

# 축방향 압축 하중을 받는 횡등방성 복합재료 쉘의 좌굴거동

## Buckling Behavior of Transversely Isotropic Composite Shells Subjected to Axial Compression

김 성 도\*  
Kim, Seong-Do

정 진 환\*\*  
Cheung, Jin-Hwan

### 요 지

복합재료는 강도-무게비가 다른 재료들에 비해 훨씬 크기 때문에 부재의 좌굴문제가 대단히 중요하게 취급되며, 본 논문에서는 축방향 압축력을 받는 복합재료로 된 쉘 부재의 좌굴해석이 수행된다. 이 재료는 일반적으로 이방성 재료 특성을 나타내 보이나, 섬유들이 한 방향으로만 배치되어 있는 경우 섬유방향에 연직인 평면에서의 강도나 탄성계수들은 모두 일정한 횡 등방성 재료성질을 가진 것으로 간주할 수 있다.

9 절점 degenerate 쉘 유한요소를 사용한 선형안정해석, LUSAS 범용 프로그램을 이용한 구조해석, 그리고 고전적 쉘 좌굴방정식에 의한 해석들을 수행하였으며, 그 결과들을 서로 비교, 분석하였다. 고려된 등방성 재료나 횡 등방성 재료의 경우 모두, degenerate 유한요소해석으로 계산한 임계하중들은 고전적 이론해에 의한 결과들 보다 낮았으며, LUSAS 결과들과는 거의 같았다. 이는 degenerate 유한요소에 의한 선형안정해석 결과들이 안전측에 들을 의미하며, 복합재료로 된 쉘 구조물의 좌굴해석에 degenerate 유한 요소를 효율적으로 적용할 수 있음을 의미한다.

핵심용어 : 복합재료, 횡등방성, p절점 degenerate 쉘 요소, 고전적 쉘좌굴 방정식, 임계하중

### Abstract

The stability problems in composite structures are very important because of the large strength-to-weight ratio of composite materials. The buckling analysis of composite shells subjected to axial compression is investigated. Although composite materials may exhibit general anisotropy, we shall assume that material properties in the unidirectional fibrous composite have transversely isotropy, in which the strength and the elastic modulus in the planes perpendicular to the fiber orientation do not vary.

The linear stability problem is analyzed by the finite element method using 9 node degenerate shell elements, the package program LUSAS for the structural analysis, and the classical shell buckling equations. The results from the degenerate finite element are compared with the critical loads by LUSAS and the classical shell theories.

For both the isotropic and the transversely isotropic material considered here, the degenerate finite element approach predicts the critical loads lower than the shell theories and the nearly same values with LUSAS, which means that the degenerate finite element predictions produce conservative results on the critical load of composite shells under axial compression and the degenerate finite shell element exhibits good performance.

*Keywords* : Composite material, transversely isotropy, 9 node degenerate shell element, classical shell buckling equation, critical load

\* 정회원·경성대학교 건설·환경공학부, 부교수  
\*\* 정회원·부산대학교 토목공학과, 교수

\* 이 논문에 대한 토론을 1998년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

### 1. 서 론

섬유보강폴리머 (fiber reinforced polymer, F.R.P.)와 같은 복합재료 (composite)들이, 공학적인 응용분야 및 대규모 건축 구조물 및 토목구조물의 부재들에 최근 상당히 많이 이용되고 있으며, 특히 고인장 강도, 경량, 내화학적, 내부식성 등의 성질들이 요구되는 구조물에 효과적으로 적용되고 있다<sup>1)~5)</sup>. 이들 복합재료는, 재료성질이 방향특성을 가지는 이방성재료이며, 구성재료의 자연적인 성질뿐만 아니라 제조 및 제작 방법에 크게 영향을 받아, 최적 설계에 따라 재료성질을 선택할 수 있으며, 원하는 방향성을 가진 구조형태를 만들기 위해 그 방향으로 섬유들을 배치하는 등, 재료를 효율적으로 이용할 수가 있다. 이들은 고강도와 고강성도를 가진 유리섬유, 탄소섬유 같은 보강재 (reinforcement)와 낮은 탄성계수를 가진 폴리머, 세라믹, 시멘트 같은 결합재 (matrix)로 이루어지며, 보통 filament winding과 pultrusion방식 등에 의해 제조된다. Pultrusion방식에 의해 생산되는 복합재료, 즉, pultruded 복합재료는 보통의 정적하중 하에서도 좋은 거동을 보일 뿐 아니라, 훌륭한 피로저항성질도 가지고 있으며, 근본적으로 파괴까지 선형거동을 나타낸다. 또한 여러 가지 복잡한 파괴 메커니즘에 기인한 탄성계수의 저하현상이 현저히 작은 장점도 가지고 있다. 최근 pultruded 복합재료로 된 구조부재의 대량생산이 가능함에 따라 강재나 철근콘크리트 같은 기존 재료들과 경제적인 측면에서도 비교가 되고 있다.

복합재료는 Table 1에서 알 수 있듯이, 다른 일반적인 구조용 재료들 보다 큰 강도-무게비 (strength to weight ratio)를 가지는 반면, 강도에 비해 탄성계수가 작고, 소성항복 영역을 나타내지 못하는 재료의 특성 등으로 인해, 이들로 구성된 구조부재들은 처짐, 진동 등 정적 및 동적 변위가 대체로 크고, 좌굴강도가 작은 단점을 가지고 있다. 따라서 부재의 하중 전달능력에 직접적으로 관계가 있는 임계좌굴하중이 주요 설계 변수가 된다.

복합재료에 보통 사용되는 보강재와 결합재들은 허용되는 기준까지 큰 신장률을 나타내기 때문에, 하중에 의해 부재의 변형이나 변형률이 크게 되더라도 재료는 탄성상태로 존재한다. 즉 복합재료는, 상대적으로 중간 정도 크기의 변형률 값에서 항복상태에 도달하는 강재와 재료의 균열이 발생하는 콘크리트 경우들과는 다른 변형형태를 보인다. 복합재료로 된 기둥의 좌굴실험에서, 실제 부재는 횡방향으로 상당히 큰 변형을 일으키며 그 상태에서 하중을 제거하였을 때 정확하게 부재의 원래 형태로 돌아온다. 이는 복합재료가 제법 큰 변형하에서도 탄성적으로 거동한다는 사실을 입증하고 있다.

축방향 압축력을 받는 원통형 부재에서, 반경-두께비 (R/t)가 큰 경우에는 쉘좌굴 거동을 고려해야 하며, 길이-반경비 (L/R)와 세장비에 따른 부재의 거동도 살펴야 한다. 상대적으로 세장비가 큰 부재에서는 전체 기둥좌굴이 다른 어떤 형태의 부재 파괴 이전에 발생할 것이며, 따라서 장주에서는 전체좌굴을, 세장비가 작은 단주에서는 재료의 항복 등에 의한 파괴로 이끄는 국부좌굴 거동들을 쉘 좌굴거동과 함께 살펴보아야 한다.

축방향 압축 하중을 받는 복합재료로 된 구조물의 좌굴에 대한 연구는 오래 전부터 수행되어 왔다. 1960년대에는 주로 항공 구조물에서의 복합재료 적용을 위한 연구, 조사가 행하여졌으며, 이에 따라 Tasi 등<sup>6)</sup>, Card<sup>7)</sup>가 filament-wound 쉘들의 좌굴하중에 대한 실험결과들을 NASA보고서로서 제출하였다. 그들 보고서에 의하면 실험 결과들은 이론해의 65~90%정도로 제법 큰 차

Table 1 Properties exhibited by different classes of construction material

Type of materials	Specific weight	Young's modulus E (GPa)	Strength $\sigma$ (MPa)	Strength to weight ratio
Mild steel	7.8	210	400	51.3
Concrete	2.4	20	20	8.3
General polymer composite	1.8	20	400	222.2

이를 보였다. Abu-Farsakh와 Lusher<sup>9)</sup>는 GRP 원통형 쉘의 압축좌굴에 대한 유한요소해와 실험 결과들을 비교 조사하였다.

최근 Kardomateas<sup>9)</sup>가 3차원 탄성해를 이용하여 복합재료로 된 쉘 및 기둥들의 좌굴거동을 연구하였으며, 그 결과들을 많은 논문에 발표하였다. 또한 Barbero 등<sup>10)</sup>에 의해 pultruded 보 혹은 기둥에 대한 좌굴거동들이 연구되었다.

본 연구에서는 횡등방성 복합재료로 된 원통형 쉘 구조부재가 축방향 압축력을 받을 때의 좌굴 거동에 대한 해석해, 구조해석 범용 프로그램인 LUSAS에 의한 해, 그리고 degenerate 유한요소 에 의한 수치해들을 제시한다. 고전적인 횡등방 성이론을 바탕으로 한 좌굴해석해들이 소개되며, 3차원 연속체 이론에 근거하여 유도된 de-generate 유한요소에 의한 분기좌굴해석이 수행된다. 이러한 이론해와 수치해석 결과들을 비교, 검토함으로써 복합재료로 된 원통형 쉘 구조부재들의 축방향 압축하의 좌굴거동을 조사하고자 한다.

**2. 복합재료의 응력-변형률 관계식**

부재의 강도증대, 부식방지, 경량화 등의 목적에 효과적으로 사용할 수 있는 복합재료로 된 구조부재는 기하학적인 보강형태인 횡방향 혹은 길이방향 보강재없이 어느 방향으로든지 보강의 효과를 최적으로 발휘할 수 있는 또 다른 장점을 가지고 있다. 이들은 적절한 연구와 실험들을 통해, 통상적인 보강구조물의 대체 구조부재로서도 활용의 여지가 충분하다. 이렇듯 복합재료들은 재료 각 방향으로의 성질들이 달라 해석의 시점에서 이방성 탄성이론의 전개가 필요하며, 이들 재료로 된 구조부재의 설계 및 해석에 이방성 성질과 그 영향을 고려하는 특별한 관심을 기울여야 한다.

복합재료들은 많은 얇은 층들이 결합되어 만들어지며, 각 층은 미시적인 관점에서 보면 불균질(heterogeneous)하나, 균질한 재료인 것으로 가정된다. 공학적 해석의 관점에서 보아, 복합재료들은 크게 세 가지로 분류된다. 먼저, 매트릭스에 임의 방향으로 섬유질들이 배치되어 만들어지

는, 층으로 이루어진 복합재료는 거시적 관점에서, 그 평면은 준 등방성(quasi-isotropy)인 것으로 간주된다. 만약 매트릭스에 단일 방향으로 섬유질들이 배열된 각 층들을 대칭으로 짜 맞추어 만들어진 복합재료는 세 직교 좌표축에 대해서로 재료 대칭을 이루는 직교이방성이다. 이 경우 섬유질들이 정렬되어 있는 방향으로의 인장강도나 탄성계수는 다른 방향에 비해 훨씬 더 크다. 만약 모든 섬유질들이 단일 방향으로만 정렬되어 있다면 그 복합재료(pultruded 복합재료가 이 부류에 속한다)의 성질을 횡 등방성(transversely isotropy)인 것으로 간주할 수 있으며 이 경우 섬유질 방향에 직교하는 평면에서의 강도와 탄성계수들은 모두 일정하다.

미소변위이론과 선형탄성이론을 바탕으로 한 등방성 재료에 대한 관계식들 중 평형방정식, 변형률-변위 관계식, 적합방정식 등은 이방성재료인 복합재료에 대해서도 동일하게 적용되나 구성 관계식 즉, 응력-변형률 관계식은 이방성이론 혹은 횡 등방성 이론에 따라 전개된다<sup>11),12)</sup>.

일반적인 형태의 선형탄성 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{1}$$

응력  $\sigma_{ij}$ 와 변형률  $\epsilon_{kl}$ 은 2계텐서들이며 탄성상수인  $C_{ijkl}$ 은 4계텐서이다.  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{kl}$ 은 각각 3차원 공간에서 9개의 성분들을 가지며, 따라서  $C_{ijkl}$ 에 대한 상수들은 총 81개이다. 그러나 응력과 변형률들의 대칭성 때문에 이들의 독립성분 수는 6개가 되고,  $C_{ijkl}$ 의 성분은 36개로 줄어든다. 이방성재료에 대해서 (1)식은 다음 형태의 행렬로 나타낼 수 있으며, 선형탄성재료에 대해 필요한 독립 상수들은 모두 21개로 줄어든다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2}$$

세개의 상호직교축들에 대해서 재료의 탄성대칭성을 유지하는 이방성재료를 직교 이방성 재료라 한다. 이러한 재료는 9개의 독립 탄성상수를 가지며, 전단응력과 법선변형률, 법선응력과 전단변형률 사이에 어떠한 간섭(coupling)도 존재하지 않는다. 직교이방성 재료에 대한 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

이때 직교 이방성 재료에 대한 탄성상수  $C_{ij}$ 들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{(1-\nu_{yz}\nu_{zy})E_x}{\Delta}, & C_{22} &= \frac{(1-\nu_{xx}\nu_{xx})E_y}{\Delta} \\ C_{33} &= \frac{(1-\nu_{xy}\nu_{yx})E_z}{\Delta}, & C_{12} &= \frac{(\nu_{xy} + \nu_{xx}\nu_{zy})E_y}{\Delta} \\ C_{13} &= \frac{(\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz})E_x}{\Delta}, & C_{23} &= \frac{(\nu_{yx} + \nu_{yx}\nu_{xz})E_z}{\Delta} \\ C_{44} &= G_{yz}, & C_{55} &= G_{zx}, & C_{66} &= G_{xy} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{xz} \\ &\quad - \nu_{yz}\nu_{xy}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} \end{aligned}$$

비록 복합재료로 된 원통형 쉘들이 일반적으로 이방성 재료의 특성을 가진다 할지라도, 앞서 설명했듯이 pultrusion 방식 등에 의한 fibrous 형태 복합재료들의 섬유 방향성을 고려한다면, 이들의 구조해석에 횡 등방성 조건을 적용할 수가 있다. 즉, pultruded 복합재료로 된 원통형 쉘부재에서, 섬유 방향으로 하나의 좌표축을 설정할 때 그 축에 대해 직교하는 부재 단면은, 회전탄성대칭(rotational elastic symmetry)성을 보이며, 등방평

면(plane of isotropy)이 된다.

Fig. 1 처럼  $xy$ 면이 등방평면이라면 탄성상수들을 다음과 같이 정의할 수 있다. 등방평면에서의 탄성계수를  $E$ , 그 평면에 연직인 방향으로의 탄성계수를  $E'$ 라 할 때,  $E_x=E_y=E$ ,  $E_z=E'$ 이며, 이때 전단계수들은  $G_{xy}=G$ ,  $G_{yz}=G_{zx}=G'$ 이다.  $\nu$ 는 등방평면 내의 인장응력에 의한 그 면에서의 횡 변형률을 의미하며  $\nu_{xy}=\nu_{yx}=\nu$ 이다.

또한,  $\nu'$ 는 등방평면에 연직인 방향으로의 인장응력에 의한 등방평면 내의 횡 변형률을 정의하는 포와슨 비이다. 즉,  $\nu_{xz}=\nu_{zy}=\nu'$ 이 된다. 이때,  $\nu_{yz}$ ,  $\nu_{xz}$ 는 종속변수들이다. 결국, 횡 등방성 재료에 대한 독립 탄성상수들은  $E$ ,  $E'$ ,  $G$ ,  $\nu$ ,  $\nu'$ 로써 총 5개이며,

$$C_{22} = C_{11}, C_{23} = C_{13}, C_{55} = C_{44},$$

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

가 되어 결국, 이 재료에 대한 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

만약  $z$ 방향으로 배치된 섬유를 가진 복합재료가  $yz$ 평면에서 평면응력 상태에 있다면,  $\sigma_x=0$ ,

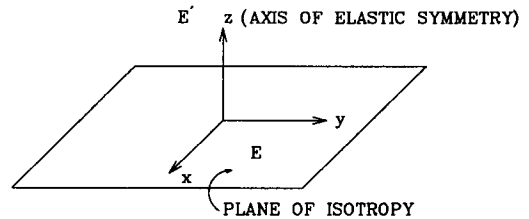


Fig. 1 Coordinate axes for a transversely isotropic material

$\tau_{xy}=\tau_{xz}=0$ 이다. 이때 횡 등방성 재료에 대한 응력-변형률 관계식은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_x \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{23} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_y \\ \epsilon_x \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 탄성상수  $C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}$ 는 다음과 같다.

$$C_{22} = \frac{E_y}{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}, C_{23} = \frac{\nu_{yz}E_z}{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}$$

$$C_{33} = \frac{E_z}{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}, C_{44} = G_{yz} \quad (7)$$

재료가 무수히 많은 대칭면들을 가진다면, 그 재료는 등방성이며 ( $E=E', \nu=\nu'$ ), 탄성상수항은 단지 2개의 독립적인 계수들( $E, \nu$ )로만 이루어 질 뿐이다. 등방성재료에 대한 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ Sym. & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 3. Degenerate 유한요소에 의한 선형 안정 해석

유한요소해석에 의한 쉘 구조물의 거동 조사는, 제한적이며 사용하기 다소 까다로운 고전적인 쉘이론을 바탕으로 하기보다는, 연속체 역학 방정식들로부터 직접적으로 유도되는 것이 타당하며, 따라서 3차원 연속체이론을 유한요소 이상화하고 동시에 쉘이론으로 degeneration한 유한요소를 사용하여 쉘 구조물을 해석하고자 한다. degenerate 유한요소<sup>13)~16)</sup>정식에는 변형률 텐서들

의 정의에 Von Karman 가정이 적용되었으며, 횡전단 변형을 고려할 수 있도록 Mindlin 가정이 도입되었다. 이요소는 3차원 고체요소에서 두께 방향 변형률이 두께에 걸쳐 일정한 것으로 모델링하여 유도되며, 요소중면 절점에 5개의 자유도(전체 좌표계 방향 변위,  $u, v, w$ 와 절점법선의 변형에 의한 두 회전각  $\beta, \beta_0$ )를 가진다.

본 논문에 사용된 Degenerate 쉘 요소는 비교적 두꺼운 쉘에 대해서는 만족스러운 결과를 주나 단면비(곡률반경/두께비 또는 지간/두께비)가 증가할때는 강성도가 과대하게 평가되는 locking 현상을 나타내 보인다. 이때 요소의 효율성을 증대시키기 위해 수치적분되는 강성행렬내 항들 중 전단 및 막에 대응하는 항들에는 감차적분을, 휨에 대응하는 항들에는 정상적인 적분을 수행하는 소위 선택적 감차적분을 사용하였다.

임의 형상의 쉘에 대한 하중전달거동을 현실적으로 추정하기 위해서는, 분기점(bifurcation point) 및 극한점(limit point)을 정당하게 평가하고 엄격한 임계후 거동을 조사해야 한다. 재료의 항복 전에 발생하는 분기좌굴하중을 결정하는 선형안정해석은, 구조물의 정성적인 거동을 알지 못하는 실공학상황에서 때때로 필요하며, 비교적 간단하고 현실에 부합되는 만족스러운 결과를 주기도 하여 복잡한 비선형 대변위해석 대신 적용되기도 한다.

분기좌굴하중을 구하기 위해, 평형상태에 있는 구조체의 기본방정식을 고려한다.

$$(K_0^e + K_1^e + K_2^e) \cdot U = N^e - F^{-1} \quad (9)$$

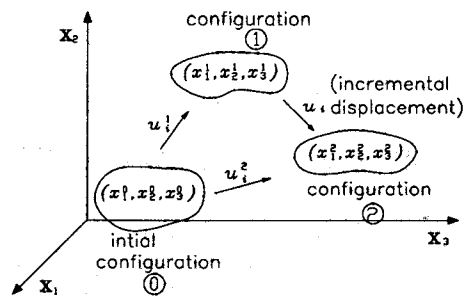


Fig. 2 Motion of body in stationary Cartesian coordinate system

여기서, 이상첨자는 Fig. 2에서처럼 물체의 형상을 의미하며, 0, 1, 2는 각각 물체의 변형전 초기형상 ①, 증분 전, 후형상 ①, ②를 나타낸다.  $K_0^z$ ,  $K_1^z$ 는 각각 선형탄성행렬, 초기변위행렬이며, 선형해석시  $K_2^z$ 가 전체 강성도행렬이 된다.  $K_0^z$ 는 초기응력행렬(기하학적 행렬)이며,  $U$ 는 증분변위벡터,  $N^2$ ,  $F^1$ 는 각각 외력벡터, 내력벡터이다. 즉, 식의 우변은 증분 시작에서의 형상②의 불평형력을 의미한다.

(9)식에서 형상①이 기본평형상태이면  $F^1 = N^1$ 이며, 안정기준에 따라 동일한 하중값  $N^2 = N^1$ 인 인접평형형상②가 존재한다. 즉, (9)식은 제차형태로 된다. 비례하중으로 가정하면,

$$P = \lambda P^r \quad (10)$$

여기서,  $\lambda$ 는 하중계수이며,  $P^r$ 는 기준하중벡터이다. 따라서, 분기좌굴하중( $\lambda = \lambda^c$ , c : critical)은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$(K_0^z + K_1^z + \lambda K_2^z) \cdot U = 0 \quad (11)$$

임계이전 변위들과 이들의 영향을 무시하여, 즉, 초기변위행렬  $K_1^z$ 를 무시하면 고전적인 분기좌굴하중에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$(K_0^z + \lambda K_2^z) \cdot U = 0 \quad (12)$$

중립평형을 얻기 위해 필요한 하중증가계수  $\lambda^c$ 를 고유치해석으로 구한 후, 아래 식으로 분기좌굴하중을 얻게 된다.

$$P_{cr} = \lambda^c \cdot P^r \quad (13)$$

#### 4. 횡등방성 원통형 셸 부재들의 좌굴하중식

가장 널리 사용되는 건설재료인 강재나 콘크리트보다 재료성질들을 기준으로 할 때, 복합재료들은 상대적으로 더 큰 강도를 가지기 때문에, 비교적 얇은 두께의 개단면이나 중공단면들의 구

조부재들에 효율적으로 사용되고 있다. 이러한 구조부재들 중, 축방향 하중을 받는 복합재료로 된 원통형 셸 부재는 큰 반경/두께비, 낮은 강성도 때문에 좌굴문제가 주 관심대상이 될 것이다. 재료가 등방성이든 이방성 성질을 가지든지 해석 과정에 응력-변형을 관계식이 포함되지 않는 한 좌굴해석에 대한 접근방법은 근본적으로 같다. 또한 변형에 대한 식이 포함된다 할지라도, 변형이 복합재료에 대해 사용된 구성관계식들에 의해 계산되는 한, 두 경우에 대한 기본개념은 동일하다.

셸 부재들의 축방향 좌굴하중을 구하는 식들 중, 선형 탄성 등방성재료로 된 단순지지된 원통형 셸이 축방향 압축력을 받을 때의 좌굴거동은 Donnell<sup>17)</sup>에 의해 잘 정의된다. 이때 고려되는 구조부재의 제원은 길이  $L$ , 반경  $R_0$ , 두께  $h$ 이며, 좌표계는 Fig. 3에서처럼 정의된다.

아래의 Donnell식은 중간 정도 길이의 완전한 셸에 적합하며, 길이가 길어질 경우 기동처럼 좌굴하여 셸에 대해서는 부적절한 결과를 준다<sup>18)</sup>.

$$P_{cr, Donnell} = 2\pi R_0 h \left[ \frac{E h^2}{12(1-\nu^2) R_0^2} \frac{(M^2 + n^2)^2}{M^2} + E \left[ \frac{M^2}{(M^2 + n^2)^2} \right] \right] \quad (14)$$

여기서,  $M$ 은  $\frac{m\pi R_0}{L}$ 로 주어지는 계수이며, 이때,  $m, n$ 은 좌굴모드에 대응하는 양의 정수들로서, 각각 부재길이 방향으로의 반파 및 원주방향으로의 파들의 수를 의미한다. (14)식에서 각 쌍의 양의정

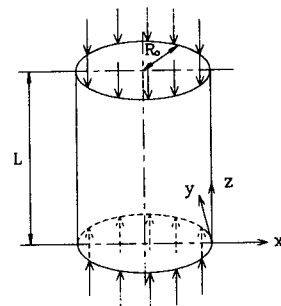


Fig. 3 A cylindrical shell under axial compression

수  $m, n$ 에 대응하는 고유치 중 가장 작은 값이 좌굴하중이다. (14)식을 매개변수  $[(M^2 + n^2)/M^2]$ 에 대해 최소화하면 (15)식과 같은 고전적인 해를 얻을 수 있다.

$$P_{cr, \text{Donnell}} = \frac{2\pi E h^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (15)$$

앞서 언급했듯이 이 식은 중간 정도 길이의 얇은 셸에 대해서 사용될 수 있으나, 길이가 짧은 셸 경우에는 (14)식에 대해 시산법을 사용하여 좌굴하중을 계산해야 한다<sup>19)</sup>.

Flügge<sup>20)</sup>와 Danielson & Simmonds<sup>21)</sup>들은 다음과 같이 축방향 압축력을 받는 등방성 원통형 셸에 대한 비교적 정확한 좌굴방정식을 유도하였다.

$$P_{cr(F, DS)} = 2\pi R_o h E \frac{Q_{(F, DS)}}{M^2[(M^2 + n^2)^2 + n^2]} \quad (16)$$

여기서, Flügge이론에 대해서는,

$$Q_F = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R_o^2} [(M^2 + n^2)^4 - 2(\nu M^6 + 3M^4 n^2 + (4-\nu)M^2 n^4 + n^6) + 2(2-\nu)M^2 n^2] + M^4 \quad (17)$$

이고, Danielson & Simmonds식에 대해서는

$$Q_{DS} = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R_o^2} (M^2 + n^2)^2 (M^2 + n^2 - 1) + M^4 \quad (18)$$

이다. (17), (18)식들에서 알 수 있듯이 Danielson & Simmonds에 의한 좌굴방정식이 좀 더 간단한 형태를 가진다.

형 등방성 복합재료로 된 원통형 셸에 대한 축방향 압축 좌굴하중 식들은 Donnell과 Timoshenko의 셸이론에 의해 다음처럼 주어진다.<sup>9), 18), 19)</sup> 축방향 압축하중  $P$ 를 받는 경우, 좌굴전 셸의 membrane 해석에 의해 다음처럼 단위길이당 힘이 계산된다.

$$N_z^o = -\frac{P}{2\pi R_o}, N_{zy}^o = N_y^o = 0 \quad (19)$$

따라서, 축방향 압축 하중을 받는 원통형 셸의 좌굴평형 방정식은 Donnell에 의해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} R_o \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{zy}}{\partial \theta} &= 0 \\ R_o \frac{\partial N_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + \frac{1}{R_o} \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ N_y - R_o N_z^o \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - R_o \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_y}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{zy}}{\partial z \partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $\theta$ 는 원주방향으로의 극좌표를 의미한다. Timoshenko의 셸 이론에서는 (20)식의 두 번째 식에  $R_o N_z^o \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ 항이 더 첨가된다.

(20)식들에서 합응력 및 모멘트 항들은 변형을 및 변위들로 표현되어 해석된다. 이때 원통형 셸이론 정칙에서  $x, y, z$ 방향으로의 변위  $u, v, w$ 들은 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u &= U_o \cos n \theta \sin \lambda z \\ v &= V_o \sin n \theta \sin \lambda z \\ w &= W_o \cos n \theta \cos \lambda z \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,  $U_o, V_o, W_o$ 는 상수들이며,  $\lambda = \frac{m\pi}{l}$ 이다.

결국 (20)식을 변형을 및 변위 항으로 정리한 후, (21)식을 대입하면 다음과 같은 Donnell 셸 정칙에 대한 선형 제차 방정식계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}U_o + \alpha_{12}V_o + \alpha_{13}W_o &= 0 \\ \alpha_{21}U_o + \alpha_{22}V_o + \alpha_{23}W_o &= 0 \\ \left( \alpha_{31} - \frac{\lambda^2}{2\pi} P \right) U_o + \alpha_{32}V_o + \alpha_{33}W_o &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Timoshenko 쉘 청식의 경우, (22)식 두 번째 식의  $V_0$ 의 계수에  $\frac{\lambda^2}{2\pi} P$ 항이 더 첨가된다. 이제 축방향 압축하중을 받는 원통형 쉘의 좌굴하중은 (22)식의 계수들의 행렬식을 0으로 두어 계산되며 다음형태로 주어진다.

$$P_{cr(DON, TIMO)} = \frac{2\pi}{\lambda^2} Q_{(DON, TIMO)} \quad (23)$$

여기서,  $P_{cr, DON}$ 은 Donnell에 의한 횡 등방성재료의 원통형 쉘의 축방향 좌굴하중식을,  $P_{cr, TIMO}$ 는 Timoshenko에 의한 식을 의미한다. 또한, Donnell과 Timoshenko정식에서의 계수들은 각각 다음과 같다.

$$Q_{DON} = \frac{DET}{\alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{13} \alpha_{12}} \quad (24)$$

$$Q_{TIMO} = \frac{ALPH + \sqrt{ALPH^2 - 4 \alpha_{13} DET}}{2\alpha_{13}} \quad (25)$$

여기서,  $DET$ 는 아래와 같은 행렬식을 의미하며,  $ALPH$  및 각 계수  $\alpha$ 들은 다음과 같이 정의된다.

$$DET = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$ALPH = \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{22} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= C_{23}\lambda h ; \alpha_{12} = (C_{23} + C_{44})n\lambda h \\ \alpha_{13} &= -(C_{33}R_o\lambda^2 + C_{44}n^2/R_o)h \\ \alpha_{21} &= -\left(\frac{C_{22}}{R_o} + \frac{D_{22}n^2}{R_o^3} + \frac{D_{23}\lambda^2}{R_o} + 2\frac{D_{44}\lambda^2}{R_o}\right)nh \\ \alpha_{22} &= -\left(\frac{C_{22}n^2}{R_o} + C_{44}R_o\lambda^2 + \frac{D_{22}n^2}{R_o^3} + 2\frac{D_{44}\lambda^2}{R_o}\right)h \\ \alpha_{31} &= \left(\frac{C_{22}}{R_o} + D_{33}R_o\lambda^4 + \frac{D_{22}n^4}{R_o^3} + 2\frac{D_{23}\lambda^2n^2}{R_o} + 4\frac{D_{44}\lambda^2n^2}{R_o}\right)h \\ \alpha_{32} &= \left(\frac{C_{22}}{R_o} + \frac{D_{22}n^2}{R_o^3} + \frac{D_{23}\lambda^2}{R_o} + 4\frac{D_{44}\lambda^2}{R_o}\right)nh \\ \alpha_{33} &= -C_{23}\lambda h \end{aligned} \quad (28)$$

또, 계수  $\alpha$ 를 구성하는 재료의 등가상수인,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{44}$ 들은 (7)식으로 정의되며,  $D_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$D_{ij} = C_{ij} \frac{h^3}{12} \quad (29)$$

### 5. 수치예제 및 고찰

축방향 압축하중을 받는 등방성 및 횡등방성 재료의 단순지지된 쉘 구조부재에 대한 좌굴거동을, 앞에서 정의한 좌굴방정식들 및 degenerate 쉘 요소에 의한 유한요소 해석, 그리고 범용 구조해석 프로그램인 LUSAS<sup>22)</sup>를 통해 조사하였다. Fig. 3과 같은 원통형 쉘 부재의 좌굴하중들을 계산하였으며, 이때 사용된 부재의 기하학적 및 재료성질들은 다음의 Table 2와 같다.

이들 수치자료를 토대로 degenerate 쉘 유한 요소에 의한 분기좌굴해석이 수행되었다. 이 해석에서는 9절점 degenerate 쉘요소를 사용하였으며, 요소의 강성도를 과대평가하는 locking 현상을 없애기 위해 선택적 감차 적분기법을 적용하였다. 부재 대칭성을 이용하여 원통형쉘의 1/2을 원주방향으로 16개, 길이방향으로 8개 총128개 요소(544개 절점, 2720개 자유도)로 분할하여 계산하였다. 유한요소해석에 의한 수치결과 ( $P_{DEGE}$ )

Table 2 Geometrical and material properties of cylindrical shell

Geometrical properties		Material properties			
Length L	5m	Isotropic case		Transversely isotropic case	
		Elastic modulus E	14 GPa	$E_x = E_y$	14 GPa
Outer radius $R_2$	1m	Shear modulus G	5.385 GPa	$E_z$	57 GPa
				$G_{zy}$	5.7 GPa
Radius to thickness ratio $R_o/h$	3.83 ~ 100.5	Poisson's ratio	0.3	$\nu_{zy}$	0.277
				$\nu_{xy}$	0.4



들을, 등방성 재료의 경우 Donnell, Flügge, Danielson & Simmonds 좌굴방정식들 및 LUSAS에 의한 결과들인  $P_{DON}$ ,  $P_{FL}$ ,  $P_{D\&S}$ ,  $P_{PLUS}$ 들과 비교하며 (Table 3, Fig. 4.), 횡등방성 재료 경우 Donnell, Timoshenko 좌굴방정식들 및 LUSAS에 의한 결과들인  $P_{TIMO}$ ,  $P_{DON}$ ,  $P_{PLUS}$ 들과 비교하여 (Table 4, Fig. 5), 원통형 셸 좌굴거동에 대한 degenerate 셸 유한요소해석의 효율성 및 타당성을 조사하고자 한다. 이때 LUSAS의 해석에 이용된 요소는 Semiloof Curved Thin Shell 요소인 QSL8인 8절점 곡면요소인데, 이방성 및 복합재료의 특성을 가지는 재료에 적용할수 있으며, 두께가 변화하는 곡면의 횡전단 변형의 효과

를 포함하지 않은 막과 휨 변형의 해석을 수행할 수 있다. 동일한 원통형 셸을 앞서 언급한 요소를 이용하여 원주 방향으로 20개, 길이방향으로 24개 총 480개 요소로 분할하여 해석하였다.

비록 선형좌굴해석 결과로, 축방향 압축을 받는 셸 부재의 파괴에 대한 복잡한 현상들을 모두 고려할 수는 없지만, 다양한 셸 두께에 따른 분기좌굴하중들의 변화를 여러 좌굴방정식들에 의한 결과들 및 LUSAS결과 그리고 degenerate 셸 요소에 의한 수치해들을 비교해 봄으로써 복합재료로 된 셸 구조부재에서 좌굴의 중요성을 살펴볼 수 있다.

등방성 재료의 경우 (Table 3, Fig. 4), degen-

Table 3 Comparison of shell buckling formulas and LUSAS with degenerate element (isotropic material)

$R_0/h$	$P_{DON}/P_{DEGE}$	$P_{FL}/P_{DEGE}$	$P_{D\&S}/P_{DEGE}$	$P_{PLUS}/P_{DEGE}$
3.83	1.846	1.339	1.344	1.185
4.5	1.790	1.253	1.283	1.141
5.5	1.723	1.205	1.228	1.100
7.17	1.663	1.210	1.237	1.090
10.5	1.615	1.022	1.039	1.134
20.5	1.619	1.182	1.190	1.298
25.5	1.635	1.363	1.370	1.333
50.5	1.671	1.376	1.381	1.021
100.5	1.698	1.549	1.551	1.102

Table 4 Comparison of shell buckling formulas and LUSAS with degenerate element (transversely isotropic material)

$R_0/h$	$P_{DON}/P_{DEGE}$	$P_{TIMO}/P_{DEGE}$	$P_{PLUS}/P_{DEGE}$
3.83	1.276	1.031	1.010
4.5	1.204	0.978	0.981
5.5	1.171	0.955	0.955
7.17	1.188	0.949	0.957
10.5	1.155	0.948	1.008
20.5	1.148	1.091	0.996
25.5	1.174	1.115	0.942
50.5	1.188	1.163	0.987
100.5	1.207	1.196	1.036

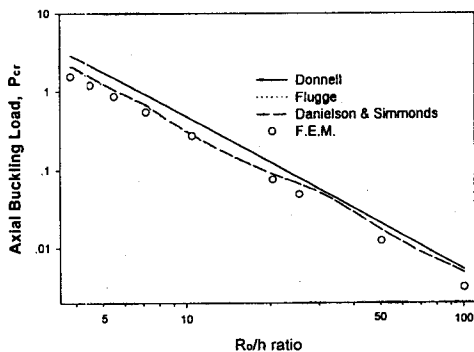


Fig. 4 Comparison of the different formulas for isotropic shell buckling

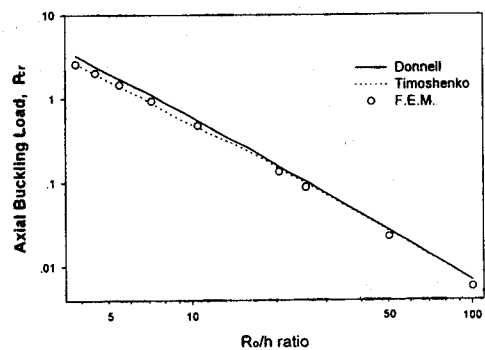


Fig. 5 Comparison of the different formulas for orthotropic shell buckling

erate 유한요소에 의해 계산된 임계하중들은 Donnell이론에 의한 값들 보다 Flügge 및 Danielson & Simmonds 좌굴방정식들에 의한 결과들에 더 근접하였으며, 특히 Danielson & Simmonds에 의한 좌굴방정식은 식의 형태가 다른 이론식보다 상대적으로 간단하면서도 비교적 정확한 결과를 나타내었다.

조사된 전체  $R_o/h$ 비 범위내에서 이들 고전적 셀이론에 의한 임계하중들은 모두 degenerate 유한요소해보다 더 크며 즉, 유한요소해는 다른 이론해들에 비해 안전측에 들을 알 수 있다. 그리고  $R_o/h$ 비가 10~20사이에서, 각 좌굴방정식에 의한 임계하중들과 degenerate 유한요소에 의한 수치해들의 차가 상대적으로 작음을 확인할 수 있다. 또한 degenerate 유한요소해는 구조해석용 범용 프로그램 LUSAS에 의한 결과보다 대체로 안전측에 있음을 알 수 있으며, 이 경우에 대한 degenerate 요소의 효율성은 우수한 것으로 판단된다.

횡등방성 재료의 경우 (Table 4, Fig. 5), degenerate 유한요소해와 Timoshenko에 의한 분기점들은 전체  $R_o/h$ 비 범위내에서 거의 일치한다고 볼 수 있으며, Donnell방정식에 의한 좌굴하중들은 등방성 경우에서와 마찬가지로 유한요소해보다 더 크다. Degenerate 유한요소해와 셀이론에 의한 결과들과의 차는 동일한 반경-두께비를 가진 등방성 재료의 경우보다 더 작으며, Timoshenko해는 구조부재가 두꺼울수록 그 차이가 더 작음을 알 수 있다. LUSAS에 의한 결과와 degenerate 유한요소해는 조사된 전체  $R_o/h$ 비 범위 내에서 거의 일치하였으며, 이는 횡등방성 재료로 된 원통형 셀의 좌굴해석에 대해 degenerate 유한요소의 효율성이 우수함을 입증하고 있다. degenerate 유한요소해는 등방성 재료와 마찬가지로 횡등방성 재료의 경우에도 안전측에 있음을 알 수 있다.

## 6. 결 론

복합재료들은 다른 일반적인 구조용 재료들보다 더 큰 강도-무게비를 가지며, 응력-변형률 관

계식에서 넓은 범위의 소성항복 영역이 없기 때문에, 이러한 복합재료로 된 구조부재들이 축방향 압축 하중을 받을 때의 안정문제는 아주 중요하게 취급된다. 본 논문에서는 축방향 압축 하중을 받는 등방성 및 횡등방성 재료의 원통형 셀 구조부재에 대한 좌굴거동을 고전적 이론에 의한 좌굴방정식들 및 구조해석 범용 프로그램인 LUSAS, 그리고 degenerate 셀 유한요소해석을 통해 조사하였다.

등방성 및 횡등방성 재료로 된 원통형 셀이 축방향 압축 하중을 받을 때, degenerate 유한요소에 의한 좌굴하중은 Donnell 좌굴방정식에 의한 임계하중보다 낮으며, 그 외 다른 셀이론에 의해 평가되는 임계하중들보다 대부분 낮은 값을 예측하고 있다. 따라서 횡등방성 재료로 간주되는 복합재료로 된 셀의 축방향 압축 좌굴하중을 degenerate 셀 유한요소로 평가하는 것이 안전측에 드는 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 또한 degenerate 유한요소에 의한 분기좌굴해석 결과들은 LUSAS에 의한 해들과 거의 일치하거나 낮은 값들을 나타내었으며, 조사된  $R_o/h$ 비 영역 내에서 degenerate 요소의 효율성은 아주 우수하였다.

본 논문에서 제시된 결과들은 복합재료로 된 셀의 좌굴거동을 조사하는 여러 가지 정식 및 유한요소해들의 타당성 및 효율성을 평가하는 기준 값으로서 사용될 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Hull D. and Clyne T. W. (1996), "An Introduction to Composite Materials", Cambridge University Press
2. Jones R. M. (1975), "Mechanics of Composite Materials", McGraw Hill
3. Kim, D. H. (1995), "Composite Structures for Civil and Architectural Engineering", E & FN SPON
4. Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L. (1986), "The Behavior of Structures Composed of

- Composite Materials", Martinus Nijhoff Publishers
5. L. Hollaway(1993), "Polymer Composites for Civil and Structural Engineering", Chapman & Hall, p.38, p.53
  6. Tasi J, Feldman, A. and Stang D.A. (1965), "The Buckling strength of Filament-Wound Cylinders Under Axial Compression", CR-266, NASA
  7. Card M. (1966) "Experiments to Determine the Strength of Filament-Wound Cylinders Loaded in Axial Compression", TN D-3522, NASA
  8. Abu-Farsakh Fhazi A.F.R. and Lusher J.K. (1985), "Buckling of Glass Reinforced Plastic Cylindrical Shells under Combined Axial Compression and External Pressure", AIAA, Vol.23, No.12, pp.1946~1951
  9. Kardomateas G. A. (1995), "Bifurcation of Equilibrium in Thick Orthotropic Cylindrical Shells under Axial Compression", *J. Appl. Mech.* ASME 62, pp.43~52
  10. Barbero, Ever J. and Raftoyiannis Ioannis G. (1993), "Euler Buckling of Pultruded Composite Columns", *Composite Structures*, Vol.24, No.2, pp.139~147
  11. Chen, Wai-Fah and Saleeb, Atef F. (1982), "Constitutive Equations for Engineering materials, Volume 1: Elasticity and Modeling", John Wiley & Sons
  12. Chen, W. F. (1982), "Plasticity in Reinforced Concrete", McGraw Hill
  13. Ahmad S., Irons B. M., and Zienkiewicz O. C. (1970), "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.2, pp.419~451
  14. Hinton E. and Owen D. R. J. (1985), "Finite Element Software for Plates and Shells", Pineridge Press
  15. 김성도, "Shell 구조물의 비선형 해석", 부산대학교 대학원 박사학위논문, 1990
  16. 조현영, 정진환, 김성도, "Degenerate 쉘 요소에 의한 쉘 구조물의 안정해석", 부산대학교 공과대학 연구보고 제39집, 1990
  17. Donnell L.H. (1934) "A New Theory for the Buckling of Thin Cylinder under Axial Compression and Bending" *ASCE Transaction*, Vol. 56, pp.795~806
  18. Timoshenko S. P. and Gere J. M. (1961), "Theory of Elastic Stability", McGraw Hill Co., New York
  19. Brush D. O. and Almroth B. O. (1975), "Buckling of Bars, Plates, and Shells" McGraw Hill, New York
  20. Flügge W. (1960), "Stresses in Shells", Springer, pp.426~432
  21. Danielson D. A. and Simmonds J. G. (1969), "Accurate Buckling Equations for Arbitrary and Cylindrical Elastic Shells", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 7, pp.459~468
  22. FEA Ltd. "LUSAS-Element Library, User Guide and MYSTRO-User Guide", Ver.12.  
(접수일자 : 1998. 5. 4)