

유한차분 시간영역법을 사용한 도파관 불연속 해석을 위한 1차원 모드 PML

1-D Modal PML for Analysis of Waveguide Discontinuities Using the FDTD Method

정경영* · 천정남** · 김형동***

Kyoung-Young Jung* · Jeong-Nam Chen** · Hyeong-Dong Kim***

요 약

PML(Perfectly Matched Layer)은 넓은 주파수 대역에서 우수한 흡수 성능을 나타내므로 분산 특성이 강한 도파관 구조에 적합한 흡수경계조건이다. 본 논문에서는 기존의 PML의 계산 효율을 향상시키기 위해 새로운 알고리즘을 제안한다. 제안된 방법은 입/출력 포트의 한 면에서 필드를 모드로 전개한 후, 모드에 따라 흡수 경계조건을 적용한다. 제안된 방법은 1차원으로 계산 영역을 해석하므로 메모리와 계산 시간이 절약된다. 두께가 두꺼운 비대칭 아이리스를 갖는 WG-90 구형도파관을 기존의 PML과 본 논문에서 제안한 1차원 모드 PML을 적용하여 유한차분 시간영역법으로 해석을 한다. 제안된 방법의 계산 효율이 매우 뛰어나를 수치 계산을 통해 알 수 있다.

Abstract

The Perfectly Matched Layer(PML) provide good performance in absorption over a wide frequency range and is an appropriate ABC for waveguides with high dispersion. In this paper, a novel algorithm is proposed to improve the computational efficiency of the PML. In the input and output ports, the fields are decomposed into a series of modes, and then an appropriate ABC is applied to each mode. CPU time and memory storage requirements are greatly reduced, since the computational region is analyzed in one dimension. A WG-90 rectangular waveguide with a thick asymmetric iris is analyzed by Finite-Difference Time-Domain(FDTD) simulations with the conventional PML and the proposed one-dimensional (1-D) PML. Numerical results show that the computational efficiency is significantly improved by the proposed method.

「본 연구는 정보통신부 한양대학교 1998년도 정보통신 분야 우수학교 지원사업으로 이루어졌음.」

*현대전자 이동통신 단말기 연구소(Mobile Telecommunications Terminal Division, Hyundai Electronics Co., Ltd.)

**한양대학교 전파공학과(Dept. of Radio Science and Engineering, Hanyang University)

***한양대학교 전자전기공학부(School of Electrical & Computer Engineering, Hanyang University)

· 논문 번호 : 980703-062

· 수정완료일자 : 1998년 9월 2일

I. 서 론

FDTD^[1]는 Maxwell의 Curl 방정식을 직접 이산화하므로, 복잡하고 다양한 구조를 모델링하기가 용이하다. 또한 한 번의 시뮬레이션으로 매우 넓은 주파수 대역의 특성을 알 수 있기 때문에 스퀘터링, 안테나, 마이크로스트립, 도파관 문제 등 전자기학적 상호작용 문제를 푸는데 매우 많이 적용되고 있다. 그러나 컴퓨터의 메모리가 제한되어 있으며, 또 정확한 해를 얻기 위해서는 좋은 흡수 성능을 나타내는 흡수경계조건(Absorbing Boundary Condition, ABC)이 필수적이다. 1980년대 이후로 많은 종류의 ABC가 개발되어 왔으며, 현재는 넓은 주파수 대역에서 흡수 성능이 매우 뛰어난 Berenger's PML(Perfectly Matched Layer)^[2]이 널리 사용되고 있다.

하지만 Berenger에 의해 제안된 PML은 감쇄 모드에 대해서는 효과가 없으므로^[3], 감쇄 모드의 크기가 충분히 감소되도록 불연속 영역으로부터 PML 영역의 마지막 셀까지의 거리를 충분히 멀게 하여야 하며, 또한 매질 내에서의 필드를 인위적으로 쪼개어 계산하므로 상당량의 메모리와 계산 시간이 필요하다.

본 논문에서는 기존의 PML이 가지고 있는 이러한 문제를 해결하기 위하여 새로운 방법을 제안하고자 한다. 본 논문에서는 모드에 따라 적절한 흡수경계조건을 적용하여, 계산 영역을 3차원이 아닌 1차원으로 해석함으로써 메모리와 계산 시간을 획기적으로 줄인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 기존의 PML의 문제점을 해결하기 위한 새로운 방법으로, 시간영역 모드 전개 방법과 1차원 모드 PML을 제시한다. 3장에서는 두께가 두꺼운 비대칭 아이리스를 갖는 WG-90 구형도파관 구조에 대하여 본 연구에서 제시한 방법과 기존의 PML을 적용하여 계산 효율을 비교한다.

II. 해석방법

본 논문에서는 도파관 구조에 FDTD를 적용할 경우, 흡수경계조건 계산 효율을 개선시키기 위해 그림 1과 같이 모드에 따라 적절한 흡수경계조건을 적용한다. 먼저 입/출력 포트의 임의의 한 면에서 모드를 전개한다. 불연속이 존재하지 않는 도파관 영역에서 전개된 모드는 서로 독립적으로 진행하므로, 각 모드에 따라 1차원 모드 FDTD로 계산을 한 후, 전파 모드에 대해서는 본 논문에서 제안하는 1차원 모드 PML을 적용하며, 감쇄 모드에 대해서는 1차원 모드 FDTD 계산 영역(1차원 균일 전송선의 길이)을 충분히 길게 선택한 후 완전 도체 조건을 적용한다. 이와 같이 입/출력 포트의 한 면에서 필드를 모드로 전개한 후, 각 모드에 따라 적절한 흡수경계조건을 적용하면, 계산 영역이 3차원이 아닌 1차원으로 되므로 계산 효율이 엄청나게 향상된다.

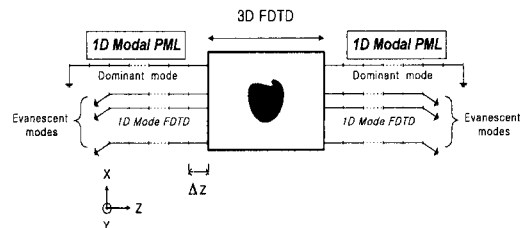


그림 1. PML의 계산 효율을 증가시키기 위한 제안된 알고리즘

Fig. 1. Proposed algorithm to improve the computational efficiency of the PML.

2-1 시간영역 모드 전개와 1차원 모드 FDTD

임의의 단면을 갖는 균일한 매질로 채워진 도파관은 주파수에 관계없이 모드의 필드 분포가 일정하다. 그러므로 z 방향으로 진행되는 불연속이 없

는 도파관에 대하여 횡 방향 전계는 시간 영역에서 다음과 같이 여러 모드의 합으로 표현할 수 있다.

$$\vec{E}_i(x, y, z, t) = \sum_j V_j(z, t) \vec{e}_j(x, y) \quad (1)$$

위 식에서, V_i 은 i 번째 모드 크기(modal amplitude) 이고, \vec{e}_i 는 i 번째 모드의 횡 방향 전계 분포이다.

식 (1)에 \vec{e}_i 를 곱하고 적분한 후 모드의 직교 성질을 이용하면, i 번째 모드 크기는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_i(z, t) = \frac{\int_S \vec{E}_i(x, y, z, t) \cdot \vec{e}_i(x, y) dx dy}{\int_S |\vec{e}_i(x, y)|^2 dx dy} \quad (2)$$

여기서 S 는 도파관의 단면을 나타낸다.

식 (2)는 시간영역 모드 전개(time domain modal expansion)식으로 도파관의 임의의 한 면에서 3차원 계산 영역의 필드를 1차원 계산 영역의 모드로 전개하는데 필요한 식이며, 식 (1)은 1차원 계산 영역의 모드를 3차원 계산 영역의 필드로 합성하는데 필요한 시간영역 모드 합성(time domain modal composition)식이다^[4].

한편, 소스가 없는 영역에 대해 벡터 파동 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (3)$$

위 식에서 횡 방향 성분만을 고려하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}_i = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_i \quad (4)$$

식 (1)을 식 (4)에 대입한 후 모드의 직교 성질을 이용하여 정리하면, i 번째 모드 크기 V_i 는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V_i(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V_i(z, t) - k_{ci}^2 V_i(z, t) = 0 \quad (5)$$

여기서, c 는 도파관 내의 빛의 속도, k_{ci} 는 i 번째 모드의 차단파수(cutoff wavenumber)를 나타낸다. 식 (5)를 중심차분법을 이용하여 이산화한 후 정리하면, 다음과 같은 차분 방정식을 구할 수 있다.

$$V_i^{n+1}(k) = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta z^2} [V_i^n(k+1) - 2 V_i^n(k) + V_i^n(k-1)] + (2 - c^2 \Delta t^2 k_{ci}^2) V_i^n(k) - V_i^{n-1}(k) \quad (6)$$

식 (6)은 i 번째 모드를 계산하는데 필요한 1차원 모드 FDTD(1-D mode FDTD)로, 3차원 계산영역 경계면에서 전개된 모든 모드에 대하여 적용하여야 한다^[5].

2-2 1차원 모드 PML

본 논문에서는 복소수 좌표 확장 기법(complex coordinate stretching technique)^[6]을 이용하여 모드를 흡수하기 위한 새로운 PML을 유도하였다. 확장된 좌표계(stretched coordinate system)에서의 맥스웰 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla_s \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (7a)$$

$$\nabla_s \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad (7b)$$

$$\nabla_s \cdot \epsilon \vec{E} = 0 \quad (8a)$$

$$\nabla_s \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (8b)$$

여기서 ∇_s 는 다음과 같다.

$$\nabla_s = \hat{x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (9)$$

식 (7)과 식 (8)을 이용하여 다음과 같은 PML 영역에서의 벡터 파동 방정식을 구할 수 있다.

$$\nabla_s^2 \vec{E} = (j\omega)^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad (10)$$

여기서 ∇_s^2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla_s^2 = & \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

한편 z 방향으로 전파하는 도파관에 대하여 흡수경계조건을 적용하는 경우, $s(s_x, s_y, s_z)$ 는 다음과 같이 선택되어야 한다.

$$s_x(z) = s_y(z) = 1 \quad (12a)$$

$$s_z(z) = 1 + \frac{\sigma(z)/\epsilon}{j\omega} \quad (12b)$$

식 (11)과 식 (12.a)를 이용하면 식 (10)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \vec{E} \\ = (j\omega)^2 \mu \epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (13)$$

모드에 대한 PML을 만들기 위해, 식 (13)에서 횡 방향 전계 성분만을 고려하고, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{E}_t = -k_c^2 \vec{E}_t$ 을 대입하면, 식 (13)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \left(-k_c^2 + \frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \vec{E}_t \\ = (j\omega)^2 \mu \epsilon \vec{E}_t \end{aligned} \quad (14)$$

위 식에서 횡 방향 전계를 모드로 전개한 후 모드의 직교 성질을 이용하면, 다음과 같은 주파수 영역에서의 모드에 대한 PML 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} -k_c^2 V(z, \omega) + \frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} V(z, \omega) \right) \\ = (j\omega)^2 \mu \epsilon V(z, \omega) \end{aligned} \quad (15)$$

실제 FDTD 시뮬레이션에 적용하기 위해서는 위 식을 차분 방정식으로 변환시켜야 한다. 이를 위해 먼저 새로운 변수를 도입하여 식 (15)를 다시 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$-k_c^2 V(z, \omega) + \phi(z, \omega) = \frac{(j\omega)^2}{c^2} V(z, \omega) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi(z, \omega) &= \frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, \omega) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sigma(z)/\epsilon}{j\omega}} \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, \omega) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \psi(z, \omega) &= \frac{1}{s_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} V(z, \omega) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sigma(z)/\epsilon}{j\omega}} \frac{\partial}{\partial z} V(z, \omega) \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16) ~ 식 (18)을 시간 영역으로 바꾼 후 중심차분법을 이용하여 정리하면, 다음과 같은 PML 영역에서의 모드에 대한 차분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V^{n+1}(k) &= c^2 \Delta t^2 \phi^n(k) \\ &+ (2 - c^2 \Delta t^2 k_c^2) V^n(k) - V^{n-1}(k) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \phi^n(k) &= \frac{1 - \alpha(k)}{1 + \alpha(k)} \phi^{n-1}(k) \\ &+ \frac{1}{[1 + \alpha(k)] \Delta z} [\psi^n(k+1/2) \\ &- \psi^{n-1}(k+1/2) - \psi^n(k-1/2) \\ &+ \psi^{n-1}(k-1/2)] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi^n(k+1/2) &= \frac{1-\alpha(k+1/2)}{1+\alpha(k+1/2)} \psi^{n-1}(k+1/2) \\ &+ \frac{1}{[1+\alpha(k+1/2)]\Delta z} [V^n(k+1) \\ &- V^{n-1}(k+1) - V^n(k) + V^{n-1}(k)] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 $\alpha(k) = \frac{\sigma(k)}{2\epsilon} \Delta t$ 을 나타낸다. 식 (19)~식 (21)은 전파 모드에 대한 흡수경계조건을 적용하기 위한 1차원 모드 PML(1-D Modal PML) 방정식이다.

본 논문에서 제안한 알고리즘을 구현하기 위한 순서도는 그림 2에 나타내었다. 보는 바와 같이 먼저 ψ^n 을 식 (21)을 통해 구한 후, ϕ^n 은 이미 구해진 $\psi^n, \psi^{n-1}, \phi^{n-1}$ 을 가지고 식 (20)을 통해 계산한다. 그리고 마지막으로 V^{n+1} 은 이미 구한 ϕ^n, V^n, V^{n-1} 을 가지고 식 (19)를 통해 구한다.

III. 수치해석 및 결과

본 논문에서 제안한 1차원 모드 PML의 흡수 성능을 시험하기 위해 WG-90 구형도파관(22.86 mm × 10.16 mm)에 대하여 반사 계수를 구하였다. 그림 3은 PML 층의 두께에 따른 반사 계수를 구한 것으로, 도전율의 증가 차수 n은 2로 선택하고, $R_{th} = 10^5$ 로 선택하였다. 보는 바와 같이 제안된 1차원 모드 PML은 매우 좋은 흡수 성능을 나타냄을 알 수 있다.

제안된 1차원 모드 PML의 정확성과 계산 효율의 우수성을 입증하기 위해 두께가 두꺼운 비대칭 아이리스를 갖는 WG-구형도파관에 대하여 기존의 PML과 1차원 모드 PML을 적용하여 FDTD 시뮬레이션을 하였다. 공간 스텝간격은 $\Delta x = 0.381$ mm, $\Delta y = 1.016$ mm, $\Delta z = 1$ mm로 선택하였으며, 시간 스텝 간격 $\Delta t \approx 0.95$ ps로, 시간 반복 회수는 4000으로 설정하였다. 입력 여기파는 정현파(중심주파수: 10.3 GHz)가 변조된 가우시안 펄스

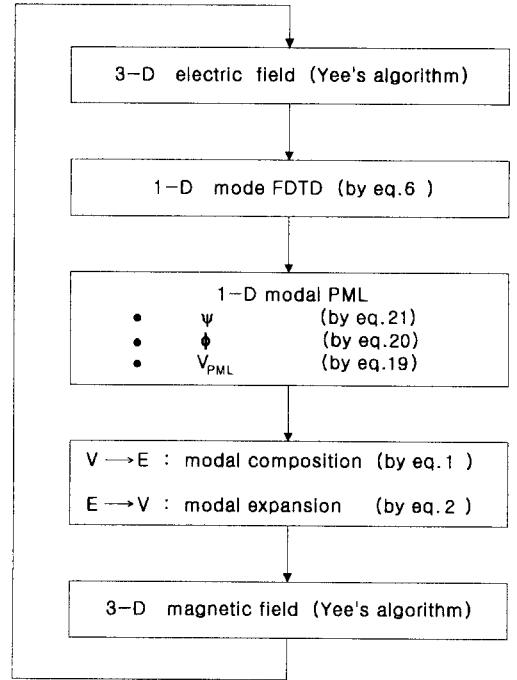


그림 2. 제안된 알고리즘을 구현하기 위한 순서도
Fig. 2. Procedure of the proposed algorithm.

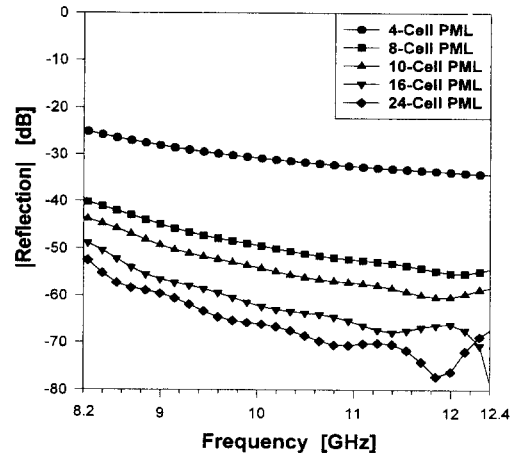


그림 3. WG-90 구형 도파관에 대한 1차원 모드 PML의 반사 계수

Fig. 3. Reflection coefficients from the 1-D modal PML for a WG-90 rectangular waveguide.

(1 % 전력 대역폭 4.2 GHz)로 선택하였다. 모든

FDTD 시뮬레이션은 엣지 조건(edge condition)^[7]을 적용하여 보다 정확한 계산 결과를 얻었다.

FDTD 해석을 위한 모델링은 그림 4와 같이 하였으며, 괄호 안의 숫자들은 FDTD에서 사용된 셀의 개수를 나타낸다. 기존의 PML의 경우, PML 층은 16 셀로 선택하였으며, 아이리스로부터 PML의 마지막 면에 존재하는 완전 도체까지의 거리가 약 $1.5 \lambda_{c, TE_{20}}$ 인 $34 \Delta z$ 가 되도록 선택하여 모든 감쇄 모드의 크기가 충분히 감소되도록 하였다. 제안된 1차원 모드 PML을 적용한 경우, TE_{10} , TE_{20} , TE_{30} 모드까지 3개의 모드를 고려하였으며, 주 모드(TE_{10} 모드)에 대해서는 16셀의 1차원 모드 PML을 적용하였고, 감쇄 모드(TE_{20} , TE_{30} 모드)에 대해서는 1차원 균일 전송선의 길이를 $16 \Delta z$ 로 선택한 후 완전 도체 조건을 적용하였다.

그림 5는 그림 4에 나타낸 구조의 산란 계수를 나타낸 것이다. 보는 바와 같이 기존의 PML과 본 논문에서 제안된 1차원 모드 PML을 적용한 경우 매우 잘 일치하며, 또한 모드 정합법을 통해 구한 결과와도 잘 일치함을 알 수 있다.

표 1은 기존의 PML을 적용한 경우와 본 논문에서 제안한 PML을 적용한 경우에 대하여 계산 효율을 비교한 것이다. 표 1을 통해 알 수 있듯이 제안된 1차원 모드 PML을 사용하면 계산 시간과 메모리가 상당히 줄어들게 됨을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 도파관 구조에 적합한 1차원 모드 PML을 유도하였다. 입/출력 포트의 한 면에서 필드를 모드로 전개한 후, 전파모드에 대해서는 1차원 모드 PML을 적용하였고, 감쇄모드에 대해서는 완전도체 조건을 적용하였다. 제안된 1차원 모드 PML을 이용하여 두께가 두꺼운 비대칭 아이리스를 갖는 WG-90 구형도파관을 FDTD로 해석하였다. 제안된 방법은 기존의 PML보다 계산 효율이 매우 뛰어나므로 도파관 구조에 매우 적합한 흡수

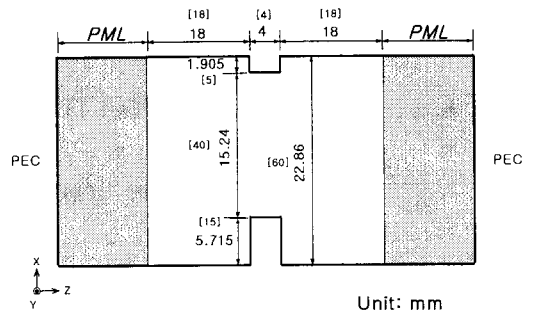


그림 4. 위에서 바라본 해석 구조/FDTD 모델링
Fig. 4. Top view of the analysis structure/FDTD modeling.

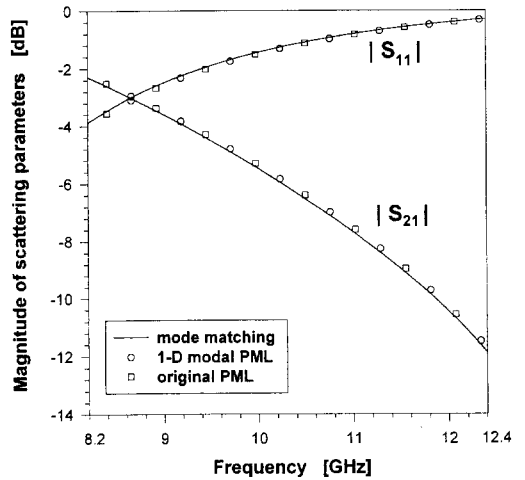


그림 5. 두께가 두꺼운 비대칭 아이리스를 갖는 WG-90 구형도파관의 산란 계수
Fig. 5. Scattering parameters of a WG-90 rectangular waveguide with a thick asymmetric iris

표 1. 계산 시간과 메모리 비교
Table 1. Comparison of CPU time and memory storage.

흡수경계조건의 종류	계산 시간	메모리
기존의 PML	760 sec.	1519.1 Kbytes
1차원 모드 PML	297 sec.	694.2 Kbytes

경계조건임을 알 수 있었다.

본 논문에서는 감쇄 모드에 대한 1차원 균일 전송선의 길이를 모드에 상관없이 일정하게 놓았다. 하지만 각 모드의 감쇄 특성을 고려하여 각 모드의 1차원 균일 전송선의 길이를 다르게 선택함으로써 계산 효율을 더 증가시킬 수 있을 것이다.

V. 참고 문헌

[1] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 14, pp. 302-307, May 1966.

[2] J. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. Comput. Phys.*, vol. 114, pp. 185-200, Oct. 1994.

[3] J. Moerlose and M. Stuchly, "Behavior of Berenger's ABC for evanescent waves," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 5, pp. 344-346, Oct. 1995.

[4] F. Alimenti, P. Mezzanotte, L. Roselli, and R. Sorrentino, "Efficient analysis of waveguide components by FDTD combined with time domain modal expansion," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 5, pp. 351-353, Oct. 1995.

[5] K. Jung, H. Kim, and K. Ko, "An improved unimodal absorbing boundary condition for waveguide problems," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 7, pp. 368-370, Nov. 1997.

[6] W. Chew and W. Weedon, "A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates," *Microwave and Optical Tech. Lett.*, vol. 7, pp. 599-604, Sept. 1994.

[7] G. Mur, "The modeling of singularities in the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 29, pp. 1073-1077, Oct. 1981.

정 경 영

1996년 2월 : 한양대학교 전파공학과(공학사)
 1998년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과(공학석사)
 1998년 2월 ~ 현재 : 현대전자 이동통신 단말기 연구소 연구원
 [주 관심분야] 마이크로파 공학, 이동통신, EMI/ EMC

천 정 남

1998년 2월 : 한양대학교 전파공학과(공학사)
 1998년 2월 ~ 현재 : 한양대학교 전파공학과 석사과정
 [주 관심분야] 마이크로파 공학, 전자파 수치해석, EMI/EMC

김 형 동



1984년 2월 : 서울대학교 전자공학과(공학사)
 1986년 2월 : 서울대학교 전자공학과(공학석사)
 1992년 5월 : 텍사스 오스틴 주립대학교(공학박사)
 1992년 6월 ~ 1993년 1월 : 텍사스 오스틴주립대학교 Post. Doc. Fellow
 1993년 3월 ~ 1996년 2월 : 한양대학교 전파공학과 전임강사
 1996년 3월 ~ 현재 : 한양대학교 전파공학과 조교수
 [주 관심분야] 마이크로파 공학, 전자파 수치해석, 안테나 설계 및 해석, 초음파 공학