

## 메이슨의 공식을 이용한 본드그래프의 전달함수 유도법에 관한 연구

### A Study on the Induction Method of Transfer Function of Bond Graph using Mason's Rule

한 창 수\*, 오 재 응\*\*  
C. S. Hahn, J. E. Oh

#### ABSTRACT

In many case of optimal design and sensitivity analysis, obtaining of transfer function between input and output variables is a difficult and time-consuming problem. The bond graph modeling is a method that is used for making it easy to analyze complex systems composed of mechanical and electrical parts. It gives us a simple and systematic tool to get state-space equations easily. And we can obtain the transfer function graphically using bond graph and Mason's rule.

This paper shows how bond graphs are converted to block diagram and how Mason's rule is applied. And the simple direct method to obtain transfer function from bond graph is introduced. As a example, induction of transfer function of electric power steering composed of mechanical and electrical parts will be done.

주요기술용어 : Bond Graph Modeling(본드그래프 모델링), Block Diagram(블록선도), Transfer Function(전달함수), Mason's Rule(메이슨의 공식), Electric Power Steering(전동파워스티어링)

#### 1. 서 론

최근 전세계적인 자동차산업의 기술경쟁으로 인하여 각 개발사의 시스템 설계자들은 시스템 효율의 극대화 및 설계사양의 최적화를 꾀하고 있으며, 이에 따른 시간적, 금전적인 투자도 증가하고 있다. 이들 시스템의 최적화를 위하여 최

적설계와 감도해석 알고리즘을 이용하고 있으나 이를 위해서는 무엇보다도 주어진 설계변수에 대한 출력과의 관계를 나타내는 목적함수에 대한 유도가 선행되어야 한다.<sup>1,2)</sup> 목적함수에는 원하는 효과를 최대화시키거나 원하지 않는 효과를 최소화시키는 모든 항목을 포함하고 있으나 오늘날과 같이 소비자의 NVH에 대한 요구가 증가하고 있는 이때 입출력간 주파수역의 전달 함수에 대한 고려가 중요시되고 있다. 또한 과거에 비해 기계계나 전기계, 자기계 등 여러 가지

\* 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

\*\* 정회원, 한양대학교 기계공학부

다른 분야의 하부시스템으로 구성된 복합시스템이 증가하고 있어, 이들 각각의 하부시스템을 지배하는 방정식을 포함한 전체 시스템에 대한 전달함수를 구하는 것은 많은 노력과 시간이 요구되고 있다.<sup>3)</sup>

1960년대 Paynter에 의해 물리적인 시스템을 지배하는 여러 법칙간의 에너지전달 및 변환에 관련된 상사성을 이용하여 제안된 본드그래프는 Rosenburg와 Karnopp<sup>4)</sup>에 의해 더욱 체계적으로 보완되어 현재 기계계, 전기계, 유체계, 음향계, 열전달계 등 광범위한 분야에서 사용되고 있으며 모델링을 위한 효과적인 도구로서 널리 사용되고 있다. 그 특징으로는 복합적인 계의 해석을 통일된 순차적인 방법에 의해 수행할 수 있으며, 해석하고자 하는 시스템을 도식적으로 표현함으로써 에너지의 흐름이나 전달경로 등의 파악이 용이하다. 또한 인과관계라는 고유의 특성을 이용하여 시스템변수에 대해 최적의 상태 방정식을 유도할 수 있게 하는 등 많은 장점을 가지고 있다.<sup>4~6)</sup> 본 연구에서는 본드그래프의 특성을 최대한 이용하여 주어진 시스템에 대한 전달함수를 도식상에서 직접적으로 유도할 수 있는 방법을 제시하는 것을 목적으로 하였다.

연구내용으로는 본드그래프의 작력(Effort), 흐름(Flow) 등의 상태변수와 기본소자 및 접점 등에 대한 표기법을 블록선도와와의 상관관계를 이용하여 표현하였으며, 이 블록선도로 표현된 시스템에 대해 간단 명료하게 전달함수를 구할 수 있는 기존의 메이슨의 공식에 대해 소개하였다. 그리고 메이슨의 공식과 본드그래프의 특징인 도식적인 표현법을 이용하여 본드그래프로 나타낸 시스템에 대해 입출력간의 전달함수를 직접 구할 수 있는 본드그래프 전달함수 유도법을 제안하였다. 예제시스템으로서 기계계, 전기계 및 제어신호선으로 이루어진 복합시스템인 전동조향장치<sup>7,8)</sup>에 대해 적용함으로써 제안된 방법의 효용성을 나타내었다.

## 2. 본드그래프와 블록선도 표기법

본드그래프는 블록선도를 기본으로 작력과 흐

름이 한 요소에서 다른 요소로 연결선인 본드(Bond)를 통해 전달, 저장, 소비되는 에너지흐름을 기본으로 하여 개발된 것으로서 본드그래프의 각 소자 및 접점은 Fig.1과 같이 블록선도로 나타낼 수 있다. 여기서 흐름원(Flow Source) 및 작력원(Effort Source)의 경우 본드그래프상에서 흐름 또는 작력이 단독으로 작용하는 것을 가정하므로 원래의 개념상으로는 블록선도에서 하나의 선으로밖에 표시되지 않는다. 그러나 본 논문에서는 작용하는 원천으로 인하여 시스템에서 피드백되는 대응변수(흐름원의 경우 작력변수, 작력원의 경우 흐름변수)의 값을 측정할 수 있어야 하므로 표기상 통일을 위하여 원천변수는 실선으로, 대응변수는 점선으로 표시하였고, 이때 대응변수는 신호선과 같은 기능으로서 그 변수의 값을 참조하는 데에만 사용된다. 본드그래프의 단포트소자 I, C는 독립변수관계를 나타내는 적분 인과관계(Integral Causality)와 종속 변수관계를 나타내는 미분 인과관계(Derivative Causality)로 구분되며, 블록선도상에서 흐름변수와 작력변수 간에 미적분의 관계를 나타내고 있다. 단포트소자 R은 흐름변수와 작력변수간의 입출력관계에 의해 분류하였다. 또한 2포트소자인 트랜스포머(Transformer)는 입력측의 작력·

	Bond Graph	Block Diagram		Bond Graph	Block Diagram
Flow source	$Sf \rightarrow$	$\begin{array}{c} e \\ \leftarrow \\ f \end{array}$	Effort Source	$Se \rightarrow$	$\begin{array}{c} e \\ \leftarrow \\ f \end{array}$
1 port element	$I \leftarrow$	$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{1/s} \\ \leftarrow \\ f \end{array}$	1 port element	$I \leftarrow$	$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{1/s} \\ \leftarrow \\ e \end{array}$
Integral causality	$C \leftarrow$	$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{1/s} \\ \leftarrow \\ f \end{array}$	Derivative causality	$C \leftarrow$	$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{Cs} \\ \leftarrow \\ e \end{array}$
1 port element	$R \leftarrow$	$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{R} \\ \leftarrow \\ f \end{array}$	1 port element	$R \leftarrow$	$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{R} \\ \leftarrow \\ e \end{array}$
2 port element	$\begin{array}{c} m \\ \leftarrow \\ \boxed{1/T} \\ \leftarrow \\ f_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} e_1 \rightarrow \\ \boxed{m} \\ \leftarrow \\ f_1 \\ \leftarrow \\ \boxed{m} \\ \leftarrow \\ f_2 \end{array}$	2 port element	$\begin{array}{c} r \\ \leftarrow \\ \boxed{1/GV} \\ \leftarrow \\ f_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} e_1 \rightarrow \\ \boxed{r} \\ \leftarrow \\ f_1 \\ \leftarrow \\ \boxed{r} \\ \leftarrow \\ f_2 \end{array}$
Transformer	$\begin{array}{c} m \\ \leftarrow \\ \boxed{1/T} \\ \leftarrow \\ f_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} e_1 \rightarrow \\ \boxed{m} \\ \leftarrow \\ f_1 \\ \leftarrow \\ \boxed{m} \\ \leftarrow \\ f_2 \end{array}$	Gyator	$\begin{array}{c} r \\ \leftarrow \\ \boxed{1/GV} \\ \leftarrow \\ f_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} e_1 \rightarrow \\ \boxed{r} \\ \leftarrow \\ f_1 \\ \leftarrow \\ \boxed{r} \\ \leftarrow \\ f_2 \end{array}$
Signal line	$1 \rightarrow 1$	$f_1 \rightarrow f_2$	Signal line	$1 \rightarrow Sf$	$f_1 \rightarrow f_1(Sf)$
	$0 \rightarrow 0$	$e_1 \rightarrow e_2$		$0 \rightarrow Sc$	$e_1 \rightarrow e_1(Sc)$
1-junction	$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{1} \\ \downarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{1} \\ \downarrow \\ f \end{array}$	0-junction	$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{0} \\ \downarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{0} \\ \downarrow \\ e \end{array}$

Fig.1 Element comparison with bond graph and block diagram

흐름변수에 대한 출력측의 작력·흐름변수의 비로서 블록선도에서는 이득의 형태로 나타내었다. 자이레이터(Gyrator)는 입력측의 작력·흐름변수에 대한 출력측의 대응변수의 비로서 나타내었다. 신호선(Signal Line)은 1 접점에서의 공통흐름과 0 접점에서의 공통작력의 값을 나타내는 것으로서 한 접점에서의 변수값을 다른 소자 및 접점에서 참조할 수 있게 하는 역할을 한다. 표현법으로는 본드그래프와 블록선도에서 모두 하나의 화살표로 표시되며, 수치적으로는 입력측의 공통변수의 값을 가지게 된다. 신호선이 작력원 또는 흐름원에 연결되는 경우에는 그 변수에 대해 원천이 되는 값을 제공함을 의미한다. 소자간의 에너지흐름을 표현하는 접점(Junction)의 경우 화살표와 부호를 제외한 기본적인 형태만을 나타내었고 본드그래프의 특성에 의해 1 접점의 경우 공통흐름변수를 분기점으로, 상대작력변수를 합산점으로 나타내었고, 0 접점의 경우 공통작력변수를 분기점으로, 상대흐름변수를 합산점으로 나타내었다.

Fig.2에는 1 접점과 0 접점에 대해 접점의 출력변수의 반화살표의 방향에 따른 본드그래프와 블록선도의 부호표기법을 비교하였다. Fig.2(a)의 ①과 ②의 본드그래프는 모두 ③의 블록선도와 같이 표현할 수 있으며 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다. 그러나 식 (1)과 블록선도 ③에서 알 수 있듯이 공통변수인 흐름은 분기점으로 나타나게 되므로 부호와는 무관하나, 작력의 경우 입력과 출력의 반화살표 방향에 따라 부호를 가지게 된다. 즉 출력인 본드 1과 같은 방향으로

에너지가 흐르는 본드 2는 양의 값을 가지게 되나, 출력과 반대방향인 본드 3의 경우 음의 값을 가지게 된다. 여기에서 접점에 연결되어 있는 모든 본드의 화살표방향을 동시에 반대로 하여도 수식이나 블록선도상에서는 동일하기 때문에 본 연구에서는 본드그래프의 출력부의 반화살표를 양의 값이 되는 ①과 같은 방향으로 설정하였다. Fig.2 (b)의 경우는 식 (2)와 같이 표현할 수 있으며, 출력단의 흐름변수의 방향에 따라 부호가 정해지게 되므로 본 연구에서는 ①의 방향을 기준으로 본드그래프를 설정하였다.

$$1 \text{ 접점: } f_1 = f_2 = f_3, \quad e_1 = e_2 - e_3 \quad (1)$$

$$0 \text{ 접점: } e_1 = e_2 = e_3, \quad f_1 = f_2 - f_3 \quad (2)$$

### 3. 메이슨의 공식을 이용한 전달함수 유도법

메이슨의 공식은 블록선도로 표현된 시스템에 대해 입출력간의 전달함수를 구하기 위한 방법으로서 복잡한 시스템의 경우라도 절차에 따라 체계적으로 입출력간의 전달함수를 구할 수 있는 특징을 가지고 있다. 이 방법은 이미 공인된 방법으로서 널리 사용되고 있으므로 본 연구에서는 이에 대한 증명은 하지 않고 그 적용을 위한 방법론만을 다루었다. 메이슨의 공식에서는 루프(Loop)와 경로(Path)라는 두 가지 중요한 용어가 정의된다. 루프는 하나의 분기점에서 출발하여 동일한 합산점을 2회 이상 통과하지 않고 다시 원래의 분기점으로 돌아옴으로서 환형을 구성하는 선을 의미한다. 또한 경로는 전달함수를 구하기 원하는 입력변수와 출력변수사이의 에너지전달경로를 의미하고 있으며, 도식적으로는 입력변수에서 출발하여 에너지흐름을 나타내는 화살표를 따라 진행하여 출력변수에 도달할 때까지의 선을 나타낸다.

메이슨의 공식에서의 총전달함수  $G(s)$ 는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

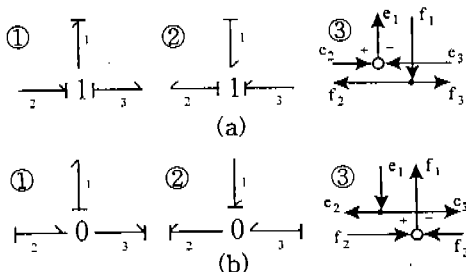


Fig.2 Representation rule of half arrow direction for 1- and 0-junction

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{k=1}^n g_k(s) \Delta_k(s) \quad (3)$$

여기서

$$\Delta(s) = 1 - \sum_m P_{m1} + \sum_m P_{m2} - \sum_m P_{m3} + \dots \quad (4)$$

$k$  : 경로의 인덱스

$n$  : 경로의 개수

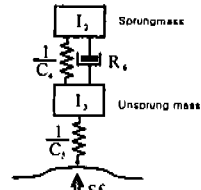
$g_k(s)$  :  $k$ 번째 경로상의 전달함수들의 곱

$\Delta_k(s)$  :  $k$ 번째 경로와 접하지 않는 루프에 대해 구해진  $\Delta(s)$

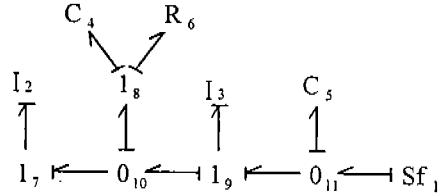
총전달함수의 분모부분인  $\Delta(s)$ 에 대한 식에서  $m$ 은 루프의 개수를 의미하고,  $P_{m1}$ 은  $m$ 번째 루프상의 전달함수의 곱,  $P_{m2}$ 은 서로 접하지 않는 2개의 루프상의 전달함수의 곱,  $P_{m3}$ 은 서로 접하지 않는 3개의 루프상의 전달함수의 곱을 나타낸다.  $\Delta_k(s)$ 는  $m$ 개의 루프 중에서  $k$ 번째 경로와 접하지 않는 루프만을 구하여  $\Delta(s)$ 와 같은 형태로 구성한 값으로서 이와 같이 메이슨의 공식에서는 경로와 루프를 구함으로써 원하는 입출력간의 전달함수를 체계적으로 구할 수 있다.

본드그래프에 대해 메이슨의 공식을 적용시키기 위한 방법을 실제 시스템을 예를 들어 설명하면 다음과 같다. 예제로서는 노면에서 진동을 받고 있는 1/4 차량의 모델을 사용하였고, Fig. 3(a)와 같다. 차량의 관성항은 스프링상 질량  $I_2$ 와 스프링하 질량  $I_3$ 으로 구성되며, 두 질량사이에는 완충기의 역할을 하는  $C_4$ 소자와 감쇠기  $R_6$ 소자를 정의하였다. 타이어는 스프링  $C_5$ 소자로 모델링하였으며, 노면에서의 진동은 흐름원  $Sf_1$ 으로 나타내었다. 구하고자 하는 전달함수는 노면의 속도 입력력에 대해 스프링하 질량에서의 속도 출력에 대한 전달함수로 설정하였다.<sup>7)</sup> 본 시스템은 Fig. 3(b)와 같은 본드그래프로 나타낼 수 있으며 이것은 Fig.1의 변환표에 의해 Fig.3(c)와 같이 블록선도로 나타낼 수 있다. 이 때 합성점에서의 부호는 2장에서 정의한 것을 따른다. Fig.3(c)는 Fig.3(d)와 같이 기하학적인 위치만을 변환시켜 표현함으로써 블록선도상의 변화 없이 보다 용이하게 메이슨의 공식을 적용할 수 있다.

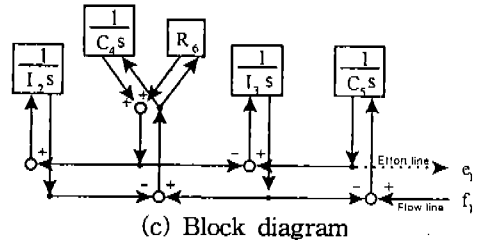
본 시스템은 Fig.3(d)와 같이 총 5개의 루프를 가지고 있고 각 루프상의 전달함수의 곱을



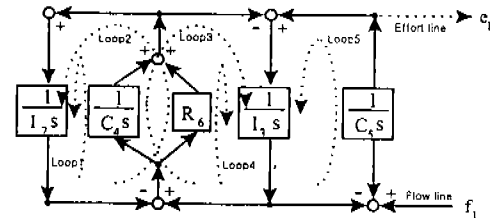
(a) Schematic diagram



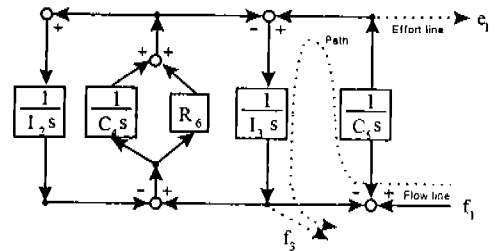
(b) Bond graph model



(c) Block diagram



(d) Block diagram with loop



(e) Block diagram with path

Fig.3 Conversion process of bond graph to block diagram

구하면 다음과 같다.

$$P_{11} = -\frac{1}{I_2 C_4 s^2}, \quad P_{21} = -\frac{R_6}{I_2 s}$$

$$P_{31} = -\frac{1}{I_3 C_4 s^2}, \quad P_{41} = -\frac{R_6}{I_3 s},$$

$$P_{51} = -\frac{1}{I_3 C_5 s^2}, \quad P_{12} = \frac{1}{I_2 I_3 C_4 C_5 s^4},$$

$$P_{22} = \frac{R_6}{I_2 I_3 C_5 s^3}$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{1}{I_2 C_4 s^2} + \frac{R_6}{I_2 s} + \frac{1}{I_3 C_4 s^2} + \frac{R_6}{I_3 s}$$

$$+ \frac{1}{I_3 C_5 s^2} + \frac{1}{I_2 I_3 C_4 C_5 s^4} + \frac{R_6}{I_2 I_3 C_5 s^3}$$

$$G(s) = \frac{f_3(s)}{f_1(s)} = \frac{1 + C_4 R_6 s + I_2 C_4 s^2}{1 + C_4 R_6 s + (I_2 C_4 + I_2 C_5 + I_3 C_5) s^2 + C_4 C_5 R_6 (I_2 + I_3) s^3 + I_2 I_3 C_4 C_5 s^4}$$

메이슨의 공식은 이상과 같이 블록선도에 대해 체계적인 순서에 따라 원하는 입출력간의 전달함수를 구할 수 있는 방법을 제공한다. 그러나 Fig.3에서 알 수 있듯이 본드그래프를 해석하는 과정에서 (c), (d)와 같은 추가의 블록선도로 변환시켜야 하므로 시간과 노력 면에서 다소 비효율적이며, 도식적인 방식을 통하여 해석이 가능한 본드그래프의 장점이 저감되게 된다. 그러므로 본 연구에서는 (c)와 (d)를 구하지 않고 (b)의 본드그래프에서 직접적으로 메이슨의 공식을 적용할 수 있는 방법에 대하여 제안하였다.

#### 4. 도식적인 방법을 이용한 전달함수의 직접유도법

일반적으로 본드그래프를 블록선도로 변환시킬 때 Fig.4와 같은 3가지 유형으로 분류될 수 있다. 이 때 신호선이 포함되는 경우에는 더욱 복잡한 양상을 보이게 되므로 본 연구에서는 순수한 본드그래프로 구성된 형태만을 살펴보고, 신호선이 있는 경우라도 제안된 방법에 의해 적용가능하다. Fig.4(a)는 하나의 접점에 있는 두 개의 소자에서 루프가 형성되는 경우, (b)는 두 개의 인접한 접점에서 루프가 형성되는 경우, 또

또한 입력인  $Sf_1$ 에 대한 스프링상 질량  $I_3$ 의 속도 출력에 대한 에너지전달경로는 Fig.3 (e)와 같이 하나의 경로가 있고 이들 경로는 모두 각 루프와 공통부분을 가지고 있으므로 경로상의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$g_1(s) = \frac{1}{I_3 C_5 s^2}, \quad \Delta_1(s) = 1 + \frac{1}{I_2 C_4 s^2} + \frac{R_6}{I_2 s}$$

그러므로 구하고자 하는 총전달함수는 식 (3)을 적용하면 다음과 같고 이 결과는 참고문헌을 통하여 검증받을 수 있다.

한 (c)는 2포트소자에 의해 여러 접점에 걸쳐 루프가 형성되는 경우이다. Fig.4 (a)-(c)를 통하여 알 수 있듯이 모든 경우 흐름선이나 작력선 하나만으로는 루프가 성립되지 않으며, 끝단에 두 개의 단포트소자들이 존재하고 있어 작력입력을 흐름출력으로 또는 흐름입력을 작력출력으로 변환하는 기능을 함으로서 루프가 성립됨을 알 수

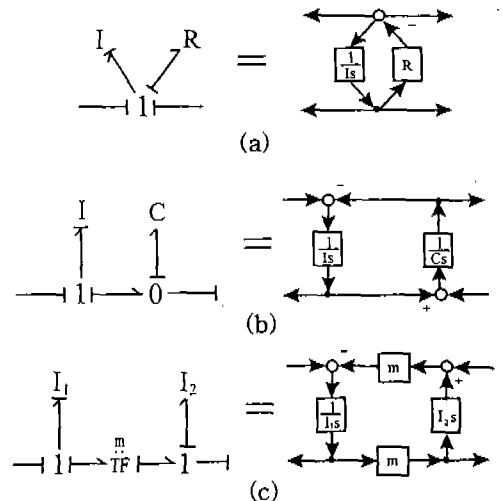


Fig.4 Various bond graph converted to loop of block diagram

있다. 즉 순수한 본드그래프만으로 구성된 시스템의 경우 일반적으로 루프는 단포트소자1-작력선-단포트소자2-흐름선-단포트소자1의 형태로 성립된다. 물론 그 사이에 자이레이터나 트랜스포머로 인하여 몇 개의 작력선이나 흐름선과 이득(gain)이 있을 수는 있으나 항상 끝단에는 하나씩의 단포트소자 2개가 존재하게 된다. 트랜스포머의 경우 끝단에 위치할 수 없고 흐름선사이 또는 작력선사이에 존재하는 이득의 역할 밖에는 하지 못한다.

루프(Loop)를 본드그래프상에서 도식적으로 직접 구하기 위해서는 흐름선과 작력선을 나타내는 스트로크의 형태를 통합으로서 가능하다. 즉 접점에서 스트로크가 붙어있는 본드는 흐름선을 나타내고, 스트로크가 반대편에 붙어있는 본드는 작력선을 나타내므로 이것을 이용하여 루프를 찾아내게 된다. 본 시스템의 경우 Fig.5(a)와 같이 5개의 루프를 가지고 있고 이것은 Fig.3(d)와 같은 결과를 나타낸다. 이때 흐름선이나 작력선 단독으로 사용된 흐름원 및 작력원은 루프를 형성할 수 없으므로 제외시켰다. 각 루프는 아래와 같이 나타낼 수 있으며, 여기서 흐름선은 “—”으로, 작력선은 “= ”으로 표시하였고, 표기법상의 혼동을 방지하기 위하여 접점에서 출발하

였다. 또한 표기법의 단순화를 피하기 위하여 루프와 같이 동일한 선이 중복되어 진행되는 경우 양단화살표를 이용하여 끝단이 되는 소자까지의 루프를 표시한다.

- 루프 1 : ⑦=(I<sub>2</sub>)—⑦—⑩—⑧—(C<sub>4</sub>)=⑧—⑩—⑦
- 루프 2 : ⑦=(I<sub>2</sub>)—⑦—⑩—⑧—(R<sub>6</sub>)=⑧—⑩—⑦
- 루프 3 : ⑨=(I<sub>3</sub>)—⑨—⑩—⑧—(C<sub>4</sub>)=⑧—⑩—⑨
- 루프 4 : ⑨=(I<sub>3</sub>)—⑨—⑩—⑧—(R<sub>6</sub>)=⑧—⑩—⑨
- 루프 5 : ⑨=(I<sub>3</sub>)—⑨—⑪—(C<sub>5</sub>)=⑪—⑨

다음으로 본드그래프상에서 입출력간의 경로(Path)는 입력변수가 작력변수일 경우 작력선을 따라, 흐름변수일 경우 흐름선을 따라 출력변수까지 진행되는 선을 찾음으로서 구할 수 있다. Fig.5(b)에서 알 수 있듯이 노면입력 Sf<sub>1</sub>에서부터 스프링하 질량의 속도출력 f<sub>3</sub>까지에는 하나의 경로가 있으며 이것은 Fig.3(e)의 경로와 완전히 일치하는 결과를 보여준다.

$$\text{경로 : Sf}_1\text{—⑪—(C}_5\text{)=⑪—⑨=(I}_3\text{)—(f}_3\text{)}$$

루프 및 경로상의 전달함수에 대한 부호는 루프상의 -부호의 개수에 의해 좌우되며 n개의 (-) 부호가 있을 경우 전체 전달함수의 부호는 (-1)<sup>n</sup> 이 된다. 이 때 본드그래프상의 부호는 1 접점에서 작력변수의 합산, 0 접점에서 흐름변수의 합산 부위에서만 발생하며, 트랜스포머나 자이레이터와 같은 2포트소자의 경우는 작력이나 흐름의 합산 부분이 없이 단지 이득으로만 표시되므로 부호결정과는 관계없다. 루프상의 전달함수는 Fig.6(a)~(c)의 경우와 같이 각 접점간의 반화살표의 방향과 상관없이 항상 (-)가 됨을 알 수 있다. 이것은 하나의 접점에서 (+)부호를 가질 경우 인접한 다른 접점에서는 (-)부호를 가지게 되므로 전체적인 루프의 부호는 (-)가 되는 것이다. 또한 경로상의 전달함수에 대한 부호규약에서 대해 본드 그래프 ①에서 살펴보면 입력본드 2에서는 (+)부호가 되지만 입력본드 3에서는 (-)부호가 된다. 이것은 본드그래프상에서 1 접점에서 작력변수를 합산할 때와 0 접점에서 흐름변수를 합산할 때

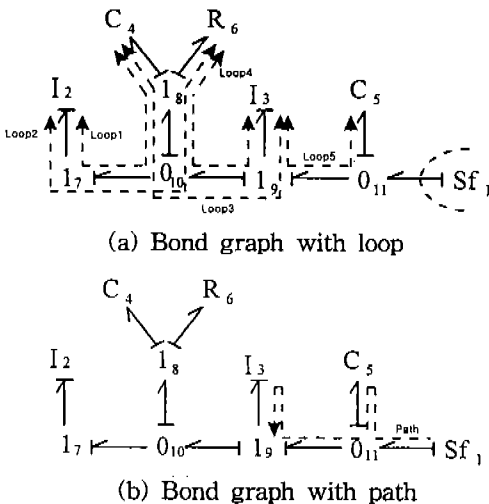


Fig.5 Example of transfer function induction method

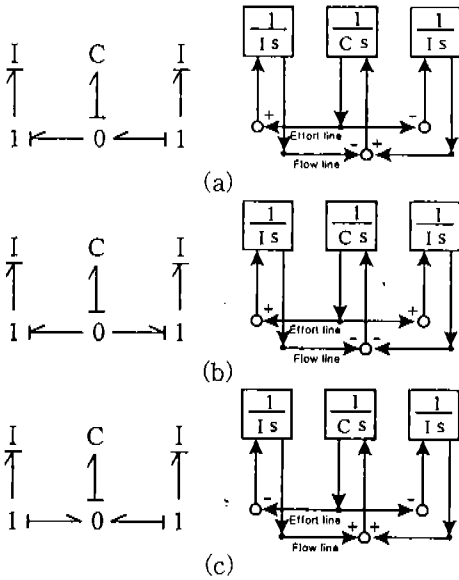


Fig.6 Comparison of block diagram according to half arrow direction of bond graph

화살표의 방향이 바뀌면 그 접점에서 (-)부호를 가지게 되고, 화살표가 바뀌지 않으면 (+)부호가 됨을 알 수 있다. 이것은 신호선을 포함하는 경우에도 마찬가지로 적용할 수 있다.

이상과 같이 제안된 메이슨의 공식을 이용한 본드그래프의 전달함수 유도법에 대하여 정리하면 다음과 같다.

- 1) 본드그래프에서 블록선도의 루프에 해당하는 부분을 찾는다. 이 때 작력원과 흐름원은 무시하며 각 접점에서 작력선 또는 흐름선을 따라 출발하여 단포트소자, 2포트소자 등을 거쳐 원래의 접점에 출발때와 같은 선으로 연결될 때 루프가 형성된다.
- 2) 검색된 루프에 대해 루프상의 전달함수를 이용하여  $\Delta(s)$ 를 계산한다. 전달함수의 부호는 1 접점에서 작력변수의 입력과 출력사이, 0 접점에서 흐름변수의 입력과 출력사이의 반화살표방향으로 결정되며 루프에 (-)부호가 홀수개이면 전달함수의 부호는 (-), 짝수개이면 (+)가 된다.
- 3) 입력변수와 출력변수에 대한 경로를 찾아  $g_k(s)$ 를 구한다. 경로의 부호에 대해서도 루프의 부호법칙을 따른다. 각 경로에 대하여

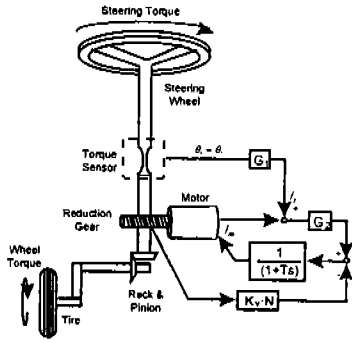
이들 경로와 공통부분이 없는 루프만을 취하여  $\Delta_k(s)$ 를 구한 다음 전체적인 전달함수를 계산한다.

## 5. 전동조향장치에 대한 적용에

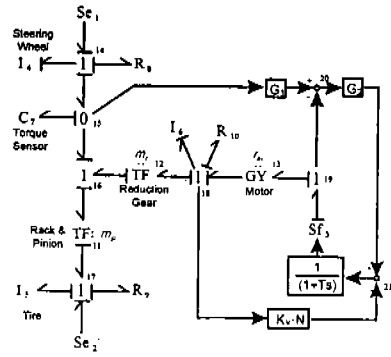
본 장에서는 앞에서 제안한 전달함수유도법이 실제 계와 같은 다소 복잡한 계에 대한 본드그래프에서도 입출력간 전달함수를 도식적으로 간편하고 체계적으로 유도할 수 있음을 실증하기 위하여 전동조향장치에 적용하였다.<sup>8,9)</sup> 전동조향장치는 운전자의 조종력에 조력을 주기 위하여 토크센서의 조향각도, 전동기의 회전속도 및 전동기의 입력전류에 따라 컨트롤러에서 제어신호를 보내고, 이 신호에 의해 스티어링축에 기어로 연결된 전동기를 구동하는 시스템이다. Fig. 7(a)에 시스템의 개략도를 나타내었고 Fig.7(b)에 이 시스템에 대한 본드그래프 모델을 나타내었다. 여기서  $N$ :모터회전수,  $K_v$ :제어상수,  $G_1, G_2$ :보정회로계수,  $T$ :시정수를 나타내고 있다. 본 시스템에서 구하고자 하는 전달함수는 스티어링의 조향력 입력에 대한 타이어의 조향속도출력 전달함수 및 도로상에서 발생하는 외란입력에 대한 스티어링휠 조향속도출력 전달함수이다.

본 시스템은 Fig.7(c)와 같이 9개의 루프를 가지고 있으며 작력선은 "=", 흐름선은 "-", 신호선은 "→"로 나타내었다. 루프를 구성하는데 영향을 미치지 않는 작력원과 흐름원은 제외시켰다.

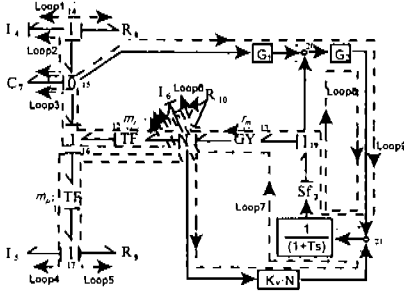
- 루프 1 : ⑭→(I<sub>4</sub>)→⑭→(R<sub>8</sub>)→⑭  
 루프 2 : ⑭→(I<sub>4</sub>)→⑭→⑮→(C<sub>7</sub>)→⑮→⑭  
 루프 3 : ⑮→(C<sub>7</sub>)→⑮→⑯→(m<sub>r</sub>)→⑱→(I<sub>6</sub>)→⑱→(m<sub>r</sub>)→⑯→⑮  
 루프 4 : ⑰→(I<sub>5</sub>)→⑰→(m<sub>p</sub>)→⑯→(m<sub>r</sub>)→⑱→(I<sub>6</sub>)→⑱→(m<sub>r</sub>)→⑯→⑰  
 루프 5 : ⑰→(R<sub>9</sub>)→⑰→(m<sub>p</sub>)→⑯→(m<sub>r</sub>)→⑱→(I<sub>6</sub>)→⑱→(m<sub>r</sub>)→⑯→⑰



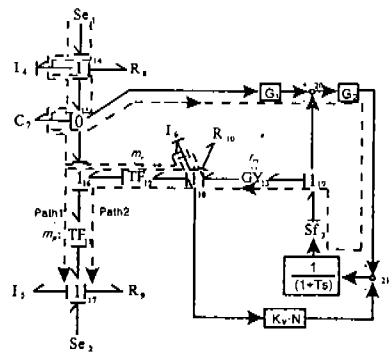
(a) Schematic diagram



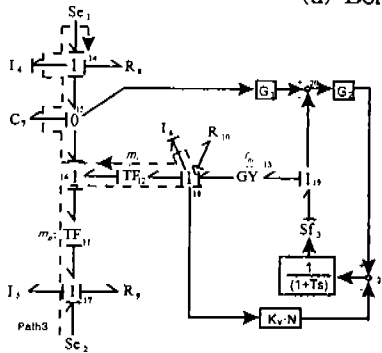
(b) Bond graph modeling



(c) Bond graph with loop



(d) Bond graph with path 1 & 2



(e) Bond graph with path 3

Fig.7 Example of electric power steering using transfer function induction method

루프 6 : ⑬—(I<sub>6</sub>)—⑭—(R<sub>10</sub>)—⑬

—(r<sub>m</sub>)—⑬—(I<sub>6</sub>)—⑭—(m<sub>r</sub>)—⑮

루프 7 : ⑬—(I<sub>6</sub>)—⑭—(K<sub>v</sub>·N)→⑳

⑮—(C<sub>7</sub>)—⑮—(G<sub>1</sub>)→㉑

→  $\frac{1}{(1+Ts)}$  → ③—⑱—(r<sub>m</sub>)—⑬

각 루프에 대한 전달함수는 다음과 같다.

루프 8 : ㉑→(G<sub>2</sub>)→㉑→  $\frac{1}{(1+Ts)}$  → ③—⑱→㉑

$T_1(s) = -\frac{R_8}{I_4 s}$ ,  $T_2(s) = -\frac{1}{I_4 C_7 s^2}$ ,

루프 9 : ㉑→(G<sub>2</sub>)→㉑→  $\frac{1}{(1+Ts)}$  → ③—⑱



$$T_3(s) = -\frac{m_r^2}{I_6 C_7 s^2}, \quad T_4(s) = -\frac{m_r^2 m_p^2 I_5}{I_6},$$

$$T_5(s) = -\frac{m_r^2 m_p^2 R_9}{I_6 s}, \quad T_6(s) = -\frac{R_{10}}{I_6 s},$$

$$T_7(s) = -\frac{K_v \cdot N}{1 + T_s} \frac{r_m}{I_6 s}, \quad T_8(s) = -\frac{G_2}{1 + T_s},$$

$$T_9(s) = -\frac{G_1 G_2}{1 + T_s} \frac{m_r r_m}{I_6 C_7 s^2}$$

서로 접하지 않는 2개의 루프는 (1-3), (1-4), (1-5), (1-6), (1-7), (1-8), (1-9), (2-4), (2-5), (2-6), (2-7), (2-8), (3-8), (4-8), (5-8), (6-8) 이고 서로 접하지 않는 3개의 루프는 (1-3-8), (1-4-8), (1-5-8), (1-6-8), (2-4-8), (2-5-8), (2-6-8)이고 서로 접하지 않는 4개이상의 루프는 없다. 그러므로 식 (4)에 의해 총전달함수의 분모 부분을 구하면 다음과 같다.

$$\Delta(s) = \frac{(1 + C_7 R_8 s + I_4 C_7 s^2) \{ r_m (K_v \cdot N) + (1 + G_2 + T_s) [ R_{10} + m_r^2 m_p^2 (R_9 + I_5 s) + I_6 s ] \}}{(1 + T_s) I_4 I_6 C_7 s^3} + \frac{G_2 m_r^2 + (G_1 G_2 r_m + m_r) m_r I_4 s + (m_r^2 T I_4 + I_6 C_7 R_8) s^2 + I_4 I_6 C_7 s^3}{(1 + T_s) I_4 I_6 C_7 s^3}$$

Fig.7(d)에는 스티어링 조향력 입력에 대한 타이어의 조향속도출력의 전달함수( $f_{17}/e_1$ )를 구하기 위한 2개의 경로를 보여주고 있으며 아래와 같이 제안된 절차에 따라 전달함수를 구할 수 있다.

경로 1 : (e<sub>1</sub>) → ⑭ → (L<sub>4</sub>) → ⑭ → (C<sub>7</sub>) → ⑮ → ⑯ → (m<sub>r</sub>) → ⑱ → (L<sub>6</sub>) → ⑱ → (m<sub>r</sub>) → ⑲ → (m<sub>p</sub>) → (f<sub>17</sub>)

경로 2 : (e<sub>1</sub>) → ⑭ → (L<sub>4</sub>) → ⑭ → (C<sub>7</sub>) → ⑮ → (G<sub>1</sub>) → ⑳ → (G<sub>2</sub>) → ㉑ →  $\frac{1}{(1 + T_s)}$  → ⑳ → ⑲ → (r<sub>m</sub>) → ⑱ → (L<sub>6</sub>) → ⑱ → (m<sub>r</sub>) → ⑲ → (m<sub>p</sub>) → (f<sub>17</sub>)

$$g_1(s) = \frac{m_r^2 m_p}{I_4 I_6 C_7 s^3},$$

$$g_2(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + T_s} \frac{r_m m_r m_p}{I_4 I_6 C_7 s^3},$$

$$\Delta_1(s) = 1 + \frac{G_2}{1 + T_s}, \quad \Delta_2(s) = 1$$

전달함수

$$\frac{f_{17}}{e_1}(s) = \frac{g_1(s) \Delta_1(s) + g_2(s) \Delta_2(s)}{\Delta(s)}$$

$$= \frac{(m_r + m_r G_2 + G_1 G_2 r_m) m_r m_p + m_r^2 m_p T_s}{(1 + T_s) I_4 I_6 C_7 s^3 \Delta(s)}$$

또한 Fig.7(e)에는 도로상에서 발생하는 외란 입력에 대한 스티어링휠 조향속도출력 전달함수 ( $f_{15}/e_2$ )를 구하기 위한 1개의 경로를 보여주고 있으며 아래와 같은 절차를 이용하여 전달함수를 구할 수 있음을 보여주고 있다.

경로 3 : (e<sub>2</sub>) → (m<sub>p</sub>) → ⑰ → (m<sub>r</sub>) → ⑱ → (L<sub>6</sub>) → ⑱ → (m<sub>r</sub>) → ⑲ → ⑮ → (C<sub>7</sub>) → ⑮ → ⑭ → (L<sub>4</sub>) → ⑭ → (f<sub>15</sub>)

$$g_3(s) = \frac{m_r^2 m_p}{I_4 I_6 C_7 s^3}, \quad \Delta_3(s) = 1 + \frac{G_2}{1 + T_s}$$

전달함수

$$\frac{f_{15}}{e_2}(s) = \frac{g_3(s) \Delta_3(s)}{\Delta(s)} = \frac{(1 + G_2 + T_s) m_r^2 m_p}{(1 + T_s) I_4 I_6 C_7 s^3 \Delta(s)}$$

이와같이 전달함수 직접유도법을 이용하여 전

동 파워스티어링과 같은 기계계, 전기계 및 제어기 등으로 이루어진 복잡한 계에 대해서도 직접 도식적인 특징을 이용하여 본드그래프상에서 전달함수를 체계적으로 유도할 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 전달함수의 도식적인 유도법에 대한 이론을 제안하는 것과 실제 적용상의 효용성을 파악하는데 초점을 맞추었으므로 이들 시스템에 대한 수치적인 결과는 다루지 아니하였다.

## 6. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 복합계의 해석에 효과적인 본드그래프모델에 대하여 블록선도와의 상사성과 메이슨의 공식을 이용하여 본드그래프상에서 직접적으로 입출력간 전달함수를 체계적으로 구할 수 있는 방법을 제시하였고 1/4 차량에 대한 해석을 통해 검증하였다.
- 2) 제시된 전달함수유도법은 본드그래프의 장점인 도식적인 표현기법을 최대한 활용함으로써 설계자에게 해석하고자 하는 시스템의 에너지전달경로 및 영향을 미치는 각종 파라미터에 대한 직접적인 정보를 제공할 수 있다.
- 3) 기계계, 전기계 및 제어기 등 복합계로 구성된 전동파워스티어링의 예제를 통하여 해석이 다소 복잡한 계에 대해서도 효과적으로 이용할 수 있음을 알 수 있었으며 이를 이용하여 최적설계나 감도해석 문제해결시 설

계자의 시간 및 노력을 절감시킬 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. 김태욱, "벡터합성법과 감도해석을 이용한 차실 소음 저감에 관한 연구", 한양대학교, 석사학위논문, 1995.
2. 최상렬, "감도해석법을 이용한 엔진 마운트계의 동특성 규명 및 개선", 한양대학교, 석사학위논문, 1992.
3. 오재용, "동적시스템해석", 동명사, 1994.
4. Karnopp D., Margolis D. L. and Rosenberg R.C., "System Dynamics - A Unified Approach", John Wiley, 1990.
5. P. C. Breedveld, "A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System", Journal of the Franklin Institute, Vol. 318, No. 2, pp 71~75, 1984.
6. J. U. Thoma, "Introduction to Bond Graphs and Their Applications", Pergamon Press, 1975.
7. J. L. Shearer, A. T. Murphy and H. H. Richardson, "Introduction to System Dynamics", Addison Wesley, 1971.
8. 우덕현, "Dynamic Behavior of a Velocity-Boost Steering System Dynamics", 차체, 차량동력학부문 학술강연초록집, 한국자동차공학회, 1996.
9. Shun'ichi W. and Tadayuki H., "An Electric Power-Steering System for Automobiles", Mitsubishi Electric ADVANCE, 1990.