

## Impulse Excitation Method에 의한 복합재료의 공진 주파수와 탄성계수 관계에 대한 실험적 고찰

김형삼·이재혁·이동식·박세만  
명지대학교 공과대학 기계공학과

### Experimental Investigations of Relationships between Resonance Frequencies and Elastic Moduli of Composite Materials by Impulse Excitation Method

H. S. Kim, C. H. Yi, D. S. Lee and S. M. Bahk  
Department of Mechanical Engineering, Myongji University

(1998년 5월 6일 받음, 1998년 7월 16일 최종수정본 받음)

초 록 경량화 되고 고강도의 재료를 요하는 자동차, 항공기, 선박, 각종 구조물 등 여러 분야에서 복합재료의 사용은 증가되어 왔고, 그에 따른 연구가 활발히 진행되고 있다. 본 연구에서는 Impulse Excitation Method을 통해 Transversely Isotropic한 재료의 공진 주파수를 측정함으로써 복합재료의 탄성계수를 구하였다. Timoshenko Beam Equation식에 나타나는 회전관성효과와 전단변형을 고려하였을 때와 고려하지 않았을 때 재료의 탄성계수의 변화가 어떻게 나타나는가를 관찰하였다.

**Abstract** The Usages of composite materials have been steadily on the rise in the industries of automobiles, air crafts, shipbuilding and other structures for transportations. Commonly required in those industries are light weight and high strength of the structures. Consequently, serious efforts in research have been focused on searching for light materials and on developments and characterizations of advanced substitutes including various kinds of composite materials. In this investigation, transversely isotropic composite materials are chosen and formed into two kinds of beams; Euler-Bernoulli beam(thin beam) and Timoshenko beam(thick beam) for determinations of elastic constants. As an experimental technique Impulse Excitation Method is utilized to measure resonance frequencies of the beams of the composite materials in vibration tests. Elastic constants are evaluated from measured resonance frequencies for the two types of beams to observe and establish possible existence of effects of rotary inertia and shear deformations.

### 1. 서 론

구조재로 사용되는 재료는 금속, 폴리머, 세라믹, 복합재료와 같이 크게 네 가지로 분류할 수 있다. 그 중에서 복합재료는 재료의 경량화와 고 강도를 요하는 여러 분야에서 널리 사용되어 왔고 그에 따른 연구가 활발히 진행되고 있다. 이러한 복합재료의 기계적 성질은 matrix의 성질, 보강재의 성질, 부피분율 그리고 같은 fiber와 matrix와 구성되어 있는 복합재료라 할지라도 fiber 방향의 변화와 laminate geometry의 변화에 따라 변화한다. 그러므로 생산품의 완결성을 기하기 위해 재료의 물성치 측정은 필수적이며 이를 위한 많은 비파괴 검사방법이 연구되어 왔다. 이러한 복합재료의 여러 가지 기계적 성질중의 하나인 탄성계수의 평가를 Timoshenko beam equation<sup>5)</sup>을 적용하여 구하였다. 일반적으로 시편의 길이에 대한 두께의 비가 0.025보다 클 때는 Timoshenko beam equation을 적용해야 된다고 알려져 있다. 본 연구에서는 회전관성효과만을 고려하였을 때, 전단변형만을 고려하였을 때, 둘 다 고려하지 않은 Euler beam equation<sup>5)</sup>을 적용하였을 때에 대하여 각각 비교하여 회전관성효과와 전단변형이 재

료의 탄성계수에 어떠한 영향을 미치는지를 관찰하였다. 길이에 대한 두께의 비를 변화시켜가면서 길이에 대한 두께의 비가 재료의 탄성계수와 어떠한 관계가 있는지를 평가하였다.

### 2. 이 론

Transversely isotropic한 복합재료의 길이방향의 종 탄성계수와 횡 탄성계수를 Impulse excitation method을 이용하여 구하였다. Impulse excitation method으로 재료의 탄성계수(Young's Modulus)를 측정하기 위해서는 재료의 굽힘 공진 주파수( $f_f$ : Flexural Resonance Frequency)와 비틀림 공진 주파수( $f_t$ : Torsional Resonance Frequency)의 측정이 필요하다. 일반적으로 굽힘 공진 주파수 경우 종 탄성계수인  $E$ 값을 구할 수가 있고 비틀림 공진 주파수 경우 횡 탄성계수인  $G$ 값을 구할 수가 있다. 또한 굽힘 진동 식에서 구한 종 탄성계수를 Timoshenko beam equation에 대입하여 탄성계수의 변화를 관찰하였다. 회전관성효과를 고려한 경우와 전단변형을 고려한 경우, 둘 다 고려하지 않은 Euler-Equation에 굽힘 진동 식에서 구한 탄성계수를 대입하였을 경우에 종 탄성계수의

값이 어떻게 변화하는가를 관찰하였다.

2-1. 횡 탄성계수와 비틀림 공진 주파수 ( $f_T$  : Torsional Resonance Frequency)

비틀림 공진 주파수와 횡 탄성계수 사이의 관계는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다

$$\omega_T = \frac{n\pi C}{l}, C = \sqrt{\frac{GK}{\rho J}}, G = \frac{4f_T^2 \rho J l^2}{K} \quad (1)$$

식에서  $l$ 은 재료의 길이이고,  $\rho$ 는 밀도이다.  $n$ 은 상수로써 기본 모드에 대하여 1이며, 높은 차수의 모드에 대하여 2, 3, ...으로 증가한다.  $K$ 는 단면의 형상계수로서 단면적이 사각형인 경우  $K = \frac{ab^3}{16} [\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} (1 - \frac{b^4}{12a^4})]$ 으로 나타낼 수 있다.

2-2. 종 탄성계수와 굽힘 공진 주파수 ( $f_F$  : Flexural Resonance Frequency)

굽힘 공진 주파수 ( $f_F$  : flexural Resonance Frequency)와 종 탄성 계수 사이의 관계에서 식을  $n$ 차 모드이고 길이가  $l$ 인 사각막대의 경우에 적용하여 정리하면 식 (2)와 같이 표시 할 수 있다.

$$\omega_F = 2\pi f_F = (k_m l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (2)$$

여기서  $k_m l$ 은 1차, 2차, 3차...에 대하여 각각  $k_1 l = 4.7230041$ ,  $k_2 l = 7.8532050$ ,  $k_3 l = 10.995608$ 이다. 일반적으로 식 (2)를 Euler Beam Equation이라 한다. 각각의 식에서  $\rho$  : 밀도,  $A$  : 시편의 단면적,  $f$  : 공진 주파수이다.

2-3. Timoshenko Beam Equation

$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A}$ ,  $r^2 = \frac{I}{A}$ 이라고 할 때, Timoshenko beam equation은 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 (1 + \frac{E}{kG}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho r^2}{kG} \frac{\partial w^4}{\partial t^4} = 0 \quad (3)$$

식 (1)은 일반적인 Timoshenko beam equation을 나타내고 있다. 이 방정식을 boundary condition이 free-free로 주어질 때 주파수 방정식에 대한 식으로 표시하면 식 (4)와 같다.

$$\omega_n^4 (\frac{\rho r^2}{kG}) - \omega_n^2 (1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2}) + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{kG} + (\frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4}) = 0 \quad (4)$$

이 식을 1차 모드이고 단면적인 사각형인 경우 shear coefficient  $k = \frac{5}{6}$ 으로 놓으면 식 (5)과 같이 된다.

$$\omega_n^4 (\frac{6\rho r^2}{5G}) - \omega_n^2 (1 + \frac{4.730041^2 r^2}{l^2} + \frac{4.730041^2 r^2}{l^2} \frac{6E}{5G}) + (\frac{\alpha^2 \pi^4}{l^4}) = 0 \quad (5)$$

식 (5)을 회전 관성 효과 (rotary inertia effect)만을 고려하여 식을 전개하면

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 (4.730041)^4}{l^4 [1 + \frac{(4.730041)^2 r^2}{l^2}]} \quad (6)$$

전단변형 (shear deformation)만을 고려하여 식을 전개하면

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 (4.730041)^4}{l^4 [1 + \frac{(4.730041)^2 r^2}{l^2} \frac{6E}{5G}]} \quad (7)$$

각각의 식에서  $\rho$  : 밀도,  $I$  : 관성모멘트,  $A$  : 시편의 단면적,  $l$  : 시편의 길이,  $k$  : shear coefficient를 나타내고 있다.

### 3. 실험 방법

#### 실험장치

공진 주파수를 측정하기 위해 그림 1과 같은 실험장치를 구성하였다. 실험장치는 가진을 시켜줄 수 있는 충격기와 기계적 신호를 전기적 신호로 바꾸어 줄 수 있는 마이크로폰, 시편을 지지하기 위한 지지대, 측정된 전기적 신호를 증폭하기 위한 증폭기, 주파수 분석을 위한 dynamic signal analyzer (HP 35670A)로 구성되어 있다. 실험에 사용된 이론식과 같은 Free End 경계조건을 유지하기 위해 시편을 그림 1과 같이 knife edge 형태의 지지대위에 올려놓고 실험을 수행하였다. 지지대는 시편이 진동하는데 어떠한 영향을 주지 않을 재료로 폴리우레탄과 같은 천연고무 재료나 부드러운 스펀지와 같은 재료 등을 이용하여 시편을 지지하여야 한다. 일반적으로 free end 조건을 만족하는 지지하는 방법으로는 실로 매다는 방법과 knife edge 형태가 있는데 실로 매다는 방법의 경우에는 온도변화에 따른 실험을 할 수 있다는 장점을 가지고 있으나 시

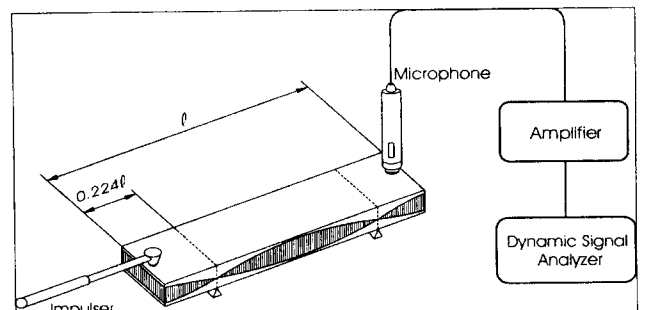


Fig. 1 General block diagram of instrumentation

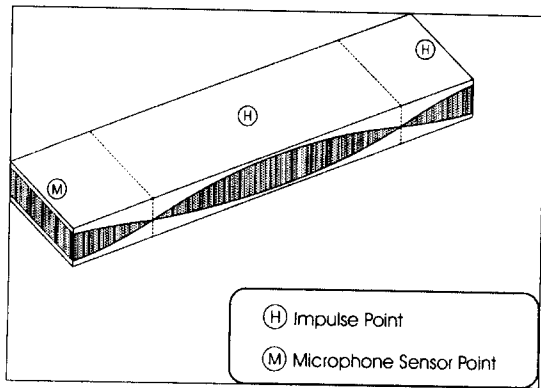


Fig. 2. Hitting and Detective point of Flexural Vibration

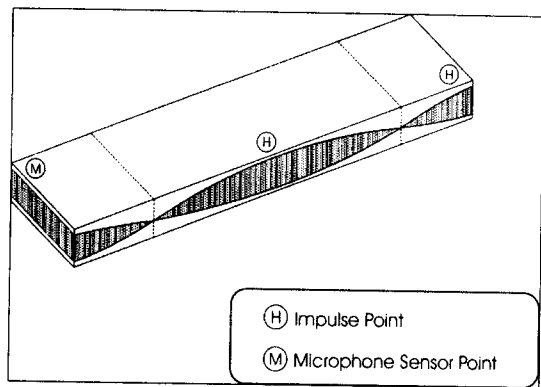


Fig. 3. Hitting and Detective point of Torsional Vibration

편을 지지하는 방법이 용이하지 않고 온도에 따른 실험을 수행하지 않는 관계로 본 실험에서는 knife edge 형태의 지지대를 가지고 시편을 지지하는 방법을 채택하였다. 굽힘 진동의 경우에 있어서 nodal point는 시편의 길이에 0.224 l 인 지점에 위치하게 되므로 nodal point를 벗어난 지점에 시편을 지지해야 한다. 실험은 시편을 지지대 위에 올려놓고 그림 1과 같이 마이크로폰을 대고 충격기로써 시편에 한쪽 면을 가진을 시켜 시편의 다른 쪽 면에서 마이크로폰으로 시편의 공진 주파수를 측정한다. 공진 주파수의 보다 정확한 측정을 위해서 가진을 시편당 10회씩 가하고 그에 해당하는 공진 주파수를 측정하여 평균을 구한 뒤 이를 실험 결과로 취하였다. 횡 탄성계수를 측정하기 위해서는 그림 2와 같이 시편의 한쪽 모서리 부분을 가격하여 마이크로폰으로 측정하고 종 탄성계수를 측정하기 위해서는 그림 3과 같이 시편의 가운데 부분을 가격하여 측정한다.

**실험시편**

실험에 사용된 시편은 Tetrahedron사의 Hot Press를

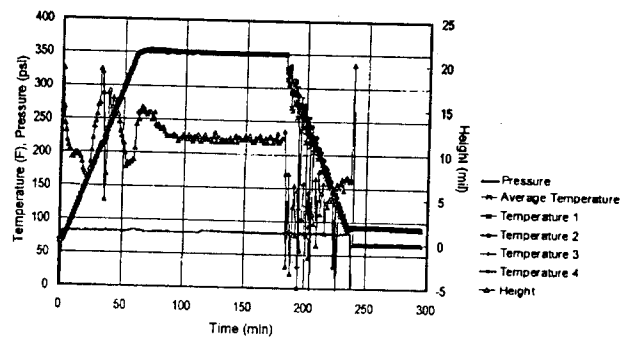


Fig. 4. Curing Cycle

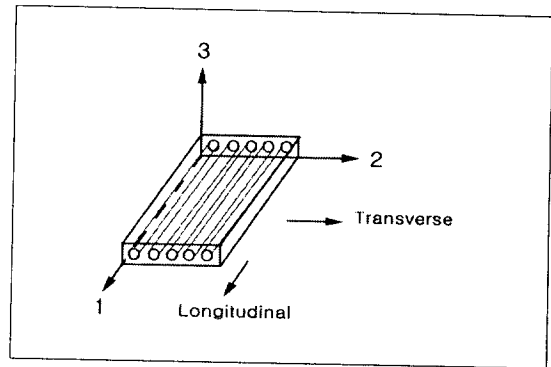


Fig. 5. Schematic Representation of Unidirectional Composites

사용하여 5F/min heating, 350F, 2hr, 5F/min Cooling, Pressure 85 psi 경화조건으로 Hexcel사의 DMS 2224 Class1, Type T, Grade 2인 단일 방향 Carbon-Epoxy prepreg를 그림 4와 같은 조건에서  $V_f = 0.55$ 로 시편의 두께가 1.25~3.97mm가 되도록 적층하여 제작하였다. Carbon Fiber는 Hercules Carbon Fiber Type AS4를 사용하였고 Epoxy는 F584 Resin을 사용하였다. 실험에 사용된 시편은 대한항공연구소에서 제작하였다. 시편은 그림 5와 같은 fiber와 matrix로 구성되어 있는 복합재료이다. 일반적으로 복합재료는 섬유방향과 같은 방향을 L(longitudinal)방향, 섬유방향과 직각인 방향을 T(transverse)방향이라고 하는데 본 연구에서는 L방향을 1방향, T방향을 2방향으로 표시하여 그림 5와 같이 복합재료판재를 섬유방향과 같은 방향으로 절단하여 각각에 대하여 굽힘 공진 주파수와 비틀림 공진 주파수를 측정하여 종 탄성계수와 횡 탄성계수 값을 구하였다.

**4. 결과 및 고찰**

표 1은 Timoshenko beam equation의 적용여부를 결정

Table 1. Standard dimensions of specimens

시 편	길 이(cm)	두께(cm)	폭(cm)	밀 도(g/cm <sup>3</sup> )	두께/길이
1	140.61	1.25	12.95	1.546	0.0091
2	139.48	2.63	12.23	1.507	0.0189
3	137.02	2.67	12.68	1.505	0.0194
4	140.77	3.97	12.02	1.520	0.0282

하기 위해 시편의 길이에 대한 두께의 비와 시편의 dimension을 나타낸 표이다. 1~3의 시편들은 길이에 대한 두께의 비가 0.025를 넘지 않은 경우이고 시편 4의 경우는 넘는 경우이다. 일반적으로 길이에 대한 두께의 비가 0.025를 넘을 경우에는 Timoshenko beam equation을 사용하여 탄성계수를 평가하여야 한다고 알려져 있다. 본 실험에서는 시편의 길이에 대한 두께의 비를 변화시켜 가면서 시편의 길이에 대한 두께의 비가 탄성계수에 어떠한 영향을 주는가를 관찰하였다.

복합재료 판재를 섬유방향으로 절단한 각각의 시편에 대하여 그림 1과 같은 실험장치로 각 시편 당 10회씩 측정된 공진 주파수를 평균을 구하여 나타내면 다음 표 2와 같다. 그림 2과 같이 굽힘 진동에서 측정된 경우 중 탄성계수 값을 그림 3과 같이 비틀림 진동에서 측정된 경우 횡 탄성계수에 해당하는 공진 주파수를 구할 수 있다. 굽힘 진동이 비틀림 진동보다는 낮은 주파수 대에서 공진이 일어나고 각각의 공진 주파수는 모두 1차 모드의 공진 주파수를 채택하였다. 일반적으로 1차 모드의 경우가 진폭의 크기가 가장 크므로 1차 모드의 주파수를 채택하여도 큰 무리가 없다. 그러나 보다 정확한 평가를 위해서는 2차, 3차 ... 이상의 고차모드에서의 공진 주파수를 측정하여 1차 모드의 경우와 비교하는 작업이 필요하다.

실험에 의해 측정된 비틀림 공진 주파수와 굽힘 공진 주파수를 비틀림 공진주파수식인 식(1)과 euler beam equation 식인 식(2)에 대입하여 중 탄성계수와 횡 탄성계수를 구해 보면 표 3으로 나타낼 수 있다.

식에 대입하여 구한 중 탄성계수와 횡 탄성계수는 104.4~107.9Gpa, 4.145~4.520Gpa의 값을 보이고 있다. 각각의 시편에서 중 탄성계수와 횡 탄성계수 모두 약간의 오차를 보이고 있는데 이는 표 1에서 나타나듯이 시편을 적층하는 과정중의 오차로 인하여 시편의 밀도가 차이가

나서 발생된 것으로 보인다. 그림 6과 그림 7은 실험에 사용된 시편의 단면 사진이다. 사진에서 알 수 있듯이 fiber의 배열이 일정치 않고 전체적으로 밀도가 일정치 않게 되었음을 알 수 있다. 이러한 시편 제작과정상의 오류 때문에 중 탄성계수와 횡 탄성계수 모두 약간씩의 오차가 발생한 것으로 사료된다. 또한 일반적으로 알려져 있는 carbon-epoxy의 탄성계수 값보다도 낮게 측정되었다. 본 실험에 사용된 이론식에서 재료의 밀도 값이 변수로 작용하므로 이러한 차이가 발생한 것으로 보이며 앞으로의 실험에서는 이런 문제점들을 고려하여 보다 정확히 제작된 시편이 사용되어야 할 것으로 보인다.

실험을 통하여 구한 횡 탄성계수와 굽힘 공진 주파수를 Timoshenko beam equation에서 회전관성효과를 고려하였을 경우와 전단변형을 고려하였을 경우의 식에 대입하고 회전관성효과와 전단변형효과 모두를 고려하지 않은 euler beam equation에 대입하여 구한 중 탄성계수 값과 대한항공에서 제시한 carbon-epoxy의 탄성계수 값을 표 4에 나타내었다.

표 4에서 알 수 있듯이 Timoshenko beam equation을 적용한 회전 관성 효과 식에서는 Timoshenko beam Equation을 적용하지 않았을 경우의 탄성계수 값과 약간

Table 2. Resonance Frequencies of flexural Vibrations and Torsional Vibrations

시 편	진동의종류	공진 주파수	비고
1	Flexural	552.6(Hz)	E
2	Flexural	1.168(kHz)	
3	Flexural	1.216(kHz)	
4	Flexural	1.711(kHz)	
1	Torsional	1.112(kHz)	G
2	Torsional	2.328(kHz)	
3	Torsional	2.408(kHz)	
4	Torsional	3.422(kHz)	

Table 3. Elastic moduli of specimens

시 편	중 탄성계수(Gpa)	횡 탄성계수(Gpa)
1	107.803	4.339
2	106.452	4.145
3	104.112	4.433
4	104.921	4.520

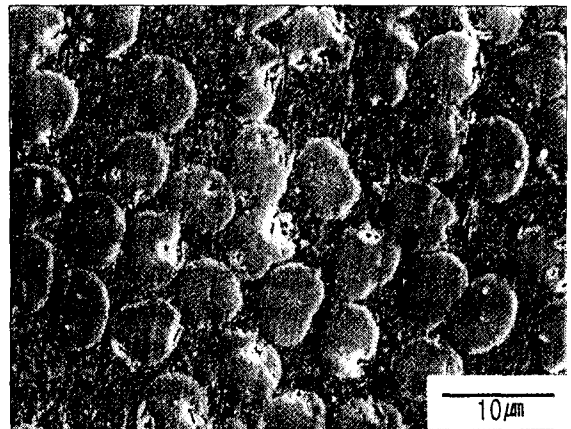


Fig. 6. SEM Micrograph of Carbon-Epoxy Composite



Fig. 7. SEM Micrograph of Carbon-Epoxy Composite

Table 4. Elastic moduli of specimens

시편	시편	Rotary inertia Effects (GPa)	Shear Deformations (GPa)	Euler Equation (GPa)	Talbe (GPa)
Carbon -Epoxy	1	107.819	107.804	017.803	111.863
	2	106.523	106.456	106.452	
	3	104.186	104.116	104.112	
	4	105.076	104.929	104.921	

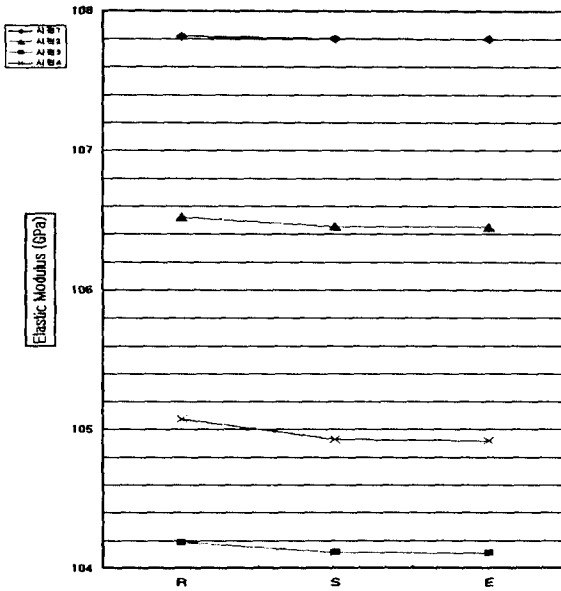


Fig. 8. Elastic moduli of Carbon-Epoxy.

의 차이가 발생함을 볼 수 있다. 또한 Timoshenko beam equation을 적용한 두 번째 식인 전단변형 식에 있어서는 Timoshenko beam equation을 적용하지 않았을 경우에는 회전관성효과보다는 크지 않으나 Timoshenko beam equation을 적용하지 않았을 경우와는 미소나마 차이를 보이고 있다. 따라서 종 탄성계수 값에 있어서는 회전관성에 의한 효과가 전단변형에 의한 효과보다는 크다는 것을 알 수 있다. 회전관성 효과와 전단변형의 효과가 시편 4에서 나타나듯이 시편의 길이에 대한 두께의 비가 0.025를 넘을 경우에는 그렇지 않을 경우보다 재료의 탄성계수 값에 영향을 주고 있음을 알 수 있다. 그림 8 은 회전관성효과와 전단변형 효과를 고려하였을 때와 고려하지 않았을 때의 탄성계수의 변화를 나타낸 그림이다. 그림에서 R : 회전관성효과, S : 전단변형, E : euler equation을 나타낸다.

5. 결 론

본 실험에서 회전관성효과는 Euler beam equation을 적용하였을 때와 비교해서 변화를 보이고 있는 것이 관찰되었고 전단변형은 회전 관성 효과에 비해 그 변화의 폭이 적었음을 알 수 있었다. 이는 재료가 굽힘 진동 (flex-

ural vibration)을 하는 동안 진동에 의한 회전관성효과가 재료의 탄성계수에 영향을 미침을 알 수 있다. 즉, 회전관성효과는 굽힘 진동에서 종 탄성계수에 영향을 주고 있으나 전단변형의 경우 횡 탄성계수에 영향을 주는 요소이므로 굽힘 진동에서는 전단변형이 거의 일어나지 않은 것으로 사료된다. 또한 시편의 길이에 대한 두께의 비가 0.025를 넘는 경우에 있어 Timoshenko beam equation를 고려하였을 경우와 고려하지 않았을 경우의 탄성계수의 변화에서는 길이에 대한 두께의 비가 0.025를 넘는 경우에는 회전 관성 효과와 전단 변형 효과 모두가 길이에 대한 두께의 비가 0.025를 넘지 않은 경우와 비교해서 재료의 탄성계수에 영향을 주는 것을 관찰 할 수 있었다. 재료의 물성치 해석방법에는 크게 미시 역학적 해석과 거시 역학적 해석의 방법으로 나눌 수 있다. 이중 거시 역학적 방법의 측면에서 보면 본 실험의 결과를 고려하지 않고 일반적인 euler beam equation을 고려하여 재료의 물성치를 해석하여도 무방하지만 미시 역학적 관점에서 보면 전단변형효과 보다 회전관성효과 즉, 굽힘을 많이 받는 정밀한 구조물의 설계에 있어서는 Timoshenko beam equation을 고려한 물성치 평가가 수행되어야 한다고 생각한다.

감사의 글

본 연구에 있어 시편의 제작과 연구에 대한 조언을 해주신 대한항공연구소의 최홍섭 박사님께 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. G.R. Cowper "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", *Journal of Applied Mechanics* 33, 335-340 (1966)
2. G.R. Cowper, "A Study of errors due to shear and rotary inertia in the determination of Young's modulus by flexural vibrations", *British Journal of Applied Physics* 1, 1766-1767, (1968)
3. G. Pickett, "Equations for computing elastic constants from flexural and torsional resonant frequencies of vibration of prisms and cylinders", *Proceedings of the American Society for Testing Materials* 45, 846-865. (1945)
4. I.G. Ritchie "Improved Resonant Bar Techniques For The Measurement Of Dynamic Elastic Moduli And A Test Of the Timoshenko Beam Theory." *Journal of Sound and Vibration*, 31 (4), 453-468 (1973)
5. Singiresu S. Rao., "Mechanical Vibrations", Addison-Wesley, 1995.
6. S. Spinner and R.C. Valore, Jr. "Comparison of Theoretical and Empirical Relations Between the Shear Modulus and Torsional Resonance Frequ-

- encies for Bars of Rectangular Cross Section", *Journal of Research of the National Bureau of Standards* Vol. **60**(5), 459-464 (1958)
7. S. Spinner, T.W. Reichard, and W.E. Tefft, "A Comparison of Experimental and Theoretical Relations Between Young's Modulus and the Flexural and Longitudinal Resonance Frequencies of Uniform Bars", *Journal of research of the National Bureau of Standards-A. Physics and Chemistry*, Vol. **644**(2), 147-155 (1960)
8. S. Spinner and W.E. Tefft, "A Method for Determining Mechanical Resonance Frequency and for Calculating Elastic Modulus from These Frequencies", *Proceedings of ASTM*. **45**, 1221-1238 (1945)
9. T.C. Huang, " The Effects of Rotary Inertia and of a Shear Deformation on the Frequency and normal mode equations of uniform Beams with simple end conditions." *J.Appl. Mech* **28**. 579-584 (1961)
10. Timoshenko, S.P. "Vibration Problem in Engineering" Van Nostrand, New York, 3rd. 1955
11. T.J, Dudek, "Young's and Shear Moduli of Unidirectional Composites by a Resonant Beam Method", *J. Composite Materials*, Vol. **4**, 232 (1970)