

경사기능재료의 설계에 관한 연구

A Study on Design of Functionally Graded Materials

최 덕 기*, 김 창 수**
D. K. Choi, C. S. Kim

ABSTRACT

A functionally graded material is a nonhomogeneous material, which is composed of several different materials to maintain structural rigidity and endure high temperature loads. An analytical method is presented to solve the unsteady heat conduction equation for nonhomogeneous materials. A one-dimensional infinite plate made of functionally graded material is considered. The approximate Green's function solution is derived and to be used to obtain the temperature distribution then the stress distributions may be obtained. The volume fraction, the porosity, the stress difference, and the stress ratio are the design parameters and are to be used to set up a systematic design procedure.

주요기술용어 : Functionally Graded Material(경사기능재료), Green's Function Solution(그린함수해), Material Design(재료 설계), Thermal Stresses Relaxation(열응력 완화)

1. 서 론

고온이 가해지는 환경에 있어서 일반적인 재료를 사용하여 이러한 가혹한 조건을 받으면서 강도를 유지하게 하는 것은 불가능하므로 새로운 개념의 재료에 대한 필요성이 대두되고 있다. 재료 과학적으로 새로운 합금이나 재료를 만들

어 내는 것이 가장 효과적이라고 생각되지만 막대한 비용과 시간 그리고 연구 인력이 필요하게 된다. 따라서 가장 경제적인 방법은 기존에 널리 사용되고 있는 재료들을 이용하여 이러한 고온의 조건에서도 견딜 수 있는 새로운 개념의 재료를 만드는 것이 필요하다고 생각된다. 이러한 관점에서 볼 때 복합재료의 사용은 빠르게 확대되고 있으며 앞으로도 그 중요성이 증대될 것이라고 생각된다. 그러나 고온의 온도가 가해지는

* 정회원, 단국대학교 기계공학과

** 단국대학교 대학원

조건하에서는 복합 재료 내의 각 재료들의 물성의 상이성 때문에 상대적으로 큰 열응력이 발생하게 되고 이는 재료의 손실이나 파괴까지 초래할 수 있기 때문에 이러한 열응력을 감소시킬 수 있는 재료의 기능성이 필요하게 되었다. 野田直剛등은¹⁾ 상이한 재료의 조성비를 조절하여 재료를 만들면 고온에서의 열응력을 감소시킬 수 있음을 보였다. 고온 조건하에서 단열을 시키기 위한 재료로서는 일반적으로 세라믹이 많이 이용되고 있다. 그러나 세라믹은 그 자체의 취성으로 인하여 구조물을 만드는 것은 부적합하다. 구조물의 강도를 유지하기 위해서는 일반적으로 금속이 사용되며 고온에서의 변형을 극소화 하기 위해서는 열팽창계수가 작으며 상대적으로 강도가 큰 금속이 사용되어야 한다. 고온에서의 내열성과 강도를 동시에 만족시킬 수 있는 재료에 대해서는 아직도 많은 연구가 진행중이다.

최근 새로운 개념의 재료로서 관심을 모으고 있는 경사기능재료는 기존에 이미 사용되고 있는 재료들로 구성된 이질 재료로 구성된다. 이 커다란 장점으로 생각될 수 있다. 내열성을 가진 세라믹과 강도를 유지하기 위한 금속을 적절한 조성비로 섞어서 이질 재료를 만들게 되면 두 가지 재료의 장점만을 취한 새로운 재료로 만들 수 있다. 일반적으로 이질 재료는 이러한 특성을 가진 각각의 재료를 접합시켜 사용하는 것이 보통이다. 그러나 열 하중이 가해질 경우 열충격과 각 재료의 물성 특히 열팽창계수의 차이로 인하여 경계면에서 열응력의 발생으로 인하여 재료의 파괴를 초래하게 된다. 이러한 일반적인 이질 재료의 단점을 보완하기 위하여 단순히 각 재료를 접합시키는 대신 조성비를 위치에 따라 연속적으로 조절함으로써 경계에서 발생할 수 있는 열응력을 최소화시킬 수 있다.

이러한 이질 재료로 구성된 재료에 대한 열응력 해석을 하기 위해서는 온도장을 먼저 구해야 한다. 경사기능재료에서는 물성치가 위치에 따른 함수로 표시되기 때문에 1차원이라 하더라도 온도장을 구하기 위한 비정상 열전도 방정식을 해석적으로 풀기는 거의 불가능하다. 지금까지의 경사기능재료에 대한 비정상 열전도 해석에 대

한 연구는 다음과 같다. 열 및 기계적 물성치가 위치만의 함수일 경우에는 섭동이론과 Laplace 변환법을 이용한 해석방법이 연구되었으며²⁾, 열 및 기계적 물성치가 온도의 함수인 경우에 있어서의 해석 방법으로는 Laminated plate model과 Laplace 변환법을 이용한 해석방법이 알려져 있다.^{3),4)} 그러나 이러한 방법들은 상당히 복잡한 Laplace 역변환을 해야하는 어려움이 있다. 따라서 본 논문에서는 근사적인 Green 함수를^{5),6)} 사용하여 경사기능재료의 비정상 온도 해를 구하고, 역학적 경계조건에 따른 열응력을 구하여 최적의 금속체적분율과 기공율을 찾는 설계절차를 보이고자 한다.

본 연구에서는 1차원 물체에서 두께 방향으로 조성비 구배를 주어서 한쪽 면은 세라믹으로 다른 면은 금속으로 하되 그 사이는 이 두 가지 재료의 조성비 변화를 고려한 혼합물로 채워진 재료로 만든 1차원 무한 평판을 고려하였다. 고온의 열하중과 구조물의 지탱을 위한 세라믹과 금속으로 ZrO_2 와 Ti-6Al-4V로 이루어진 물성치를 갖는 경사기능재료에 대해서 비정상 온도 분포 및 열응력을 계산하여 응력의 차이값과 응력비를 이용하여 적당한 금속과 세라믹의 체적분율과 기공율을 찾는 설계 절차를 보였다.

2. 온도장 해석

1차원 무한 평판의 경사기능재료는 Fig.1에서 보는 바와같이 모든 열 및 기계적 물성치가 위치에 따라 점진적인 변화를 갖는 함수로 나타나는 것이 특징이다.

Fig.1에서 보는 바와 같이 한쪽은 금속, 다른 한쪽은 세라믹, 그 사이에는 금속과 세라믹의 혼합물질로 구성되어 있는 두께 L 을 가진 1차원 무한 평판을 생각해 보기로 한다. 위치와 시간에 대해서 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad (1)$$

$$\bar{t} = \frac{\kappa}{L^2} t \quad (2)$$

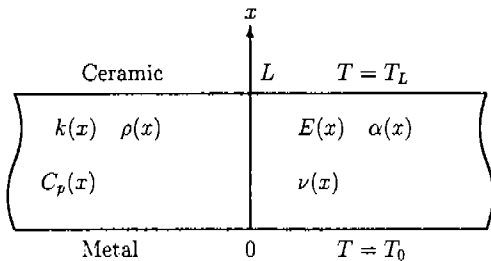


Fig.1 A one-dimensional infinite plate with the location dependent material properties

여기서 $\zeta = k_m / (\rho_m C_{pm})$, k 는 열전도율, ρ 는 밀도, C_p 는 비열, 첨자 m 은 금속쪽의 물성치를 의미한다.

무차원된 비정상 1차원 무한 평판에 대한 열전도 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(\bar{x}) \frac{\partial T}{\partial t} \right] + g(\bar{x}, \bar{t}) = \zeta C(\bar{x}) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

여기서 $C(\bar{t}) = \rho(\bar{x}) C_p(\bar{x})$, T 는 위치와 시간에 대한 온도 함수 $T(\bar{x}, \bar{t})$, $g(\bar{x}, \bar{t})$ 는 열원, $\rho(\bar{x})$ 와 $C_p(\bar{x})$ 는 각각 위치의 함수로 표현된 경사기능재료의 밀도, 비열의 위치의 함수이다. 식(3)에 대한 초기 및 경계 조건은 다음과 같다.

$$T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x}), \quad T(0, \bar{t}) = T_0, \quad T(L, \bar{t}) = T_L \quad (4)$$

여기서 T_0 와 T_L 은 각각 금속쪽과 세라믹쪽의 경계조건이다.

열전도 방정식, 식(3)의 Green 함수해를 구하기 위해서 다음과 같은 Green 함수를 포함한 보조 방정식을 이용하였다. 식(3)에 상응하는 Green 함수해를 구하기 위한 보조방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\bar{x}) \frac{\partial G}{\partial x} \right] + C(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(\bar{t} - \bar{\tau}) \\ = \zeta C(\bar{x}) \frac{\partial G}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $G = G(\bar{x}, \bar{t}, \bar{x}', \bar{\tau})$ 이고, $\delta(\bar{x} - \bar{x}')$ 와 $\delta(\bar{t} - \bar{\tau})$ 는 디랙델타 함수이다. 식(4)에 상응하는 식(5)의 경계조건 및 초기 조건은 다음과 같다.

$$G|_{\bar{x}=0} = G|_{\bar{x}=L} = 0$$

$$G(\bar{x}, \bar{t}, \bar{x}', \bar{\tau}) = 0, \quad \bar{t} < \bar{\tau}$$

2.1 Green함수 해의 유도

식(3), 식(5) 그리고 Green 함수의 성질 $G(\bar{x}, \bar{t}, \bar{x}', \bar{\tau}) = G(\bar{x}', -\bar{\tau}, \bar{x}, -\bar{t})$ 를 이용하여 열원이 없는 Green 함수 해(Green's Function Solution)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} C(\bar{x}) T(\bar{x}, \bar{t}) = \zeta \int_{\bar{x}'=0}^{\bar{x}'=L} C(\bar{x}') F(\bar{x}') G(\bar{x}, \bar{t}, \bar{x}', 0) d\bar{x}' \\ + \int_{\bar{\tau}=0}^{\bar{\tau}=\bar{t}} d\bar{\tau} \int k(\bar{s}') \left(G \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial G}{\partial n} \right) \Big|_s ds' \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $G = G(\bar{x}', -\bar{\tau}, \bar{x}, -\bar{t})$, n 과 s 는 각각 외향법선벡터와 표면을 의미한다.

비제차 경계조건인 경우에 있어서 Green 함수 해의 경계 수렴속도가 대단히 느린 것을 보완하기 위해서 Alternative Green 함수 해(Alternative Green's Function Solution)를 사용한다. Alternative Green 함수 해를 구하기 위해서 먼저 비제차 경계 조건을 만족하는 가장 간단한 함수인 T^* 를 다음과 같이 정의한다.

$$T^* = (T_L - T_0) \bar{x} + T_0 \quad (7)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\bar{x}) \frac{\partial T^*}{\partial t} \right] \quad (8)$$

T_0 는 금속쪽의 경계값, T_L 은 세라믹쪽의 경계값이다.

식(7), 식(8) 그리고 식(5)를 사용하여 Green 함수 해 방정식을 유도한 후, Green's Theorem 을 적용, 정리하여 Alternative Green 함수 해

를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T(\bar{x}, \bar{t}) &= (T_L - T_0)\bar{x} + T_0 \\
 &+ \frac{1}{C(\bar{x})} \int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}} d\bar{t} \int_{\bar{x}'=0}^{\bar{x}} G\Gamma d\bar{x}' \\
 &+ \frac{\zeta}{C(\bar{x})} \int_{\bar{x}'=0}^{\bar{x}} C(\bar{x}') G|_{\bar{t}=0} [T(\bar{x}', 0) \\
 &- T^*(\bar{x}', 0)] d\bar{x}' \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서 $G = G(\bar{x}', -\bar{t}|\bar{x}, -\bar{t})$ 이다. 경사기 능재료와 같은 비균질 재료에 있어서의 온도 분포 해에 대한 Green 함수를 해석적으로 유도하는 것은 불가능하다. 따라서 본 논문에서는 경사기 능재료에서의 무차원상수 (ζ)가 포함된 근사적인 Green 함수를 유도하였다.

2.2 근사적인 Green 함수 유도

식(3)에서 열원 $g(\bar{x}, \bar{t}) = C(\bar{x})\delta(\bar{x} - \bar{x}')\delta(\bar{t} - \bar{t})$ 으로 가정한다면 Green 함수는 보조방정식, 식(5)의 해가 된다. 따라서 보조방정식의 해인 Green 함수를 구하기 위하여, 열전도 방정식, 식(3)을 제차 방정식과 비제차 방정식의 두 부분으로 생각하기로 한다.

2.2.1 제차 방정식

식(3)에서 제차 방정식을 고려하고 그 방정식의 해를 $\theta(\bar{x}, \bar{t})$ 라 하면 식(3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(\bar{x}) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \zeta C(\bar{x}) \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (10)$$

N 개의 고유값과 고유함수로 이루어진 $\theta(\bar{x}, \bar{t})$ 를 다음과 같이 가정하고 제차 방정식, 식(10)에 대입하여, 고유치 문제로 전환한다.

$$\theta = \sum_{n=1}^N c_n \psi_n(\bar{x}) \exp \left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta} \bar{t} \right] \quad (11)$$

여기서 $c_n, \psi_n(\bar{x}), \gamma_n$ 은 각각 상수, 고유 함수, 고유값이며 계산되어질 미지수이다. θ 를 식

(10)에 대입하고, 양변에 시도함수 $f_i(\bar{x})$ 를 곱하고 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 f_i \frac{d}{dx} \left[k(\bar{x}) \frac{d\psi_n}{dx} \right] d\bar{x} + \gamma_n \int_0^1 L^2 C(\bar{x}) \psi_n f_i d\bar{x} = 0 \quad (12)$$

여기서 시도 함수 f_i 는 $f_i(\bar{x})$ 를 의미한다. 식(12)에서 고유 벡터와 시도함수로 이루어지는 고유함수 $\psi_n(\bar{x})$ 을 다음과 같이 가정한다.

$$\psi_n(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(\bar{x}) \quad (13)$$

여기서 $f_j(\bar{x})$ 는 시도 함수, d_{nj} 는 고유 벡터이다. 고유함수 식(13)을 식(12)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N d_{nj} \left[\int_0^1 f_i \frac{d}{dx} \left[k(\bar{x}) \frac{df_j}{dx} \right] d\bar{x} \right. \\
 \left. + \gamma_n \int_0^1 L^2 C(\bar{x}) f_i f_j d\bar{x} \right] = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

식(14)를 행렬식으로 나타내면 제차방정식인 식(10)은 다음과 같은 고유치 문제로 전환시킬 수 있다.

$$(A + \gamma_n B) d_n = 0 \quad (15)$$

$$a_{ij} = \int_0^1 f_i \frac{d}{dx} \left[k(\bar{x}) \frac{df_j}{dx} \right] d\bar{x} \quad (16)$$

$$b_{ij} = \int_0^1 L^2 C(\bar{x}) f_i f_j d\bar{x} \quad (17)$$

a_{ij} 와 b_{ij} 는 A, B 행렬의 요소이다. 식(16)의 우변에 Green's Theorem을 적용, 식을 간략히 하면 식(16)의 a_{ij} 는 다음과 같이 주어진다.

$$a_{ij} = - \int_0^1 k(\bar{x}) \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} d\bar{x} \quad (18)$$

식(18)와 식(17)로 이루어진 고유치 문제 식(15)을 풀면 고유값, γ_n 과 고유 벡터, \mathbf{d}_n 을 구할 수 있고, 고유벡터 \mathbf{d}_n 을 고유함수로 정의된 식(13)에 대입하여 고유 함수, $\psi_n(\bar{x})$ 을 얻을 수 있다.

2.2.2 비제차 방정식

열전도 방정식, 식(3)의 방정식의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^N c_n(\bar{t}) \psi_n(\bar{x}) \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}\right] \quad (19)$$

여기서 시간의 함수 $c_n(\bar{t})$ 는 미지수이고 고유 함수, $\psi_n(\bar{x})$ 과 고유값, γ_n 은 2.2.1에서 이미 구했다.

비제차 방정식의 해, 식(19)을 원래의 열전도 방정식 식(3)에 대입하여, 양변에 시도함수 $f_i(\bar{x})$ 를 곱하여 적분하여 정리하면 미지수 $c_n(\bar{t})$ 을 갖는 다음과 같은 식이 된다.

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}\right] \int_0^1 \xi C(\bar{x}) \psi_n f_i d\bar{x} = g_i^* \quad (20)$$

여기서,

$$g_i^* = \int_0^1 g(\bar{x}, \bar{t}) f_i(\bar{x}) d\bar{x} \quad i=1, 2, \dots, N$$

식(20)에서 미지수 $c_n(\bar{t})$ 를 구하기 위해서 고유 함수 식(13)을 식(20)에 대입하고 다음과 같이 치환한다.

$$e_{\epsilon} = \sum_{j=1}^N d_{nj} h_{ji} \quad (21)$$

여기서 $h_{ji} = \int_0^1 \xi C(\bar{x}) f_i f_j d\bar{x}$ 이다. 식(21)를 사용하여 미지수 $c_n(\bar{t})$ 가 포함된 식(20)를 행렬 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} \mathbf{g}^* \quad (22)$$

여기서 $X_n = \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}\right]$, 행렬 $\mathbf{P} = \mathbf{E}^{-1}$ 이고 \mathbf{P} 는 P_{ni} 의 요소를 갖는 행렬이다. 이제 미지수 $c_n(\bar{t})$ 를 구하기 위해서 식 X_n 을 식(22)에 대입하면 다음과 같다.

$$X_n = \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}\right] = \sum_{i=1}^N P_{ni} g_i^* \quad (23)$$

윗식을 다시 $dc_n(\bar{t})/d\bar{t}$ 에 대하여 정리하여 시간에 대하여 양변을 적분하면 다음과 같이 $c_n(\bar{t})$ 를 구할 수 있다.

$$c_n(\bar{t}) = A_n + \sum_{i=1}^N P_{ni} \int_0^{\bar{t}} g_i^* \exp\left[\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}'\right] d\bar{t}' \quad (24)$$

여기서 A_n 은 적분상수이다. 식(24)에서 구한 계수 $c_n(\bar{t})$ 를 비제차 방정식의 해로 가정하였던 식(19)에 대입하면 다음과 같이 온도 분포 해를 구할 수 있다.

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^N \psi_n(\bar{x}) \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}\right] \cdot \left[A_n + \sum_{i=1}^N P_{ni} \int_0^{\bar{t}} g_i^* \exp\left[\gamma_n \frac{L^2}{\xi} \bar{t}'\right] d\bar{t}' \right] \quad (25)$$

온도 해, 식(25)에서 적분 상수인 미지수 A_n 을 구하기 위해서 초기 조건, $T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x})$ 를 식(25)에 대입한 식의 양변에 $\xi C(\bar{x}) f_i(\bar{x})$ 를 곱하고 적분하면 적분상수인 A_n 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_n = \sum_{i=1}^N P_{ni} \int_0^1 \xi C(\bar{x}) f_i F(\bar{x}) d\bar{x} \quad (26)$$

이제 적분 상수인 식(26)를 식(25)에 대입하여,

초기온도 $F(\bar{x})=0$ 이고 $g(\bar{x}, \bar{t})=C(\bar{x})\delta(\bar{x}-\bar{x}')\delta(\bar{t}-\bar{t}')$ 를 적용하면 식(25)은 식(5)의 해인 Green 함수와 같게 된다. 따라서 무차원된 1차원 경사기능재료의 온도 해에 대한 근사적인 Green 함수를 정의하면 다음과 같다.

$$G(\bar{x}', \bar{t}|\bar{x}, \bar{v}) = C(\bar{x}) \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N d_{nji} P_{ni} \times \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\xi} (\bar{t}-\bar{v})\right] f_j(\bar{x}') f_i(\bar{x}) \quad (27)$$

지금까지 구한 근사적인 Green 함수를 Green 함수 해인 식(6)에 대입하면 비정상 온도 해를 구할 수 있다. 그러나 서론에서 언급한 바와 같이 비제차 경계 조건인 경우, 제차 경계조건을 만족하는 보조방정식, 식(5)를 사용하였으므로 수렴이 대단히 느리게 된다. 따라서 여기에서 구한 Green 함수를 식(9)에 대입하면 비제차 경계조건을 만족하는 비정상 온도 해인 Alternative Green 함수 해를 얻을 수 있다.

3. 응력장 해석

경사기능재료는 서론에서 언급한 바와 같이 모든 열 및 기계적 물성치들이 체적분율과 기공율을 포함하는 위치에 따른 연속적인 함수의 형태로 나타나게 된다.

1차원 무한평판에 있어서 열응력 $\sigma(\bar{x})$ 는, 평판이 아랫면, $\bar{x}=0$ 에서의 변형율을 ϵ_0 , 곡률변경을 r_0 , 재료의 초기온도를 T_i 라 하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁷⁾

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{E(\bar{x})}{1-\nu(\bar{x})} \left[\epsilon_0 + \frac{\bar{x}L}{r_0} - \alpha(\bar{x})[T(\bar{x}) - T_i] \right] \quad (28)$$

식(28)의 역학적 경계조건은 신장자유 곡률자유, 신장구속 곡률자유, 신장자유 곡률구속, 신장구속 곡률구속의 네가지 경계조건이 생각될 수 있다. 그러나 온도의 영향에 따른 평판에서의 응력상태를 표현하기 위해서는 외부에서의 구속조건을 최소화 하는 것이 타당하다고 생각되어, 본

논문에서는 신장자유 곡률자유만을 고려하였다.⁸⁾

• 신장자유, 곡률자유

$$\int_0^1 \sigma(\bar{x}) d\bar{x} = 0, \quad \int_0^1 \bar{x} \sigma(\bar{x}) d\bar{x} = 0$$

위의 경계 조건에 대한 연립방정식을 풀어서 미지수 ϵ_0 와 r_0 를 구할 수 있다. 따라서 Alternative Green 함수 해를 사용하여 구한 온도 분포 해와 기계적 물성치, 탄성계수 $E(\bar{x})$, 열팽창계수, $\alpha(\bar{x})$, 프아송비 $\nu(\bar{x})$ 를 응력식에 대입하면 비정상 응력분포를 구할 수 있다.

4. 경사기능재료의 설계 절차

본 연구에서 고려한 경사기능재료의 금속의 체적분율과 재료의 기공율은 다음과 같이 가정하였다.⁹⁾

$$V_m = (1 - \bar{x})^M \\ S = R\bar{x}(1 - \bar{x}) \quad (0 \leq R < 4) \quad (29)$$

여기서 V_m 은 금속의 체적분율, S 는 기공율을 의미한다. 따라서 부록 A에 있는 재료의 물성치들은 위치의 함수형태로 표현할 수 있다.

따라서 식(29)에서 보는 바와 같이 금속의 체적분율과 기공율에 영향을 미치는 변수 M 과 R 에 의해 모든 열 및 기계적 물성치가 결정되며, 이러한 변화를 갖는 금속의 체적분율과 기공율에 의해 비정상 온도 분포와 그에 따른 열응력 분포 또한 변화를 갖게 된다. 따라서 본 장에서는 변화하는 금속의 체적분율과 기공율의 최적의 값을 찾는 설계 절차를 설명하기로 한다.

경사기능재료를 설계함에 있어서 Fig.2에서 보는 바와 같이, 금속의 체적분율과 기공율이 변화함에 따른 최대응력(σ_{max})과 최소응력(σ_{min})의 차이, 즉 응력의 차이값(f_{diff})을 계산하면 각 경우에 대한 응력의 완화정도를 볼 수 있다. 다음 식은 응력의 차이값을 계산하기 위한 식이다.¹⁰⁾

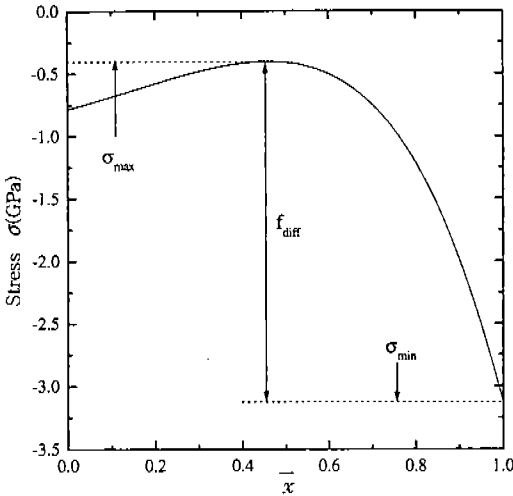


Fig.2 The definition of the stress difference f_{diff}

$$f_{diff} = |\sigma_{max} - \sigma_{min}| \quad (30)$$

그러나 같은 응력 차이값을 갖더라도 응력값이 작은 것이 더 좋은 재료임에도 식(30)에서는 이러한 차이를 알 수가 없으므로 응력의 차이값만을 가지고는 최적의 금속 체적분율과 기공율을 결정짓는 것에는 무리가 따른다. 따라서 이러한 점을 보완하기 위하여 다음과 같은 설계인자를 제시한다.

$$f_{dr} = \frac{f_{diff}}{\sqrt{|\sigma_{max} \sigma_{min}|}} \quad (31)$$

식(31)에서 보는 바와 같이 응력차이값을 응력의 최대값과 최소값의 곱으로 나누어 줌으로서 같은 응력차이값이라 하더라도 응력이 작게 작용하는 것을 찾아낼 수 있다. 즉 같거나 비슷한 응력차이값을 갖는 경우에는 f_{dr} 의 값이 큰 것이 더 좋은 재료라고 말할 수 있다.

따라서 경사기능재료를 설계할 때, 식(30)과 식(31)을 이용하는 것은 적당한 금속의 체적분율과 기공율을 결정짓는 하나의 설계인자가 될 수 있다. 그러나, 물성치가 위치의 함수로 주어진 경사기능재료와 같은 비균질재료의 강도는

물성치의 변화와 마찬가지로 위치에 따라 변하게 되므로, 재료의 강도를 계산함에 있어서 응력의 차이만을 논의하는 것은 부적절하다. 따라서 적당한 체적분율과 기공율을 결정짓는 강도평가는 다음의 응력비(stress ratio)를 이용하여 선택된 금속의 체적분율과 기공율에 대한 타당성을 검토해야 된다.¹¹⁾

$$\begin{aligned} f &= \sigma_{T_s}(\bar{x}) / \sigma(\bar{x}) \quad (\sigma(\bar{x}) > 0) \\ &= \sigma_{C_s}(\bar{x}) / |\sigma(\bar{x})| \quad (\sigma(\bar{x}) < 0) \end{aligned} \quad (32)$$

재료의 허용강도를 평가하는 식(32)에서의 최소값, f_{min} 가 1미만일 경우에는 균열 및 파괴가 발생할 수 있고, 1이상일 때는 재료의 안정성이 보증된다고 볼 수 있다. 따라서 선택된 금속의 체적분율과 기공율이 타당한 값인지를 판단하는 근거가 된다.

이러한 금속의 체적분율과 기공율을 찾는 일련의 절차를 Fig.3에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 각각의 M 과 R 에 해당하는 비정상 온도 분포 및 응력 분포를 구한 후에 응력의 차이를 계산하여 응력의 차이가 가장 적은 값을 갖는 M 과 R 에 대해서 최소응력비를 계산하여 선택된 금속의 체적분율과 기공율에 대한 응력 분포를 갖는 경사기능재료가 타당한 값인지를 검증하며 타당하지 않다면 그 다음의 응력의 차이를 나타내는 M 과 R 에 대해서 최소응력비를 검증하는 절차를 타당한 최소응력비를 나타낼 때까지 수행하게 된다.

다음 장에서는 예제를 통한 경사기능재료를 해석하여 비정상 온도 분포 및 그에 따른 열응력을 구하고 최적의 금속의 체적분율과 기공율을 결정짓는 설계 절차를 예제를 들어 설명하였다.

5. 경사기능재료의 설계 예

이번 장에서는 4장에서 설명된 바와 같이 적당한 금속의 체적분율과 기공율을 찾는 설계 절차를 순서도 Fig.3에 의해 보였다.

본 논문에서 사용한 신장자유, 곡률자유역

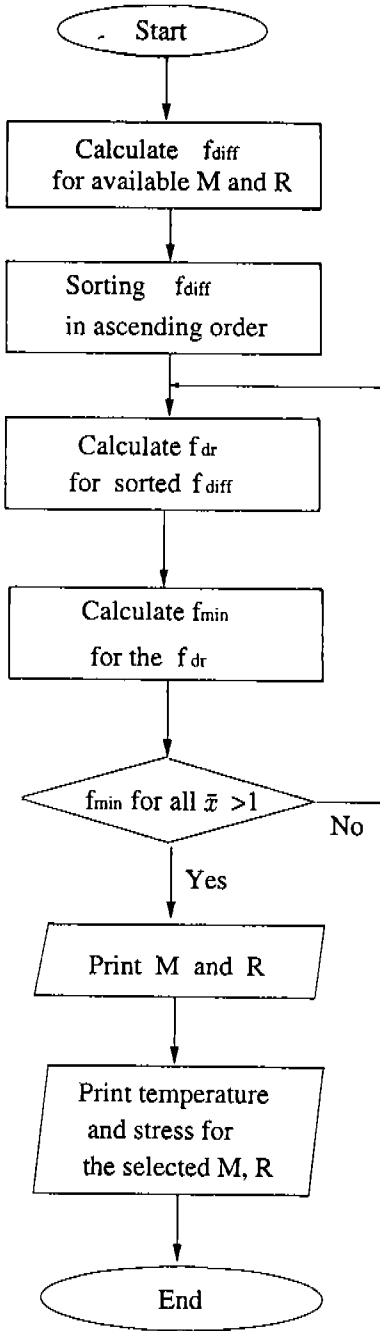


Fig.3 The flowchart for design of an FGM using the stress difference f_{diff} , f_{dr} and the stress ratio f_{min}

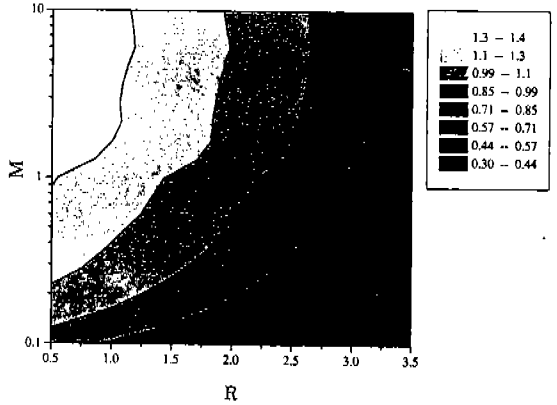


Fig.4 The contour plot of the stress difference f_{diff} with design parameters M and R at dimensionless time $\bar{t}=0.1$

학적 경계조건에 해당하는 무차원 시간 $\bar{t}=0.1$ 일 때의 응력의 차이를 나타낸 Fig.4에서 보는 바와 같이 M 이 작을수록, R 이 클수록 즉 금속의 체적분율이 클수록 기공이 많을수록 응력의 차이, f_{diff} 가 적은 값을 갖는 것을 알 수 있다. 응력의 차이값이 작다는 의미는 응력이 전 지역에 걸쳐서 상대적으로 고루 분포되어 있음을 알 수 있다. 그러나 앞장에서 설명된 바와 같이 같거나 비슷한 응력차이값을 갖더라도 작은 응력값을 나타내는 것이 더 좋은 재료이다. 그러므로 식(31)을 이용하여 상대적으로 작은 값을 취하는 응력 차이값에 해당하는 f_{dr} 를 Table 1에 나타내었다.

따라서 응력의 차이, f_{diff} 가 상대적으로 작은 값을 나타내는 M 과 R 에 대해서 Table 1에서 보는 바와 같이 f_{dr} 이 가장 큰 값을 갖는 금속 체적분율과 기공율을 선택하여 응력비를 나타내는 식(32)을 사용하여 검증하게 된다. Fig.5에서 보는 바와 같이 f_{dr} 이 가장 큰 값을 갖는 $M=0.7$, $R=3.5$ 인 경우 상대적으로 초기 시간에 있어서 최소응력비가 1 이하이므로 파괴가 일어날 가능성이 있음을 알 수 있다. 그러나, $M=0.2$, $R=3.5$ 인 모든 시간에 걸쳐서 최소응력비

Table 1 The f_{dr} for the range of $0.3 \leq f_{diff} \leq 0.57$ for various M and R

M	R	f_{dr}
0.7	3.5	184.7
0.2	3.5	48.0
0.3	3.5	24.8
0.5	3.5	19.2
0.1	3.5	15.6

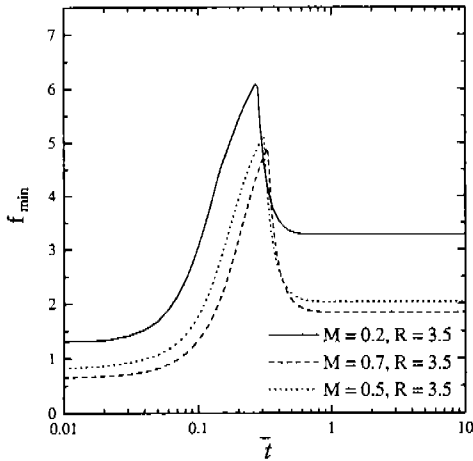


Fig.5 The stress ratio versus the dimensionless time \bar{t} at different combinations of design parameters M and R

가 1 이상을 나타냄으로 파괴가 일어나지 않으므로 타당하다고 생각된다.

이와 같이 결정된 급속 체적분율과 기공율에 의한 열 및 기계적 물성치를 Fig.6-Fig.7로 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 $M=0.2$ 이면 급속이 약 83%이므로 세라믹쪽에 가까운 곳에서 많은 변화를 갖는 것을 알 수 있다.

Fig.6-Fig.7에서 보이는 물성치를 갖는 경사 기능재료의 비정상 온도 분포 및 열응력 분포는 Fig.8-Fig.9에서 볼 수 있다. 비정상 온도 분포에서는 정상상태에서 세라믹쪽에서의 온도가 상승함을 알 수 있다. 그리고 비정상 응력 분포에

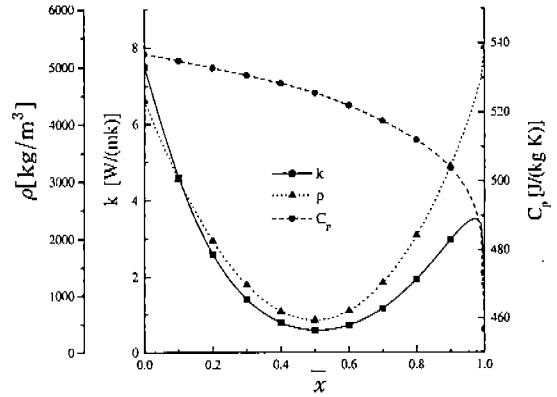


Fig.6 The thermal conductivity k , the specific heat C_p and the density ρ versus the dimensionless location \bar{x} for $M=0.2$ and $R=3.5$

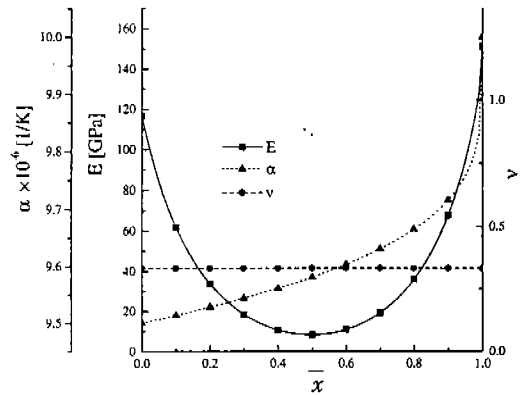


Fig.7 The Young's modulus E , the coefficient of thermal expansion α , and Poisson's ratio ν versus the dimensionless location \bar{x} for $M=0.2$ and $R=3.5$

서는 물성치의 변화에서와 마찬가지로 세라믹쪽에서의 급격한 응력의 변화가 일어남을 알 수 있다.

6. 결 론

급속, 세라믹으로 각각 Ti-6Al-4V와 ZrO₂로

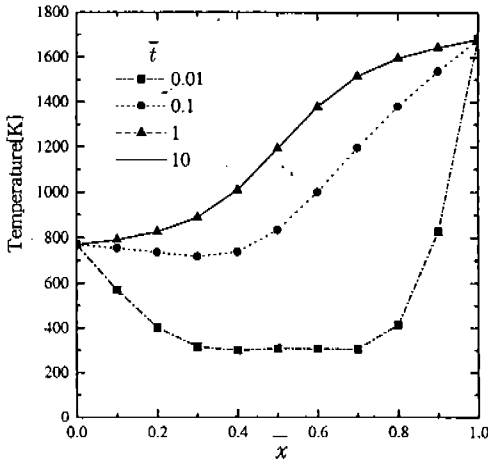


Fig.8 The temperature distributions versus the dimensionless location \bar{x} for $M=0.2$, $R=3.5$

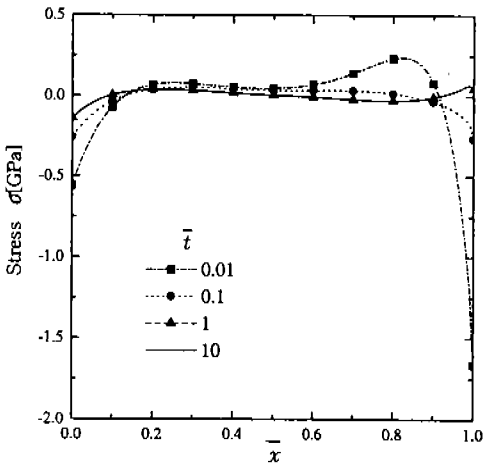


Fig.9 The stress distributions versus the dimensionless location \bar{x} for $M=0.2$, $R=3.5$

이루어진 1차원 무한평판의 경사기능재료의 온도 및 열응력을 해석하였다. 그리고 최적의 금속 및 세라믹의 체적분율과 기공율을 찾는 데 있어서 응력의 차이(f_{diff})를 계산함으로써 변화하는 금속의 체적분율과 기공율에 따라 응력이 균일하게 분포되는 것을 계산할 수 있었으며, f_{dr}

을 이용하여 유사한 값을 갖는 응력차이값에 대하여 좀 더 작은 응력을 갖는 패러미터를 구할 수 있었다. 그리고 최소 응력비(f_{min})를 사용하여 선택된 금속의 체적분율과 기공율에 대하여 재료의 안정성을 검증하는 설계절차를 보였다.

후 기

본 연구는 96년도 교내연구비에 의해 수행되었으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 野田直剛, 迂知章, "傾斜機能平板の定常熱応力", 日本機成學會論文集, A編, 57卷, 533号, pp. 98~103, 1991.
2. 小畑良洋, 野田直剛, "傾斜機能平板の非定常熱応力(一次元非正常溫度場の解析)", 日本機成學會論文集, A編, 59卷, 560号, pp. 208~214, 1993.
3. Tanigawa, Y., Akai, T., Kawamura, R., Oka, N., "Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties", Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 77~102, 1996.
4. Tanigawa, Y., "Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structural Materials", ASME, Appl. Mech. Rev., Vol. 48, No. 6, June, pp. 287~300, 1995.
5. Haji-Sheikh, A., Beck, J. V., "Green's Function Partitioning in Galerkin-Based Integral Solution of the Diffusion Equation", Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, February, Vol. 112, pp. 28~34, 1990.
6. Choi, D. K., "A Study on Temperature Models at the Interface of Fiber-Reinforced Composite Materials", Nu-

merical Methods In Thermal Problems, Vol. IX, Part 2, pp. 932~943, 1995.

7. 小畑良洋, 野田直剛, “傾斜機能平板の定常熱応力(力學的境界條件の影響)” 日本機械學會論文集, A編, 58卷, 553号, pp. 159~165, 1992.
8. 野田直剛, 迂知章, “傾斜機能平板の定常熱応力(物性値の溫度依存性を考慮した場合), 日本機械學會論文集, A編, 57卷, 533号, pp. 98~103, 1991.
9. Obata, Y., Noda, N., “Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material”, Journal of Thermal Stresses, Vol. 17, pp. 471~487, 1994.
10. 최덕기, 김창수, “열차단 재료의 설계에 관한 해석적 연구”, 한국자동차공학회 구조강도-재료부문 학술강연초록집, pp. 95~102, 1997.
11. 小畑良洋, 野田直剛, “傾斜機能平板の非定常熱応力(加熱, 冷却溫度條件の非正常熱応力への影響)” 日本機械學會論文集, A編, 59卷, 560号, pp. 215~221, 1993.

부록 A. 경사기능재료의 물성치

경사기능재료의 모든 열 및 기계적 물성치는 위의 체적분율과 기공율에 의해 다음과 같이 표현된다.^{8),11)}

$$k(\bar{x}) = \left[(1 - s^{1/3}) / \{k_c + 3k_c(k_m - k_c)V_m / \{3k_c + (k_m - k_c)V_c\} + S^{1/3} / \{(1 - S^{2/3})(k_c + 3k_c(k_m - k_c)V_m / \{3k_c + (k_m - k_c)V_c\} + S^{2/3}k_a)\} \right]^{-1} \quad (A.1)$$

$$E(\bar{x}) = \{E_c \{E_c + (E_m - E_c)V_m^{2/3}\} / \{E_c + (E_m - E_c) \times (V_m^{2/3} - V_m)\}\} (1 - S) / \{1 + S(5 + 8\nu)(37 - 8\nu) / \{8(1 + \nu)(23 + 8\nu)\}\} \quad (A.2)$$

$$C_p(\bar{x}) = \left[(C_{p_m}\rho_m V_m + C_{p_c}\rho_c V_c) / (\rho_m V_m + \rho_c V_c)(\rho_m V_m + \rho_c V_c) \times (1 - S) + C_{p_a}\rho_a S \right] / \rho_m V_m + \rho_a S \quad (A.3)$$

$$\rho(\bar{x}) = (\rho_m V_m + \rho_c V_c)(1 - S) + \rho_a S \quad (A.4)$$

$$\alpha(\bar{x}) = \left[\alpha_m \{E_m / \{2(1 - \nu_m)\}\} V_m + \alpha_c \{E_c / \{2(1 - \nu_c)\}\} V_c \right] / \left[\{E_m / \{2(1 - \nu_m)\}\} V_m + \{E_c / \{2(1 - \nu_c)\}\} V_c \right] \quad (A.5)$$

$$\nu(\bar{x}) = \nu_m V_m + \nu_c V_c \quad (A.6)$$

$$\sigma_{T_s}(\bar{x}) = \{\sigma_{T_{sm}} V_m + \sigma_{T_{sc}} V_c\} (1 - S) \quad (A.7)$$

$$\sigma_{C_s}(\bar{x}) = \{\sigma_{C_{sm}} V_m + \sigma_{C_{sc}} V_c\} (1 - S) \quad (A.8)$$

첨자 a 는 공기, c 그리고 m 은 각각 세라믹과 금속쪽의 물성치를 의미한다. 모든 물성치는 300 K에서의 물성치를 사용하였다.