

〈논 문〉

전달행렬법을 이용한 다단 치차계의 비틀림 진동 해석

Torsional Vibration Analysis of Multiple Stepped Gear System Using Transfer Matrix Method

이 형 우* · 박 노 길**

Hyoung-Woo Lee and No-Gill Park

(1998년 1월 31일 접수 ; 1998년 3월 28일 심사완료)

Key Words : Torsional Vibration(비틀림 진동), Transfer Matrix(전달행렬), Hibner's Branch Method, λ -Matrix, Campbell Diagram, Critical Speed(위험속도), Transmitted Error(전달오차)

ABSTRACT

For analyzing the torsional vibration of a multiple stepped gear system containing a pair of triple gears, a transfer matrix model based on Hibner's branch method is developed and the natural properties of the branched rotor system are calculated with using the λ -matrix formulation. A Campbell diagram, in which the excitation sources caused by the mass unbalances of the rotors and the transmitted errors of the gearings are considered, shows that, at the neighborhood of the operating speed, there are the four critical speeds amplifying the first mode and the fifth mode. For the surpression of the gear box vibration, two ways are suggested by referring the mode shapes.

1. 서 론

가스터빈, 차량, 선박, 헬리콥터 등에 사용되는 트랜스미션은 매우 복잡한 다단 치차계로 구성되어 있는데 기계의 고속화, 정밀화, 대형화, 경량화 추세에 따라 소음·진동의 문제가 증대되고 있다. 따라서 복잡한 다단 치차계에 대한 진동해석 기술 개발의 필요성이 더욱 커지고 있다.

회전기계의 진동 해석기법으로는 전달행렬법과 유

한요소법으로 대별되는데, 전달행렬법은 M.A.Prohl⁽¹⁾에 의해서 처음 제안되어 축계 강제진동 해석에 유용한 기법으로 널리 사용되어 왔다. 전달행렬법은 유한요소법에 비하여 자유도를 훨씬 작게 잡을 수 있는 장점이 있으나 고유치해석을 위해서는 직접탐색법으로 고유진동수를 구해야 하는 번거로움 때문에 일부 간단한 축계에만 적용하여 왔다. Lund⁽²⁾와 Bansal, Kirk⁽³⁾는 유막 베어링에 지지되는 유연 축계의 고유치 해석과 시스템의 안정성을 평가하기 위하여 전달행렬법을 적용하였다. 그러나 전달행렬 모델링에 의한 고유치 해석 알고리즘은 축계의 자유도가 많아질수록 계산오차가 크며, 일부의 고유 진동수를 빠뜨릴 염려가 있다.

* 부산대학교, 대학원 생산기계공학과

** 정희원, 부산대학교 기계공학부 기계기술연구소

D.Kim, J.W. David⁽⁴⁾는 직접탐색법에 의한 고유치 해석의 단점을 개선하기 위하여 유연 로터-베어링계 특성방정식의 멱급수 항의 계수를 직접 유도하였고, 다시 멱급수방정식을 고유치 문제로 바꾸어서 모든 자유도에 대하여 모드해석을 했다.

치차가 포함된 로터-베어링 축계는 가지점(branch point)이 존재하는데, J.Goodoin⁽⁵⁾, J.S.Rao⁽⁶⁾는 가지(branch)마다 전달행렬을 각각 유도하여 통합된 특성방정식을 구하였다. 반면에 L.D.Mitchel⁽⁷⁾은 가지점에서의 관계식 유도의 번거로움을 피하기 위하여 Hibner's branch를 도입한 전달행렬법을 제안하였는데 이 방법은 국부 전달행렬식을 다축에 대하여 동시에 고려한 것으로서 가지점의 수와 가지점의 위치에 상관없이 일반성 있게 전달행렬법을 적용할 수 있다. N.G.Park⁽⁸⁾은 치차계의 강제진동 해석에 이 방법을 적용하여 그 효율성을 보인 바 있다.

본 연구에서는 전달행렬법을 효과적으로 적용시킬 수 있는 Hibner's branch법과 자유도가 큰 경우에도 계산오차 없이 고유특성치를 빠뜨리지 않고 산출할 수 있는 λ -matrix법⁽⁹⁾을 도입하여 발전기용 8단기어 감속장치의 비틀림 고유진동 특성을 해석할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 프로그램 검증은 집중질량 모델을 Lagrange 식으로 유도해서 얻은 고유치와 비교하여 확인하고 프로그램의 고유특성 해석 결과와 감속장치의 진동원을 근거로 Campbell diagram을 작성하고 위험속도를 파악하였다. 또한 위험속도와 관련있는 고유진동형을 근거로 진동·소음 저감대책을 마련하였다.

2. 전달행렬법을 이용한 다단치차계의 고유특성치 해석기법

가지점이 있는 회전기계 시스템에 전달행렬법을 적용하려면 각 가지점마다 전달행렬식을 별도로 유도하고 전체 특성방정식을 통합해야 하는데, 가지점이 많은 치차계의 경우 유도과정에서 번거로움이 많다. 따라서 본 연구에서는 다축에 대하여 동시에 전달행렬 관계식을 나타내는 Hibner's branch법을 도입하므로써 8단 치차계의 진동특성을 효과적으로 해석할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

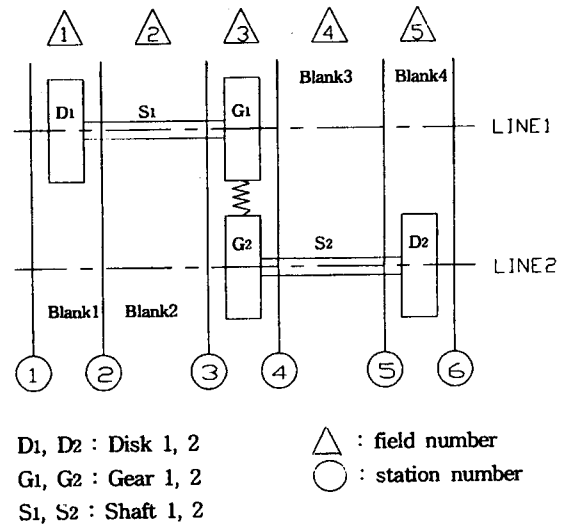


Fig. 1 A schematic of two lined geared systems

먼저 Hibner's branch법의 기본 개념을 설명하기 위하여 Fig. 1과 같이 다축에 적용된 전달행렬법의 상태를 생각해 본다. 상태벡터는 축 1, 2의 상태변수(회전각도와 비틀림 모멘트)로 구성된다. field #1의 Line 2, field #2의 Line 2, field #3의 Line 1, 그리고 field #4의 Line 1은 모두 blank로 처리되기 때문에 전달행렬식의 sub-matrix는 단위행렬로 정의된다. field #3의 Line 1과 2는 구동기어와 종동기어 사이에 치접축으로 연결되어 있기 때문에 Line별 상태변수들 간에 연결된 관계식이 성립된다. 이때 양 station 사이의 전달행렬식은 병렬로 놓여있는 축을 동시에 고려한 결과가 되어 지금까지 알려진 전달행렬법의 알고리즘을 변경없이 사용할 수 있게 된다.

다축을 동시에 고려한 전달행렬법을 수식적으로 정리하면 다음과 같다. i 번째 station의 상태변수 벡터 $s_i(t)$ 에 대하여 $s_i(t) = S_i e^{i t}$ 라 할 때, station i 와 $i+1$ 사이의 일반적인 다축 전달행렬 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_{i+1} = L_i S_i \quad (1)$$

여기서 L_i 는 i 번째 field의 다축 국부전달행렬로서,

$$L_i = L_0 + L_1 \lambda + L_2 \lambda^2 \quad (2)$$

로 표현된다. 여기서 L_0 은 강성요소에 의한,

L_1 는 감쇠요소에 의한, 그리고 L_2 는 관성요소에 의한 다축 국부전달행렬이다. 다축 회전기계의 양단 사이의 전달행렬 관계식은 국부전달행렬의 연속적인 곱에 의해 다음과 같이 얻어진다.

$$S_N = H S_1 \quad (3)$$

여기서, H 는 누적된 다축 전달행렬식으로 다음과 같이 정의된다.

$$H = \prod_{j=1}^{N-1} L_{N-j} \quad (4)$$

양단의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = B_r^T S_N \quad (5)$$

$$S_1 = B_L Z \quad (6)$$

여기서 B_r , B_L 은 각각 station N과 station 1에서의 축의 경계조건으로 부터 정의되는 상수 행렬이다.

식 (5), (6)을 식 (3)에 적용하면, 다음과 같은 latent equation을 얻는다.

$$\Omega = D_p(\lambda) Z \quad (7)$$

여기서, $D_p(\lambda) = B_r^T H B_L$ 이고 이를 λ -matrix 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$D_p(\lambda) = E_0 + E_1 \lambda + E_2 \lambda^2 + \dots + E_{p-1} \lambda^{p-1} + E_p \lambda^p \quad (8)$$

식 (8)을 일반화된 고유치 문제로 바꾸면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(A\lambda - B)x = 0 \quad (9)$$

여기서,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_p \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & E_p & E_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{p-1} & E_{p-2} \\ 0 & 0 & E_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & E_p & E_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_p & E_{p-1} & E_{p-2} & \cdot & \cdot & \cdot & E_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_p & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & E_p & E_{p-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{p-1} & E_{p-2} & 0 \\ 0 & E_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & 0 \\ E_p & E_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \lambda^{(p-1)} z \\ \lambda^{(p-2)} z \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda^1 z \\ z \end{pmatrix}$$

이다. 식 (9)는 일반고유치 알고리즘을 이용하면 고유진동수와 상태벡터를 빠짐없이 구할 수 있다.

3. 8단 가스터빈-발전기의 비틀림 진동해석

Fig. 2는 일반 다단치차계의 비틀림 진동해석을 위한 프로그램의 전산 유통도를 나타내고 있다. 입력파라미터는, shaft line별, gear pair별, 그리고 구성요소별 system parameter로 구분되는데, shaft line별 system parameter는 요소 수, 요소 형태(기어, 디스크, 베어링, 축), 요소의 위치에 관한 데이터, gear pair별 system parameter는

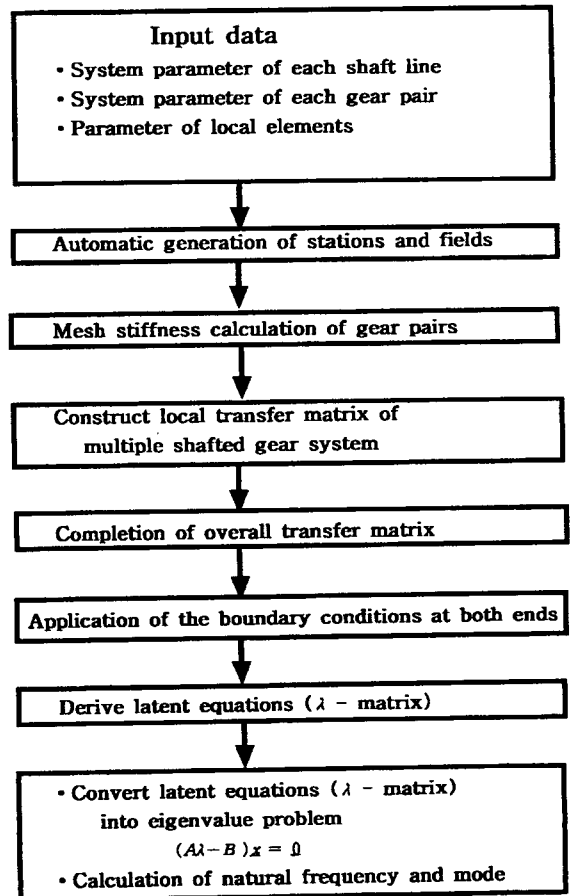


Fig. 2 Flow chart of the program

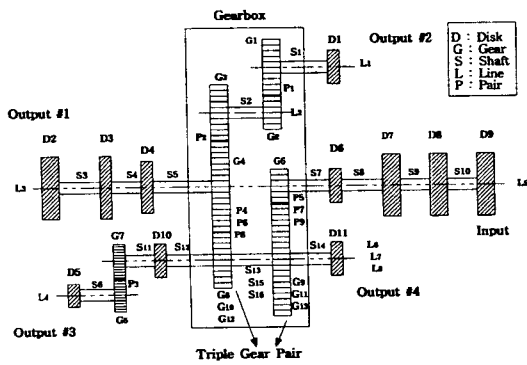


Fig. 3 A mathematical model of 8-stepped gear system

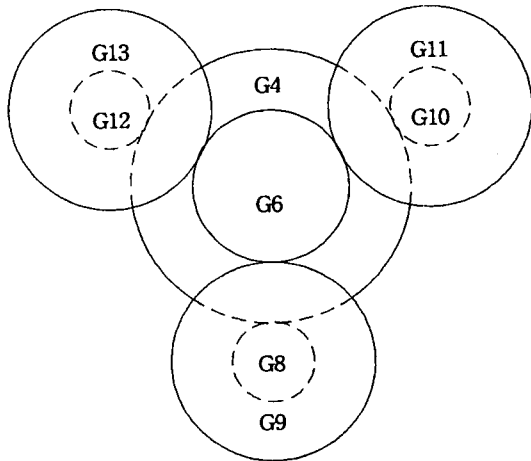


Fig. 4 A pairing of triple gear

구동기어의 번호와 해당 line번호 그리고 중동기어 번호와 해당 line번호가 된다. Station과 Field의 분할은 프로그램 내에서 자동적으로 계산되고 Hibner's branch법에 의하여 다축전달행렬이 구성되며 λ -matrix법에 의하여 고유진동수와 고유모드가 계산된다. 또 기어쌍의 치접촉부 사이의 진동모델은 탄성변형을 고려하여 등가스프링으로 모델링하였으며 기어제원을 입력하면 등가스프링 상수가 자체로 계산된다.

개발된 프로그램으로 Fig. 3과 같은 8단 가스터빈-발전기 동력계에 적용하였다. 동력계는 가스터빈, 발전기 및 감속기어 시스템으로 구성되어 있다. 감속기어 시스템은 복잡한 한쌍의 triple gear로 구성되어 있다. Fig. 4는 triple gear pair를 나타낸 것이다. Fig. 3에서 D는 디스크, G는 기어, S는 축, L은 line, P는 기어쌍의 약자이다. 가스터빈-발전기 동력계는 11개의 디스크요소와 13개의 기어요소, 9개의 기어쌍, 16개의 축요소를 가지는데, 여기서, S1는 main shaft ass'y, S2는 transfer shaft, S3는 coupling, S4와 S5는 output shaft ass'y, S7 ~ S10는 input shaft 그리고 S11 ~ S14는 idle shaft이다. 입력축 동력은 구동기어 G6로부터 triple gear의 중동기어인 G9, G11, G13에 전달되고 triple line L6, L7, L8을 통과하여 triple gear G8, G10, G12에 의해 다시 G4에 모아진다. 동력은 L7을 통과하여 output #3, #4로 일부 전달되고 나머지는 L3와 L1을 통과하여 output #1, #2로 전달된다.

8단 가스터빈-발전기 동력계에 대한 shaft line 별, gear pair별 system parameter는 각각 Table 1, 2에 있다. 구성 요소별 파라미터 값으로서 기어

Table 1 System parameters per shaft line

Line number	Element number	Element type
L1	3	G1 - S1 - D1
L2	3	G3 - S2 - G2
L3	7	D2 - S3 - D3 - S4 - D4 - S5 - G4
L4	3	D5 - S6 - G5
L5	9	G6 - S7 - D6 - S8 - D7 - S9 - D8 - S10 - D9
L6	9	G7 - S11 - D10 - S12 - G8 - S13 - G9 - S14 - D11
L7	3	G10 - S15 - G11
L8	3	G12 - S16 - G13

Table 2 System parameters per gear pair

Pair number	Driving part		Driven part	
	Gear number	Line number	Gear number	Line number
P1	G2	L2	G1	L1
P2	G4	L3	G3	L2
P3	G7	L6	G5	L4
P4	G8	L6	G4	L3
P5	G6	L5	G9	L6
P6	G10	L7	G4	L3
P7	G6	L5	G11	L7
P8	G12	L8	G4	L3
P9	G6	L5	G13	L8

의 제원은 Table 3, 축의 제원은 Table 4, 디스크의 제원은 Table 5에 있다. Table 6은 Triple Pair의 구동기어, 종동기어를 나타내고 있다. 입력축의 정상상태 운전속도는 27000 rpm이고, 각 출력축의 정상상태 운전속도는 Table 7에서 보여준다. 기어쌍의 치강성계수는 N.G.Park⁽⁸⁾에 의해 개발된 프로그램에 의해 스퍼어 기어쌍의 치강성계수 값이 계산되었다. 산출된 값은 Table 8에서 보여진다.

프로그램을 검증하기 위하여, 동력계를 집중질량계로 모델링하여 라그랑지안 식으로 구한 고유치와 비교하였다. 그 결과는, Table 9에서, 1~7차 모드까지 전체적으로 1% 이내의 오차범위로 일치함을 보였다. 비교치에서 나타난 오차는 검증용 모델에서는 치접촉부의 탄성을 무시한 결과이고 제시된 모델에서는 그를 고려한 결과인 것으로 사료된다.

다단치차계를 가진하는 가진원은 크게 외부(입

Table 3 Gear specifications

Number	Pressure angle (deg)	Module (mm)	Tooth width (mm)	Number of teeth	Mass moment of inertia ($\times 10^{-5}$ kg m ²)
G1	20	3.5	47	89	15,680
G2	20	3.5	29	40	12,490
G3	25	5.5	24	38	2,700
G4	25	5.5	60	67	50,410
G5	20	2.0	80	47	37.3
G6	25	4.0	30	20	94.7
G7	20	2.0	14	20	0.9
G8	25	5.5	100	23	1,339
G9	25	4.0	30	103	34,860
G10	25	5.5	100	23	1,339
G11	25	4.0	30	103	34,860
G12	25	5.5	100	23	13,390
G13	25	4.0	30	103	34,860

Table 4 Disk specifications

Description	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11
Mass moment of inertia ($\times 10^{-5}$ kg m ²)	6.2	220,000	9,000	13,200	0.9	14.6	21,900	21,600	17.6	33.5	100

Table 5 Shaft specifications

Number	Length (Cm)	Diameter (Cm)	Young's moduls (N/m)	Possion ratio
S1	59.50	3.90	2.0×10^{11}	0.28
S2	12.50	8.82	"	"
S3	6.30	11.50	"	"
S4	43.40	9.00	"	"
S5	61.00	11.50	"	"
S6	6.05	2.37	"	"
S7	26.65	2.90	"	"
S8	33.68	2.63	"	"
S9	19.94	0.61	"	"
S10	15.40	5.28	"	"
S11	3.00	2.60	"	"
S12	7.25	6.00	"	"
S13	3.30	9.00	"	"
S14	9.60	6.72	"	"

Table 6 A pairing of triple gears

Description	Gear pair	Driver gear	Driven gear
Triple #1	P4	G8	G4
	P6	G10	G4
	P8	G12	G4
Triple #2	P5	G6	G9
	P7	G6	G11
	P9	G6	G13

력 혹은 출력축)로 부터 전달되는 가진력과 자체 적으로 발생하는 자려가진원으로 구분되는데, 외 부로부터 전달되는 가진력은 커플링에 의해 차단 된다고 보고 무시한다. 자려가진원은 편심질량에 의하여 발생하는 회전원심력을 들 수 있는데 이 때의 가진 진동수는 축의 회전속도와 일치한다. 또 고려되어야 할 가진원은 기어 치접촉부에서의 변위가진이다. 기어가 완전한 인블류우트 곡선으 로 가공되었다면 치합전달 오차는 zero가 되지만 가공오차로 인하여 각속도비가 변동된다. 이는 시

Table 7 Operating speeds in the shaft lines

Description	Operating speed (rpm)
G/T Shaft (input)	27.000
Idle shaft (output #4)	5.243
Transfer shaft	3.173
Main shaft ass'y (output #2)	1.426
Output shaft ass'y (output #1)	1.800
Output #3	2.231

Table 8 Calculated effective spring constants of gear pairs

Number	Mesh stiffness (N/m)
Pair #1	3.954×10^8
Pair #2	7.144×10^8
Pair #3	1.840×10^8
Pair #4	1.121×10^9
Pair #5	3.827×10^8
Pair #6	1.121×10^9
Pair #7	3.827×10^8
Pair #8	1.121×10^9
Pair #9	3.827×10^8

스템에 토크 가진을 유발하게 되는데 이 때의 가 진진동수는 축의 회전각속도에 기어 잇수를 곱한 소위 치통과 주파수(tooth-passing frequency)가 된다. 본 연구에서 채택한 발전기 시스템의 주요 가진원은 Table 10과 같다. 이를 근거로 하여 입 력축 G/T shaft에 대한 campbell diagram인 Fig. 5를 얻었다. 그림은 운전속도 27000 rpm에 도달하기까지 존재하는 위험속도를 나타낸다. 27000 rpm 근처에 4개의 위험속도(24718, 26028, 26810, 26814 rpm)가 존재하는 것을 알수 있는데 이들의 비틀림 진동모드는 1차모드와 5차모드이 다. 위험속도 26814 rpm에서 1차모드의 공진을

유발하는 진동원은 transfer shaft에 설치된 기어의 불평형력 혹은 축어긋남(misalignment)이다. 1차공진주파수는 53 Hz이고 진동형은 Fig. 6에 도시되어 있는데 Input 축계의 구동기어로부터 큰 비틀림 진동이 발생됨을 알 수 있다. 위험속도 24718 rpm에서 5차모드의 공진을 유발시키는 진

Table 9 The eigenvalues of the transfer matrix model and the Lagrange model

Mode #	TMM (rpm)	Lagrange (rpm)	Error (%)
1	3,164	3,134	0.95
2	18,820	18,674	0.78
3	41,820	41,725	0.23
4	42,530	42,482	0.11
5	116,200	115,262	0.81
6	143,600	142,497	0.77
7	586,407	583,768	0.45

Table 10 Excitation sources

Description	Excitation source	Forcing frequency (rpm)
G/T shaft	Rotor mass unbalance	27,000
Idle shaft	"	5,243
Transfer shaft	"	3,173
Main shaft ass'y	"	1,426
Output shaft ass'y	"	1,800
Output #3	"	2,231
Tooth passing pair #1	Gear profile error	126,920
Tooth passing pair #2	"	120,600
Tooth passing pair #3	"	104,860
Tooth passing pair #4, 6, 8	"	120,583
Tooth passing pair #5, 7, 9	"	540,000

동원은 Pair #1에서의 치합전달오차이다. Pair #2와 triple gear pair인 Pair #4, 6, 8 치접촉부의 가공오차로 인한 자려가진원도 5차모드 공진을 유발시키는데 위험속도는 각각 26028, 26810 rpm이다. 5차모드의 공진주파수는 1937 Hz이고 진동형은 Fig. 7에 도시되어 있는데 Pair #1의 구동기어, Pair #2의 종동기어를 지지하는 transfer shaft에서 로터 D4와 기어 G4사이의 output shaft, 그리고 G6와 D7사이의 input shaft에서 큰 비틀림진동이 존재하며, G1과 D1사이의 main shaft에서 강제운동이 존재한다.

27000 rpm에서 정상운전하면 축 S7에서 주파수 53 Hz의 비틀림 반복변형이 부과되고, Output #2의 로터 D1에 주파수 1937 Hz의 큰 진동이 발생되며 축 S2, S5, S7에서 비틀림 반복변형이 부가되기 때문에 피로파괴의 위험성이 있음을 알 수 있다. 특히 치접촉이 많은 P4, 6, 8 그리고 P1, P2에서 기어 rattle noise가 발생할 소지가 많다.

진동·소음을 저감시키는 방안으로는, P1, P2, P4, 6, 8의 가공오차를 줄이고 G2, G3의 평형잡기를 개선시켜야 할 것이다. 또한 1차 모드에 영향을 주는 S7, 8의 직경을 증가시켜서 1차모드의 고유진동수를 상향조절하거나 S2, 5, 7의 직경을 증가시켜서 5차 모드의 고유진동수를 상향 조절하는 것도 진동·소음의 저감방안이 될 수 있다.

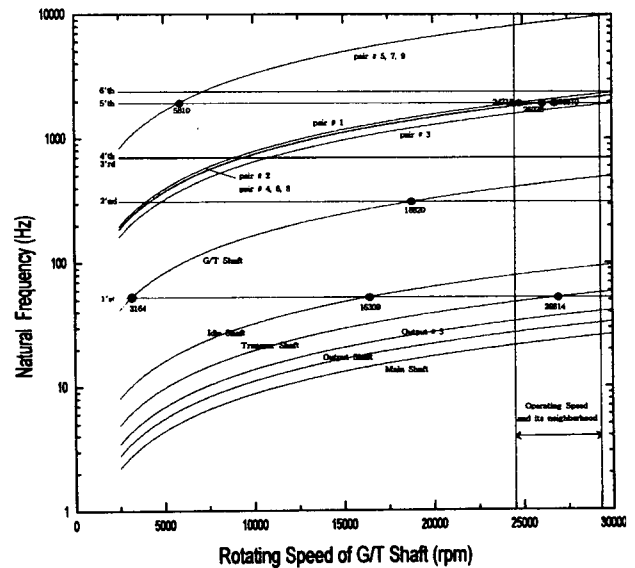


Fig. 5 Campbell diagram on the excitation sources

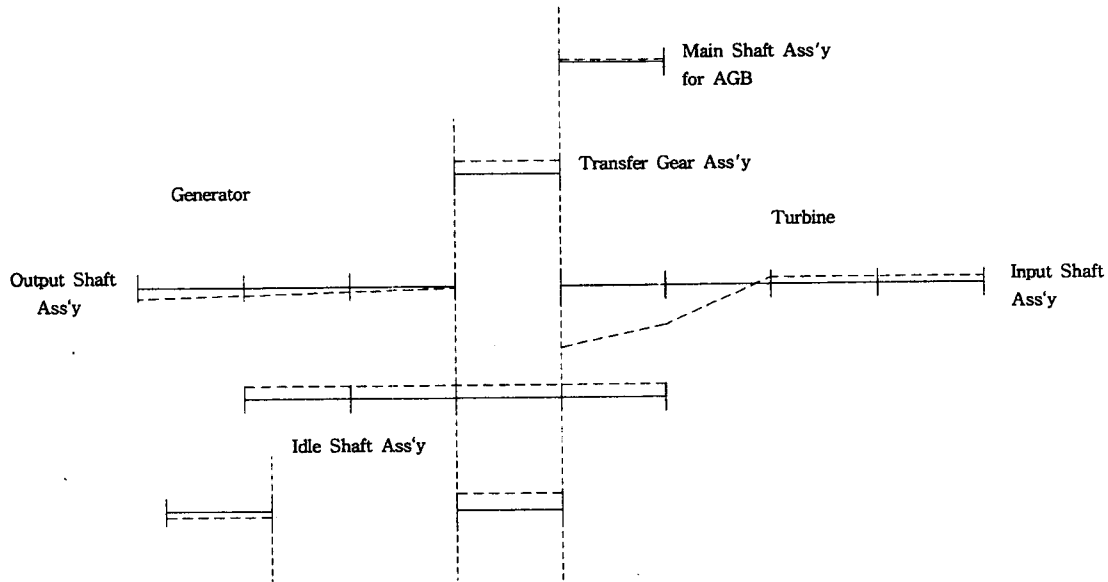


Fig. 6 The first natural mode (3104 rpm)

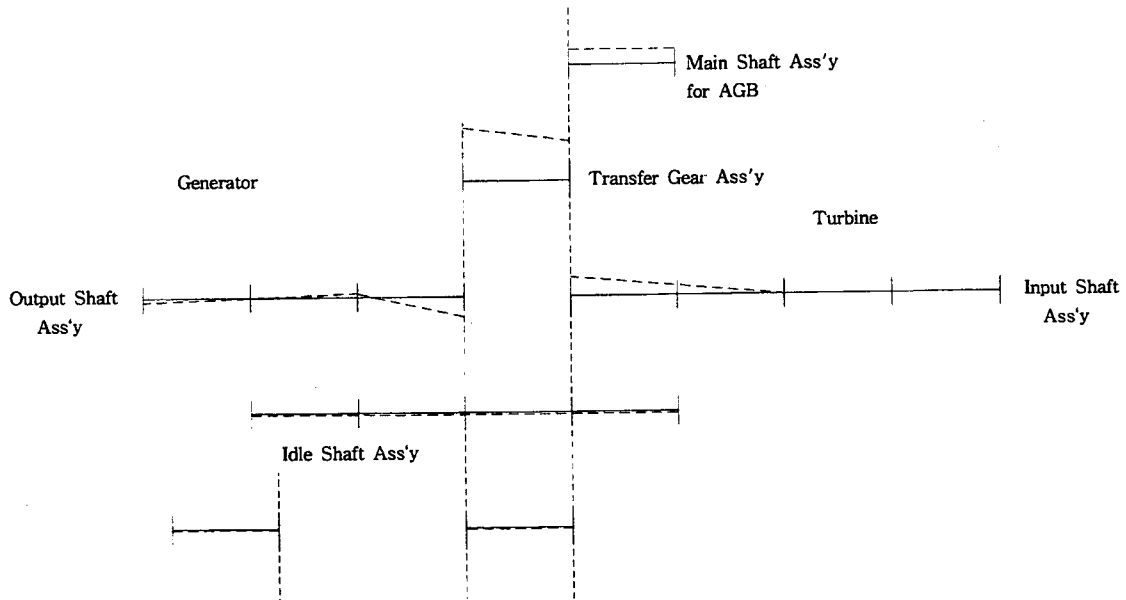


Fig. 7 The fifth natural mode (116200 rpm)

4. 결 론

Hibner's branch법과 λ -matrix법에 의한 전달행렬법을 이용하여 다축 회전동력계의 고유진동특성을 해석하는 프로그램을 개발하고 8단 가스터빈

-발전기 동력계에 적용하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) Hibner's branch에 의하여 이중구조의 triple gear와 같은 복잡한 치차연쇄계를 효과적으로 처리할 수 있었다.

(2) λ -matrix를 이용하여 모든 자유도에 대한

고유치를 계산오차없이 그리고 빠짐없이 구할 수 있었다.

(3) Campbell diagram을 산출하여 동력계의 운전속도 근처에 4개의 위험속도가 존재함을 확인하였다.

(4) 진동·소음저감대책으로, P1, 2, 4, 6, 8의 치합전달오차를 줄이고 G2, G3의 평형잡기를 해주는 방안과 S2, 5, 7, 8의 직경을 증가시켜서 1차 및 5차모드의 고유진동수를 상향조절하는 방안이 제시되었다.

참 고 문 헌

- (1) M.A.Prohl, 1945, "A General Method for calculating Critical Speeds of Flexible Rotors.", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, pp A-142~A-148.
- (2) J.W.Lund, 1974, "Stability and Damped Critical Speeds of Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 96, No. 2, pp. 509~517
- (3) P.N.Bansal and R.G.Kirk, 1975, "Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems, ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 1325~1332
- (4) D.Kim and J.W.David, 1990, "An Improved Method for Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems", ASME Journal of Vibration and Acoustics, pp. 112~118
- (5) M.J.Goodwin, 1989, "Dynamics of Rotor-bearing System", Principle Lecture, Dept. of Mech. and Computer-Aided Engineering, Staffordshire Polytechnic, Staffordshire Polytech.
- (6) J.S.Rao, 1991, "Rotor Dynamics", 2nd edition, John Wiley & Sons.
- (7) L.D.Mitchell, 1980, "A New Branching Technique for the Static and Dynamic Analysis of Geared System.", Vibration in Rotating Machinery, I Mech E Conference Publication.
- (8) N.G.Park, 1987, "An Analysis investigation of Geared System Dynamics Containing Spur and Helical Gears", Ph.D, North Carolina State University, Raleigh.
- (9) C.W.Lee, 1993, "Vibration Analysis of Rotors", Kluwer Academic Publishers.