명시방법에 의한 해는 발산하였다. 해를 보다 더 정확하게 나타내기 위하여 $\Delta t/\Delta x=0.1$ 로 시간 증가분을 감소시켜 해석한 결과 Fig.2에서 볼 수 있듯이

time=0.5인 경우에는 해가 심하게 진동하고 있으나, time=1.5sec인 경우에는 역시 해가 발산되고, 시간 증가분을 더욱 적게($\Delta t/\Delta x=0.01$)하여 계산한 결과(Fig.3) 해의 진동 폭이 약간 감소하며 time=1.5sec인 경우에도 해가 나타나고 있으나 진동이 심하여 해를 구할 수 없었다. MacCormack 방

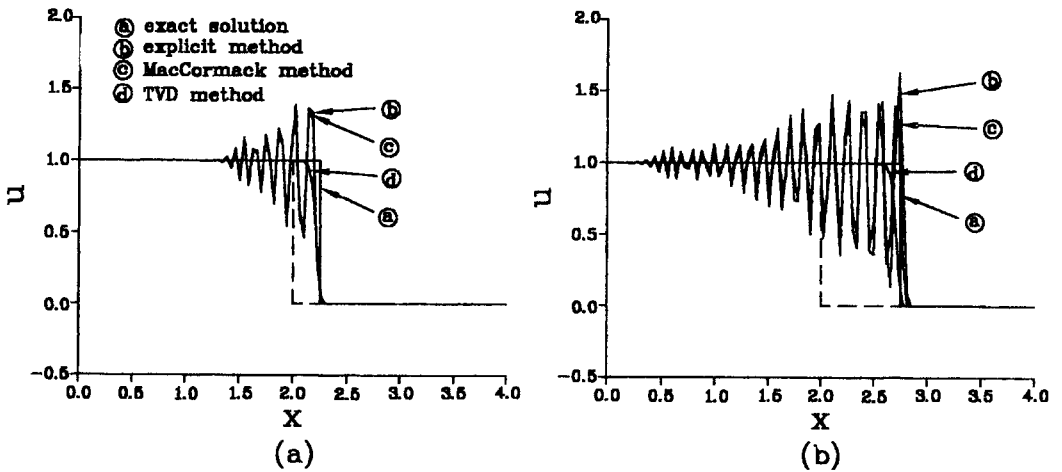


Fig. 3. The solutions of inviscid Burgers equation by various methods.

$\Delta x=0.04, \Delta t=0.0004 (\Delta t/\Delta x=0.01)$

(a) time=0.5sec

(b) time=1.5sec

법에 의한 해는 $\Delta t/\Delta x=1.0$ 인 경우, 엄밀해에 근접하게 나타나며 시간이 경과된 후(time=1.5sec)에도 해가 비교적 정확하게 나타나고 있으나, $\Delta t/\Delta x=0.1$ 과 0.01 로 감소됨에 따라 해의 진동이 점점 심해졌다. 특히 $\Delta t/\Delta x=0.01$ 인 경우에는 진동의 폭이 거의 명시방법에 의한 해와 같고 시간이 경과 됨에 따라 진동이 더욱 심하게 된다. 그러나 TVD방법에 의한 해는 $\Delta t/\Delta x$ 의 값(Courant number)에 관계없이 항상 일정하게 엄밀해에 가깝게 나타나며, 시간이 경과 되어도 해가 안정되게 나타난다. 특히 TVD방법에 의한 해는 불연속점에서 해의 진동이 일어나지 않는다.

4.2 수정된 열전도방정식에 의한 열유속분포

Fig.4~Fig.10에 나타난 결과에 의하면 Fourier 열전도방정식에 의한 열유속 분포(㉑)와 수정된 열전도방정식에 의한 열유속분포(㉒~㉖)는 매우 큰 차이가 나타나고 있다. 즉 Fourier 열전도방정식은 열이 전파된 속도를 무한하다고 가정 했기 때문에 매우 짧은 시간($\eta=0.5$)에도 가열된 열유속이 해석영역의 전체에 분포되나, 유한한 열전파속도를 가정한 수정된 열전도방정식에 의한 열유속 분포는 열유속이 전파된 부분과 전파되지 않는 부

분에서 극단적인 기울기를 나타내고 있다. 열유속이 한쪽면에 가해진 직후($\eta=0.5$), 두 방정식에 의한 열유속분포는 매우 큰 차이가 나타나지만 시간이 경과됨에 따라 두 방정식에 의한 열유속분포는 비슷해짐을 알 수 있다. 즉 일정한 시간이 경과되면 두 방정식에 의한 열유속분포는 일치하게 될 것이다.

Fig.4와 Fig.7은 Courant 수가 0.98인 경우의 열유속분포를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 여러 해중에서 MacCormack 방법에 의한 열유속분포가 엄밀해에 거의 일치하게 나타났다. 특히 명시방법에 의한 해는 불연속점에서 진동이 매우 심하게 나타나고 있으며, TVD방법에 의한 해는 불연속점에서의 해가 명확하지 않고 진동이 심하게 나타나고 있으나, MacCormack 방법에 의한 해는 이러한 현상이 거의 나타나지 않고 있다. 그러나 시간 증가분을 감소(Courant 수=0.2)하여 계산한 결과 명시방법에 의한 해 뿐만 아니라, MacCormack 방법에 의한 해도 불연속점에서 심하게 진동하고 있다. 그러나 TVD방법에 의한 해는 불연속점에서의 진동이 사라졌을 뿐만 아니라 비교적 엄밀해에 근접함을 알 수 있다. 그러나 시간이 경과된 후($\eta=1.5$)의 해는 불연속점에서의 진동은

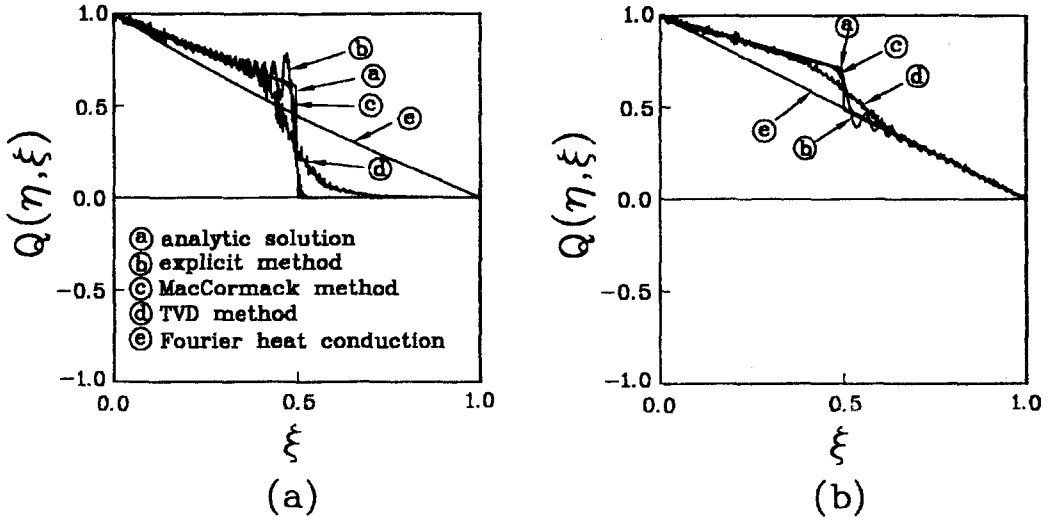


Fig. 4. Heat flux distributions for modified heat conduction equation in a slab under constant heat flux applied at $\xi=0$ by various methods, Courant number=0.98.

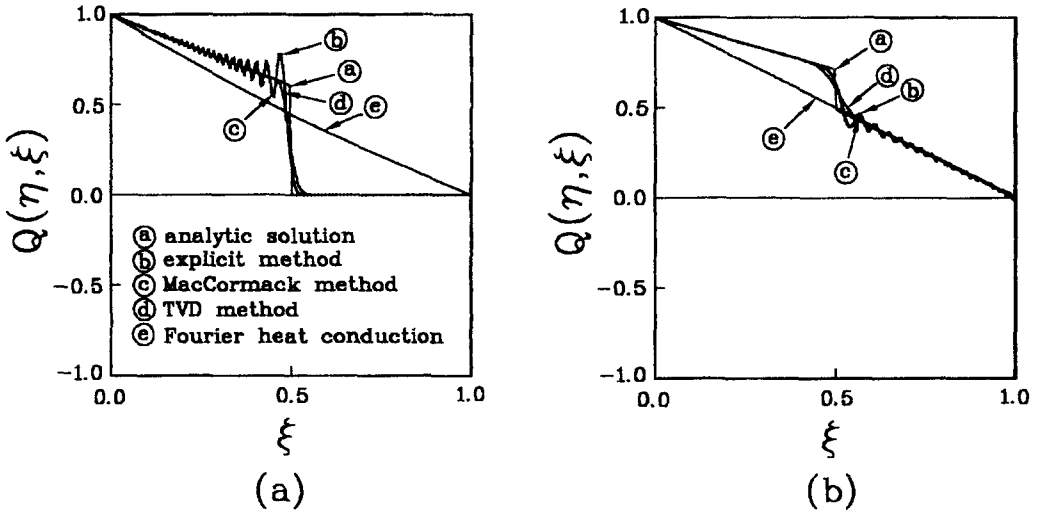


Fig. 5. Heat flux distributions for modified heat conduction equation in a slab under constant heat flux applied at $\xi=0$ by various methods, Courant number=0.20.

없으나 해가 완만하게 나타나 정확한 해를 얻을 수 없었다. 시간 증가분을 더욱 감소시켜 Courant 수가 0.1이 되도록하여 계산한 결과 모든 해가 불연속점에서 진동하여 정확한 해를 얻을 수가 없었다.

Fig.4~Fig.6과 Fig.7~Fig.10에서 $\eta=1.5$ 일 때의 열유속분포 양상이 다른 이유는 한 쪽면을 일정

하게 가열한 경우 일정한 속도로 진행하던 열 유속이 다른 경계면에서 반사되어 계속 진행되어 오던 열유속과 계속 중첩되어 양(+)의 값으로 증가되고 있으나(Fig.4~Fig.6), 한쪽면을 주기적으로 가열한 경우 일정한 속도로 다른 벽면을 향하여 진행하던 열유속이 경계면에서 반사되면서 위상이 변

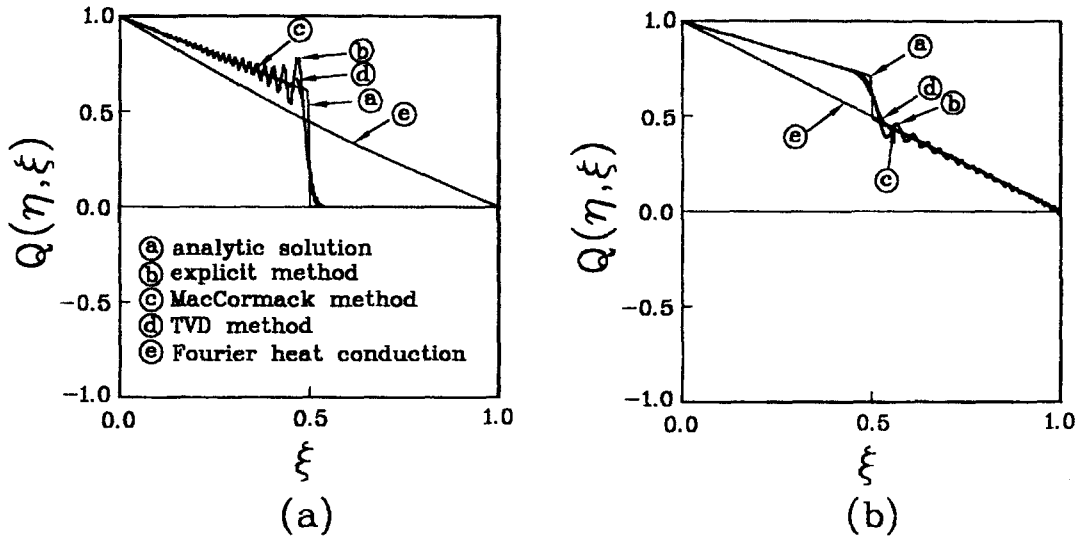


Fig. 6. Heat flux distributions for modified heat conduction equation in a slab under constant heat flux applied at $\xi=0$ by various methods, Courant number=0.10.

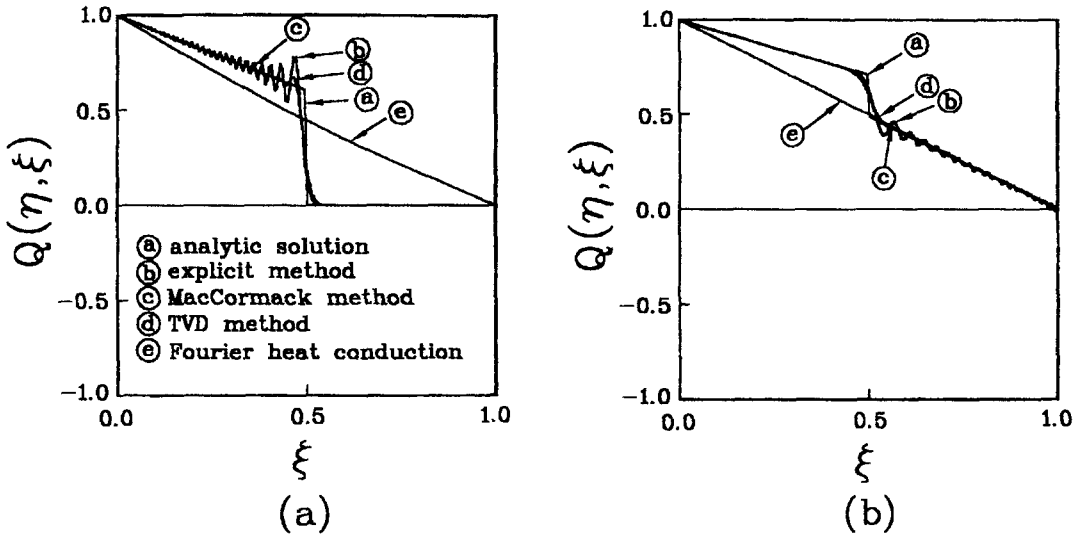


Fig. 7. Heat flux distributions for modified heat conduction equation in a slab under periodic heat flux applied at $\xi=0$ by various methods, Courant number=0.98.

경되어 무차원 시간(η) 이 1.0~2.0일 때는 음(-)의 값을 나타내고 있다.

5. 결 론

비선형 특성을 갖는 비점성 Burgers 방정식과

파동특성을 갖는 수정된 열전도방정식에 대하여 시간 증가분(Δt)을 변화시키면서 수치해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1차원 비점성 Burgers 방정식과 같이 제차(homogeneous)형태의 쌍곡선형 방정식에 대한 수치해석법으로는 TVD방법에 의한 해석

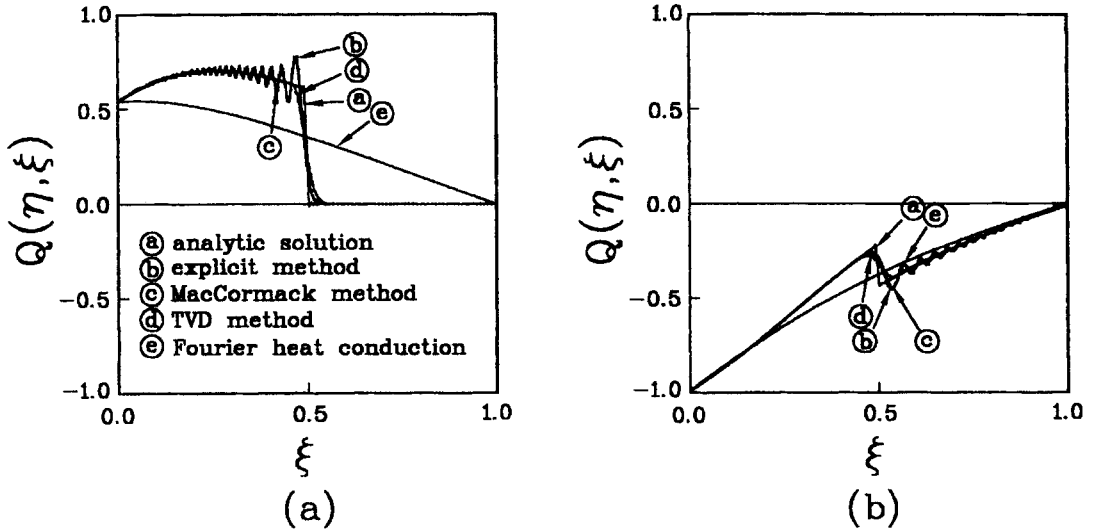


Fig. 8. Heat flux distributions for modified heat conduction equation in a slab under periodic heat flux applied at $\xi=0$ by various methods, Courant number=0.20.

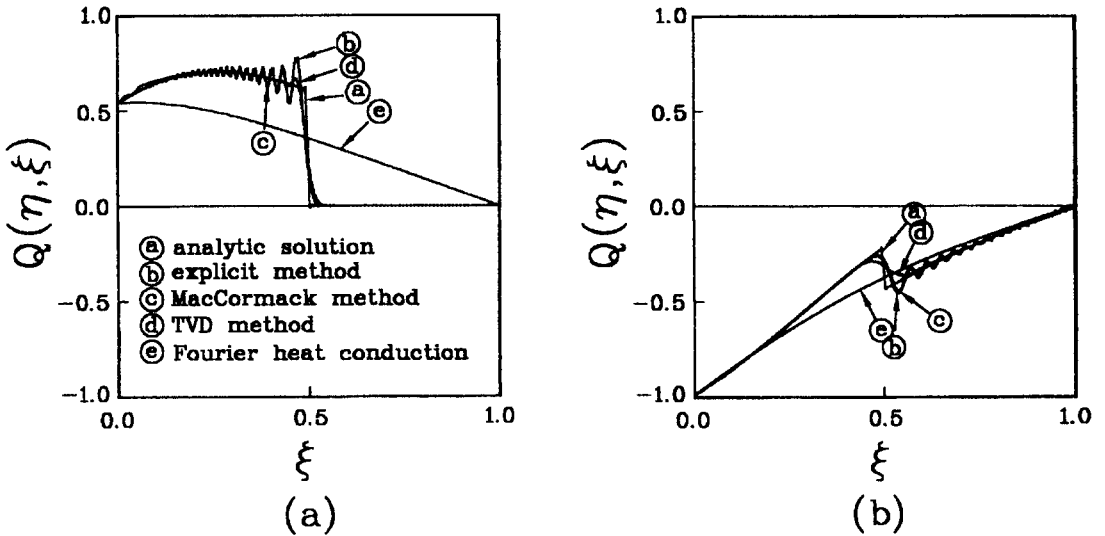


Fig. 9. Heat flux distributions for modified heat conduction equation in a slab under periodic heat flux applied at $\xi=0$ by various methods, Courant number=0.10.

결과가 엄밀해에 가장 근접하였다. 특히 1차원 비점성 Burgers 방정식에 있어서 다른 수치해석법(명시방법, MacCormack방법)에 의한 해가 Courant수에 민감하게 변화하여 경우에 따라서 불연속점에서 해가 심하게 진동함을 알 수 있으나, TVD방법에 의한 해석 결

과는 Courant수에 무관하게 항상 해가 안정되며 비교적 정확하였다.

2. 그러나 수정된 열전도방정식과 같이 쌍곡선형방정식이 비제차(nonhomogeneous)인 경우에 해를 안정되게 수립시키는데 필요한 Courant수가 수치해석 방법에 따라 다르게

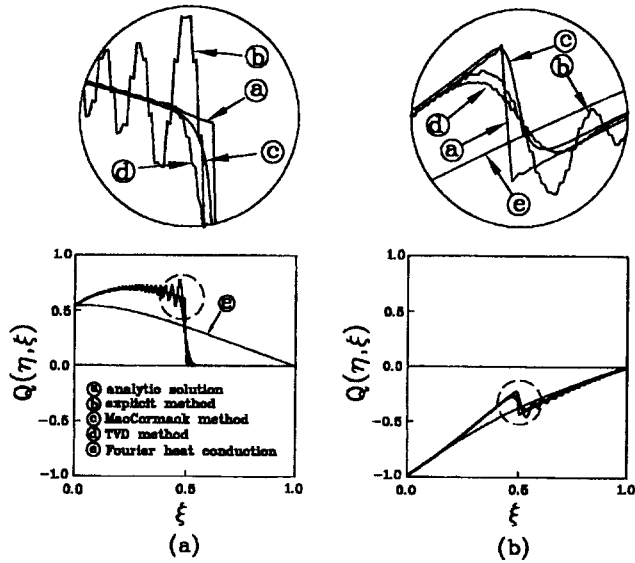


Fig. 10. Comparison with the results of high resolutions by various numerical methods.
 explicit method Courant number : 0.10
 MacCormack method Courant number : 0.98
 TVD method Courant number : 0.20

나타났다. 즉 MacCormack 방법에서는 Courant 수가 0.98, TVD 방법에서는 0.2일 때 해의 수렴성이 좋고 불연속점에서의 진동이 나타나지 않는다. 명시방법에서는 Courant 수가 감소할 수록 해의 진동폭이 감소하나 아무리 감소시켜도 정확한 해를 얻을 수가 없었다.

3. Fig. 10은 각 수치해석법에서 가장 안정된 해를 얻을 수 있는 Courant 수(MacCormack : 0.98, TVD : 0.2, 명시도식 : 0.1)를 선택하여 계산한 결과이다. 결과에 의하면 수정된 열전도 방정식의 해는 MacCormack에 의한 해가 가장 엄밀해에 근접하며 또한 계산시간도 가장 적음을 알 수 있다. 따라서 수정된 열전도 방정식에 대한 수치해석법으로는 MacCormack 방법이 추천 된다.

참고문헌

- 1) Hoffman, K. A. and Chiang, S. T., "Computational Fluid Dynamics for Engineers", A publication of Engineering Education System, 1993.
- 2) Fletcher, C.A.J., "Computational Techniques for

Fluid Dynamics I, II", Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 1988.

- 3) Maxwell, J. C., "ON the Dynamical Theory of Gases", *Phil. Trans R.Soc.*, Vol. 157, pp. 49 - 88, 1867.
- 4) Cattaneo, C., "Sur Une forme de l'équation de la Chaleur éliminant le paradoxe D'und propagation instantaneouse", *C. R. Acad. Sci.*, Vol. 247, pp.431, 1958.
- 5) Chester, M., "High - Frequency Thermometry", *Physical Review*, Vol. 145, No.1, pp.76 - 80, 1966.
- 6) Kaminski, W., "Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials with a Nonhomogeneous Inner Structure", *ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp.555 - 560, 1990.
- 7) Vick, B. and Qzisk, M. N., "Propagation and Reflection of Thermal Waves in a Finite Medium", *Int. J. Heat and Mass Transfer*. Vol.27, pp.1845 - 1854, 1984.
- 8) Cheng, K. J., "Wave Characteristic of Heat Conduction Using a Discrete Microscopic Model", *ASME. J. Heat Transfer.*, Vol. III, pp.225 - 231, 1989.
- 9) Baumeister, K. J. and Hamill, T. D., "Hyperbolic

- Heat Conduction Equation : A Solution for the Semi - Infinite Body Problem", ASME, *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp.543 - 548, 1969.
- 10) Glass, D. E., Qzisk, M. N., Mcrae, D. S. and Vick, B., "Hyperbolic Heat Conduction with Temperature - Dependent Thermal Conductivity", *J. Appl. Phys.* Vol.59, No. 6, pp.1861 - 1865, 1986.
- 11) Roe, P. L., "A survey of Upwind Differencing Techniques", Proceedings of the 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, June. 1988.
- 12) 나문용, "Thermal waves in the finite medium with periodic surface heating", 석사학위 논문, 전남대학교, 1995.