

비선형 해양시스템의 분기된 초구조에 대한 연구

Analysis of Bifurcated Superstructure of Nonlinear Ocean System



마 호 성*

1. 서 론

혼돈거동을 포함한 고도의 비선형 거동은 여러 해양시스템의 수치해석 및 근사준해석모델 등에서 최근 발견되고 있다(e.g., Bernitsas and Chung 1990; Gottlieb and Yim 1992). [어휘의 혼동을 막기 위하여 '시스템(system)'은 물리적 시스템의 집합을 말하며, '구조(structure)'는 이 연구의 초점인 분기집합(bifurcation set) 또는 혼돈으로의 루트(route to chaos)를 뜻한다.] 이러한 모델의 비선형성은 기하학 또는 불연속성에서 오는 복원력과 2차의 유체계 상호작용에 의한 마찰력(viscous drag)으로 연결된(coupled) 유체동역학적 효과 등을 포함한다. 시스템의 관성 요소는 추가적으로 연결된 대류적 여기력으로 인해 생기는 치우친(biased) 외부여기력을 포함할 수도 있다. 또한, 복잡하고 민감한 횡방향의 동적거동이 저인장을 갖는 비탄성(inelastic : hysteretic) 계선에서 발견되었으며(Triantafyllou

and Yue 1995), 이러한 시스템거동은 비선형 구조-케이블의 상호작용 효과가 커지면 더욱 복잡해질 수 있다.

비슷한 비선형 특성을 갖는 단순시스템은 초기치에 의해 결정되는 공존 주기운동[조화(harmonic), 열조화(subharmonic), 울트라조화(ultraharmonic), 울트라열조화(ultrasubharmonic)] 및 비주기운동[준주기(quasiperiodic), 혼돈(chaotic)] 등의 복잡한 거동을 보임이 수치해석을 통하여 밝혀졌다. 시스템응답의 안정성은 공명(resonance)주위의 복잡한 현상과 초기치에 대한 민감도에 의해 지배를 받는다. 비선형시스템에 대한 연구는 일반적으로 적분이 가능하거나 약한 비선형을 갖는 시스템의 주기해를 얻는데 집중되어왔던 반면(Nayfeh and Mook 1979), 현대에는 전체적 분기와 혼돈거동의 존재를 밝히며 전체적인 시스템거동에 관심이 기울여지고 있다(Guckeheimer and Holmes 1986).

혼돈거동이 일반적인 비선형시스템 고유의 특

* 정회원·연세대학교 토목공학과, 연수연구원

성인 것은 잘 알려져 있으며 (Thompson and Stewart 1986), 그 존재는 현대의 정량적 방법에 의해 밝혀졌다. 이러한 방법의 예로는 Lyapunov exponent와 fractal 또는 multifractal dimension 등이 있다.

비선형시스템의 전체적 거동(global behavior)에 대하여 덜 알려진 국면은 위기 및 간헐적 현상(Grebogi et al. 1990)을 포함한 정교한 초구조(superstructure)의 존재이며, 이러한 초구조는 분기집합을 이루게 된다(Ueda et al. 1990). 이러한 비선형시스템의 분기집합에서 나타나는 초구조의 존재는 전체적 거동에 대한 포괄적인 설명을 가능케 한다. 현시점에서 개발된 방법론은 없지만, 초구조의 간략한 특성과 시스템 매개변수의 수치적으로 적은 변화에 대한 민감도는 향후 실험적 데이터가 유효할 경우 고도의 비선형시스템의 확인(Identification)을 위하여 훌륭한 도구를 제공하는데 쓰일 수 있는 잠재성이 있다.

많은 동적시스템이 단차원 지도에서와 같은 구조를 보이는 반면 (e.g., Simoyi et al. 1982), 연속동적시스템의 거동을 적합하게 분석하기 위한 상세수치해석은 최소한 여차원(codimension)이 분기해석(two bifurcation analysis)이 필요하다. Parlitz와 Lauterborn(1985)은 single-well 포텐셜을 갖는 Duffing 방정식으로 이상화한 단순비선형시스템에서 분기집합의 초구조의 존재를 밝혔다. 또한, 그들은 이 발견을 시스템의 울트라조화 와 울트라열조화 공명 특성에 연결하여 초구조가 단순 비선형시스템은 물론 복잡한 비선형시스템에서도 일반적으로 존재함을 추측해 내었다.

최근에 Ueda et al. (1990)은 two-well 포텐셜을 갖는 Duffing 방정식을 이용하여 전체적 분기를 밝혔으며, Grebogi et al. (1987), Thompson과 Soliman (1990)은 fractal basin 경계를 분석하여 여차원 패턴을 결정하였다. 이러한 현상도 역시 하층을 받는 모든 소산적인(dissipative) 시스템에서 공통적이라는 것이 밝혀졌다.

고도 비선형시스템의 전체적 거동분석 및 매개변수의 확인을 위한 초구조의 실제적 적용에 목적을 두고, 본 연구에서는 단조 파력(monochro-

matic wave excitation)을 받는 비선형 계선 해양시스템의 분기집합 및 혼돈으로의 루트에 내재된 복잡한 초구조(superstructure)에 대하여 분석적으로 연구하였으며 수치해석을 통하여 검증하였다. 먼저 공명, 열조화, 울트라조화, 울트라열조화, 그리고 혼돈운동을 포함한 여러 형태의 비선형거동에 대한 분기기준을 개발하기 위하여 국부적 안정성에 대하여 분석하였다. 그리고 분기기준에 근거한 안정성 지역에 따라 Gottlieb와 Yim (1992)의 결과를 신중히 분석함으로써 분기집합이 갖는 초구조 존재에 대하여 입증하였다. 분기집합에 깔려있는 초구조는 열조화, 울트라(열)조화 영역에 있는 공존운동의 복잡한 일반적 분기패턴을 설명한다. 이상끌개(strange attractor)는 주기 배가 분기시퀀스(period doubling bifurcation sequence)가 무한일 때 (Feigenbaum 1980), 또는 특유의 끌개의 크기에 돌발적 변화가 있을 경우(Ueda 1981)에 이러한 초구조 안에서 일어난다. 초구조는 시스템의 비선형 공명과 깊히 관계하며, 혼돈으로의 경로의 파악과 주어진 조건 아래에서 또 다른 불안정성과의 관계를 가능하게 한다.

2. 시스템모형

Fig. 1에 보이듯이 물에 잠기어 떠있는 계선 해양시스템은 동수력학적 감쇠를 갖는 파방향으로 진동하는 단자유도(SDOF, $x_3 = x_5 = 0$) 비선형시스템으로 모형화 하였다. 운동방정식은 기하학적 복원력과 단순파랑과 일정 조류여기력 아래서 본체운동으로 인한 동적하중의 평형을 근거하여 유도되었다. 지배방정식은 다음과 같이 주어진다(Gottlieb and Yim 1992).

$$(M + \rho \nabla C_A) \ddot{x}_1 + C \dot{x}_1 + 4K$$

$$\left\{ x_1 - \frac{l_c}{2d} \left[\frac{\beta + x_1}{\sqrt{1 + (\beta + x_1)^2}} - \frac{\beta - x_1}{\sqrt{1 + (\beta - x_1)^2}} \right] \right\}$$

$$= F_D + F_I = \frac{\rho}{2} C_D A_b (u_1 - \dot{x}_1) |u_1 - \dot{x}_1|$$

$$+ \rho \nabla (1 + C_A) \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1 - x_1) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \quad (1a)$$

여기서

M = 본체 질량

C = 시스템 감쇠상수

K = 계선의 탄성계수

β = 기하학적 비선형 정도

l_c = 계선의 초기 길이 (d 는 Fig. 1 참조)

C_D = 동수력학 마찰항력계수

C_A = 추가질량계수

A_p = 투영항력 변적

∇ = 변위부피

ρ = 물의 단위질량

x_1 = 서지 (surge) 변위

그리고 u_1 = 유체입자 속도이다. u_1 과 β 는 다음과 같이 주어진다.

$$u_1 = U_0 + \omega a \frac{\cosh kh}{\sinh kh} \cos(kx) - \omega t ;$$

$$\beta = \frac{2b - L}{2d} \quad (1b)$$

여기서 U_0 는 상호선형 조류크기; a , ω , k 는 각각 파랑진폭, 진동수, 그리고 파랑번호이며, L 은 구체의 지름이고 (b 는 Fig. 1 참조), h 는 물깊이이다.

전체질량 ($M + \rho \nabla C_A$)과 거리 d 에 대하여 정규화한 후, 시간을 추가변수로 대입하면, 식 (1a)는 다음과 같이 자율적 (autonomous) 시스템으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x} = y ;$$

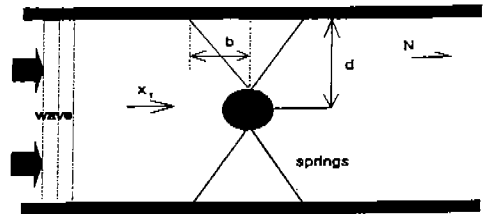
$$\dot{y} = -R(x) - \gamma y + F_D(x, y, \theta) + F_I(x, y, \theta) ;$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2a, b, c)$$

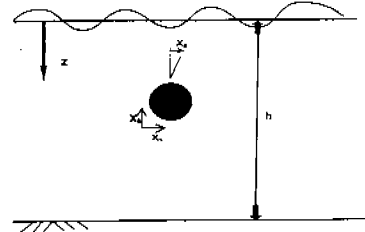
식 (2)에서 x , y 는 정규화된 서지변위와 속도이며, $R(x)$ 는 정규화된 복원력; F_D =정규화된

항력; F_I =정규화된 초기하중; γ =정규화된 시스템 감쇠상수이다.

Fig. 1에서 보듯이, 해양계선시스템의 복잡한 특성은 강성도, 결합항력 (coupled drag force), 관성여기력, 그리고 (거대) 변위 및 속도들간의 고도의 비선형관계에 근거한다. 강성도의 비선형은 계선각도(기하학)로부터 오며, 여기에는 고도 비선형 이점계 (two-point system : $b=0$)로부터 선형에 가까운 사점계 (four-point system : $b \gg d$)가 있다. 본 연구에서 고려한 계선은 선형탄성으로 항상 팽팽하다고 가정하였고 ($l_c / 2d = \tau = 1/2 \sqrt{1 + \beta^2}$), 횡방향으로는 진동하지 않는 것으로 가정하였다. 이러한 단순가정은 케이블의 특성 및 처짐이 비선형 동적 현상의 주요인이었던 Triantafyllou와 Yue (1995)의 비선형, 비탄성 (inelastic) 또는 이력현상 (hysteretic), 그리고 저인장 케이블과는 직접적인 대조를 이룬다. 시스템의 복잡성 때문에 완전해 (exact solution)는 비현실적이며 따라서 근사해 (approximate solution)의 개발이 필요하다.



(a) plan view



(b) profile view.

Fig. 1 Multi-point moored ocean system

3. 근사해

본 연구에서는 비선형 마찰항력 및 대류적 관성력에 의한 우수고조파(even harmonics)를 고려하기 위하여 근사해(approximate solution)를 구하는데 조화밸런스방법(harmonic balance method)을 선택하였으며 다음과 같이 근사해를 가정하였다(Gottlieb과 Yim 1992).

$$x_{0(n/m)} \cong A_{0(n/m)} + \sum_i A_{i(n/m)} \cos \left[i \frac{n}{m} \theta + \Psi_{i(n/m)} \right] \quad (3a)$$

$$y_{0(n/m)} \cong -\omega \frac{n}{m} \sum_i i A_{i(n/m)} \sin \left[i \frac{n}{m} \theta + \Psi_{i(n/m)} \right] \quad (3b)$$

여기서, $A_{0(n/m)}$, $A_{i(n/m)}$, $\Psi_{i(n/m)}$ = 해의 진폭, 위상; I = 근사차수 ($i=1, 2, 3, \dots, I$); 그리고 n/m = 울트라열조화의 차수(order)이다.

근사해(3)를 시스템방정식(2)에 대입하여 제곱한 후 같은 차수의 삼각함수를 비교하면, 미지수인 진폭과 위상차를 유도할 수 있으며, 시스템은 비선형인 유한개수의 대수학방정식의 집합으로 바뀌어진다.

$$S_j [A_0, A_{i(n/m)}, \Psi_{i(n/m)}] = 0 \quad (4)$$

여기서, $j=1, 2, 3, \dots, 2I+1$.

미지수인 진폭 및 위상에 대한 집합의 해는 반복적인 Newton-Raphson절차를 이용하여 얻으며, (Gottlieb and Yim 1992) 비선형정도를 특징짓는 해밀톤시스템의 주파수응답(frequency response : backbone)곡선은 여기력의 주파수를 변화하여 수치적으로 구할 수 있다.

4. 안정도 분석

근사해의 지역적 안정도는 섭동해(perturbed solution), $x(t) = x_0(t) + \epsilon(t)$ 을 고려하면 분석할 수 있으며, 섭동해를 식(2)에 대입하면 변분방정식(variational equation)이 된다. 변분방정

식을 주기계수함수(periodic coefficient function) $H_{1,2}[x_0(\theta), y_0(\theta)] = H_{1,2}[x_0(\theta+2\pi), y_0(\theta+2\pi)]$ 과 함께 선형화하면 상미분(ordinary differential) 방정식으로 이루어진 집합을 얻을 수 있다.

$$\dot{\epsilon} = \eta; \quad \dot{\eta} = H_1(x_0, y_0)\eta + H_2(x_0, y_0)\epsilon \quad (5a)$$

$$H_1 = -\gamma - 2 \frac{\mu \delta}{\omega} \left| u_0 - \frac{y_0}{\omega} \right| + \mu \omega^2 \kappa \left[\frac{1}{\omega} - 1 + \left(u_0 - \frac{y_0}{\omega} \right) \right] u_0 \quad (5b)$$

$$H_2 = -\alpha(1 - \tau([1 + (\beta + x_0)^2]^{-3/2} + [1 + (\beta - x_0)^2]^{-3/2}) - 2\mu\delta\kappa \left| u_0 - \frac{y_0}{\omega} \right| + u_0 + \mu\omega^2\kappa^2 \left\{ (u_0 - f_0) \left[\frac{1}{\kappa} - (u_0 - y_0) \right] + u_0'^2 \right\} \quad (5c)$$

식(5b), (5c)에서, $u_0 = f_0 + f_1 \cos(\kappa x_0 - \theta)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \mu, \tau, f_0, f_1$ 그리고 h' 은 시스템과 여기력 매개변수이다. 근사해(3)를 식(5b)와(5c)에 대입하여 $H_{1,2}(x_0, y_0)$ 을 Fourier급수 $[H_{1,2}(\theta)]$ 로 전개하면 일반화된 Hill의 변분방정식이 얻어진다.

$$\dot{\epsilon} = \eta; \quad \dot{\eta} = H_1(\theta)\eta + H_2(\theta)\epsilon \quad (6a)$$

여기서 H_1, H_2 는 다음과 같이 주어진다.

$$H_1 = \xi_{0(n/m)} + \sum_j \xi_{Cj(n/m)} \cos \left(j \frac{n}{m} \theta \right) + \xi_{Sj(n/m)} \sin \left(j \frac{n}{m} \theta \right) \quad (6b)$$

$$H_2 = \zeta_{0(n/m)} + \sum_j \zeta_{Cj(n/m)} \cos \left(j \frac{n}{m} \theta \right) + \zeta_{Sj(n/m)} \sin \left(j \frac{n}{m} \theta \right) \quad (6c)$$

Floquet이론과 함께, 식(6a)의 특수해인 $\epsilon =$

$\exp(\nu t)Z(t)$ 은 대칭 및 비대칭응답에 대한 안정한 지역을 파악하는데 사용될 수 있다.

저차수 ($I=1$)이 항으로 된 비대칭 2π 주기해인 $x_0(\theta) = A_0 + A_1 \cos(\theta + \Psi_1)$ 은 -소진폭 과량과 약 조류에 상응하는 -주기배가 분기를 보인다 [Fig. 2(a)]. Fig. 2(a)에서 (0, 0)에서 출발한 주공명은 조화벨런스 방법을 안정한계 ($\nu=0$)에 적용함으로써 얻어진다.

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \alpha \left(\xi_0 - \frac{\xi_1^2}{\xi_0} \right) \gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + 2\alpha\gamma^2 \left[\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \right)^2 - 1 \right] + \alpha^2 \left[\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \right)^2 - \frac{\xi_2}{\xi_0} \right]^2} \right\} \quad (7a)$$

여기서 $\xi_1 = \sqrt{(\xi_{c1}^2 + \xi_{s1}^2)}$; $\xi_2 = \sqrt{(\xi_{c2}^2 + \xi_{s2}^2)}$ 이다. Fig. 2(a)에서 주공명의 오른쪽에 위치한 두 번째 안정지역은 배가된 주기 $\varepsilon(t) = b_{1/2} \cos(\theta)$ 를 대입하여 식 (6)을 풀면 얻어진다.

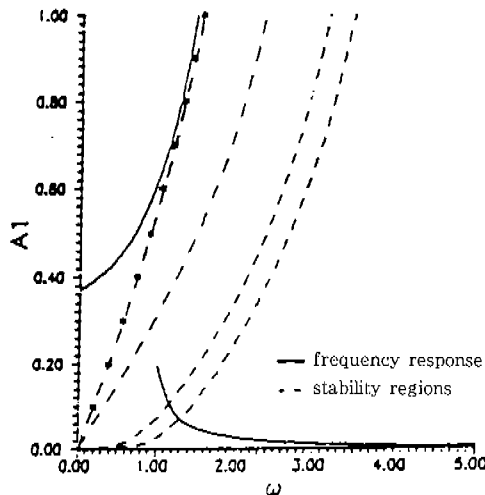
$$\omega^2 = 2 \left(\alpha \xi_0 - \gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 - 2\alpha\gamma^2 \xi_0 + \alpha^2 \xi_1^2} \right) \quad (7b)$$

여기서, $\gamma = \gamma + 1(8/3\pi)\mu\delta\sqrt{f_0^2 + f_1^2}$ 이다.

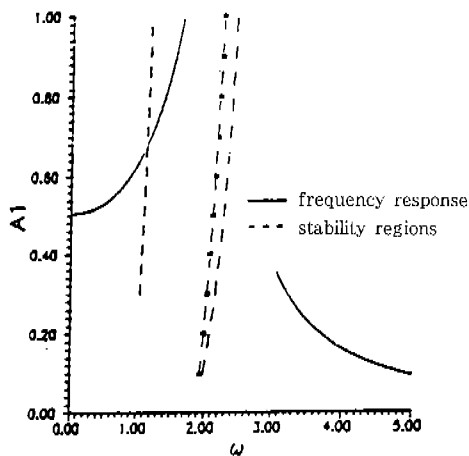
저 차수 단항으로 이루어진 대칭해 $x_0(\theta) = A_1 \cos(\theta + \Psi_1)$ 은 소진폭 과량 ($f_0=0, f_1 \neq 0$)에 대응하는 주기 배가현상을 보이지는 않지만 $Z(\theta) = Z(\theta + \pi)$ 해가 그 안정성을 잃는 pitchfork 분기를 결정한다 [Fig. 2(b)]. 이러한 이차 근사 울트라 조화 안정지역경계 (stability region boundaries)는 $\varepsilon(t) = b_0 + b_2 \cos(2\theta)$ 를 대입하여 식 (6)을 풀으로써 얻어진다.

$$\omega^2 = \frac{1}{8} \left\{ \alpha \left(\xi_0 - \frac{\xi_2}{\xi_0} \right) - \gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + 2\alpha\gamma^2 \left[\left(\frac{\xi_2}{\xi_0} \right)^2 - 1 \right] + \alpha^2 \left[\left(\frac{\xi_2}{\xi_0} \right)^2 - 2\frac{\xi_1}{\xi_0} \right]^2} \right\} \quad (8)$$

위에서 대칭 및 비대칭해의 안정성 손실을 보였으며, Fig. 2에서 주파수곡선과 안정지역과의



(a) wave and current



(b) wave

Fig. 2 Stability diagram of nonlinear restoring force with linearized excitation

교차로써 주기배가현상을 나타내었으며, 이를 수치적으로 입증하였다. 비슷한 해석적차를 적용하여 고차의 열조화 및 울트라열조화 공명을 확인할 수도 있다. 주기 배가분기의 경로에 대한 해석적인 예측은 수치방법을 통해 이미 확인되었다 (Gottlieb and Yim 1992).

복잡한 초구조(다음절 참조)의 존재가능성에 대해 Gottlieb과 Yim(1992)은 포괄적인 수치해석을 수행하여 Fig. 7과 8에 나타난 안정지역과 함께 하는 다양한 형태의 비선형응답의 예를 통해 보였다. pitchfork분기, 동적대칭의 파괴(dynamic symmetry breaking), 비대칭 열조화의 다수발생, 열조화 영역에서의 주기 배가, 울트라조화 영역에서의 주기 배가, 그리고 조화의 공존 및 상이차수의 배수열조화 등이 그 예이다(Figs. 7-12, in Gottlieb and Yim).

5. 초구조의 식별

Duffing 방정식으로 표현되는 단순이상화된 비선형시스템에서의 복잡한 초구조는 Parlitz와 Lauterborn(1985)에 의하여 수치적으로 밝혀졌다. 전체적 거동(global behavior)은 위기와 간헐적 현상(crisis and intermittent phenomena)(Gregobi et al. 1983)과 분기집합의 조직(Ueda et al. 1990)을 포함한다. 초구조는 Henon map과 같은 이상화된 단순시스템에서의 여차원(co-dimension)-이분기(two bifurcation)문제(Holmes and Whitley 1984)에서 발견되었으며 수치적으로 결정되었다.

단순비선형을 가진 시스템의 정성적(qualitative) 관찰이나 Gottlieb과 Yim(1992)이 분석한 복잡한 비선형시스템의 수치 해석결과 등의 동기로부터 본 연구에서는 해양계선시스템의 초구조에 대하여 상세한 수치적 해석을 수행하였다. 매개변수 영역상 저차수 및 고차수 공명의 근접공간(space near low order and higher order resonances)에서의 안정지역을 이용하여 다양한 형태의 응답의 존재를 찾는 수치해석과 전체적 형식(global pattern)을 식별하였다(Fig. 2). 영역 $[\alpha=1 \beta=(0, 1), \tau=1/2\sqrt{1+\beta^2}, \gamma<\delta=0.1, \mu f, \omega]$ 안에서 공명구간 주위에서의 저열조화, 울트라조화 그리고 울트라열조화에 대한 비슷한 분기형식(bifurcation pattern)이 발견되었다. Fig. 3에 이러한 응답에 대한 초구조를 나타내었다. 이러한 형식은 거대 여기력(μf)에 대한 점근적인

거동인 공명뿔(resonance horns)의 교차로 이루어진다. 공존해(coexisting solution)를 묘사하는 공명선의 교차(intersecting resonance line: tangent and homoclinic bifurcation)는 몇몇 연구(e.g., Holmes and Whitley 1984)에서 Henon map에 대하여도 유도되었다. 등가주기집단(e.g., $n/m=n/3$)은 서로 교차하며 같은 기울기를 갖는다는 사실을 주목해야 한다. 또한 뿔의 폭은 상대적 감쇠비($\gamma^*\propto\gamma/\delta$)가 지배하는 것을 알아내었다. 그러므로 여기력과 시스템의 매개변수 $[\mu f, \omega/\omega_0, \text{ where } \omega_0=\omega_0(\alpha, \beta, \gamma/\delta)]$ 간의 무차원 관계를 묘사하는 매개변수로 이루어진 제어공간을 구할 수 있다. Ueda(1980)와 Ueda et al(1990)은 여차원 이분기(two bifurcation)를 감쇠와 여기력 진폭간의 매개변수 공간으로 규정한데 반해 parlitz와 Lauterborn(1985)은 울트라조화공명을 여기력 진폭과 주파수의 향으로 묘사하였다.

초구조를 정하는 분기를 구분할 때 일반적으로 분기번호(bifurcation number)를 이용한다. Holmes와 Whitley(1984)는 일차원맵(1D map)의 관례를 확장하여 이차원 Henon map을 분석하였다. Ueda et al(1990)은 주기성(m)과 해의 종류를 구분하기 위한 임의지수(arbitrary index)를 설명하는 충분조건을 규정하였으며, Parlitz와 Lauterborn(1985)은 하중의 일주기동안의 최대 주기해의 수인 울트라조화지수(ultraharmonic index)를 울트라열조화를 규정하는 주기지수와 함께 규정하였다.

수중의 계선시스템에 대한 열조화, 울트라조화, 울트라열조화의 분기형식을 구분하기 위하여 비선형 공명관계 $n\omega\sim m\sqrt{\alpha_1}$ (ω =과도의 주파수, α_1 =비선형강성도의 선형항 계수)를 이용하여 공명수의 첫 번째 지수 $[n/m]$,를 결정하였다. 그러나 n/m 은 상대적으로 소수일 수 있다. 결과적으로 공약수와 비의 차수(order of ratio)를 결정하기 위하여 두 번째 지수 $[j]$ 가 필요하며, 여기서 m 은 응답의 주기를 나타낸다. 마지막으로, 응답(결정론적 정수와 fractal 혼돈)의 차원 $[d]$ 를 결정하기 위하여 세 번째 지수가 필요하다.

수중계선시스템의 분기집합 안에 존재하는 복잡한 초구조를 설명하기 위하여 Table. 1을 통해 이를 나타내었으며, 이러한 복잡 초구조의 이해를 통해 공존거동이나 pitchfork 또는 주기 배가분기현상을 밝혀낼 수 있다. 표에서 n/m 은 기본공명구조이고 j 는 차수지표를 나타낸다. 열과 첫 번째 행은 울트라 n , 열(sub) m 에 대한 지표이다. 지표 j 는 등비(equal ratio)를 판단할 수 있고, 따라서 표의 대각선은 울트라조화와 열조화영역을 구분한다. 국부적 분석을 통해 발견된 공존성은 공명수가 비슷한 n/m 의 비와 $R_{n/m,j}$ 로써 (예 : $R_{1/2,1}$ 또는 $R_{3/5,1}$) 결정된다. 또한 짝수 (n 또는 m)로 표현되는 울트라조화해는 비대칭인 반면 소수로 표현되는 해는 대칭이나 자기유사해(self-similar solution)이다. 이러한 ($n/m=1/2, 4/5$)인 공존해와 독립적 자기유사해($n/m=3/5$)는 Gottlieb와 Yim(1992)에 의해 발견되었다.

식(8)에 의해 지배되는 Pitchfork 분기현상(Fig. 2(b)참조)은 매개변수 공간에서 이중파트너궤도(two partner orbits)로 전개되는 대칭해의 안정성 손실을 묘사한다(Gottlieb and Yim 1992 참조). 이러한 분기현상은 울트라조화영역에서 차수지표(order index)인 $n/m=2/1$ 에 대해 $j: 1, 2$ 로 표현될 수 있다 (e.g., $R_{2/1,1} \rightarrow R_{2/1,2}$). 이와 유사하게 식(7b)에 의해 지배되는 주기 배가분기현상도 열조화영역 ($j: 1, 2$ for $n/m=1/2$)에서 차수지표로 묘사된다 (e.g., $R_{1/2,1} \rightarrow R_{1/2,2}$). 또한 울트라조화 영역에서는 주기배가는 $j: 2, 3$ (for $n/m=1/2$)으로 표현된다 (e.g., $R_{2/1,2} \rightarrow R_{2/1,3}$). (Gottlieb and Yim 1992의 Fig. 11 참조).

시스템거동의 수치해석을 통해 도식적인 분기도형(bifurcation diagram)을 제작할 수 있는데(Fig. 4), 이러한 분기도형은 다양한 초기치 집합아래, 주어진 매개변수 영역에서 단일체어변수를 변환함으로써 얻을 수 있다. Fig. 4의 분기도형은 다양한 열조화와 울트라열조화 해로써 전체 영역에 걸쳐 주기궤도의 존재를 보이고 있으며,

해들은 공약주기지표(common periodicity index) m 에 의해 분리된다. 대칭(S)과 비대칭(AS)해($n/m=n/1$) 또한 pitchfork 분기변환(bifurcation transition)을 보이면서 나타난다. 편의를 위해 공명선(resonance line= $R_{n/m}$ in dashed line)을 중요해에 더하였으며, 한 예로써 울트라열조화 응답 $R_{2/3,1}$ 1이 $R_{3/1}$ 공명선과 $R_{2/1}$ 공명선 사이에서 발견되었다 (Fig. 4 : $\omega \approx 4, n/m=n/1$). 공명수차수(resonance number ordering)에 의해서 밝혀진 울트라열조화중 모든 해가 수치해석적으로 검증은 안되지만, 주된 조화 또는 저차수(low order)열조화 및 울트라열조화 해는 정확하게 묘사됨이 밝혀졌다. 완전한 비선형 정상응답(steady-state response)을 얻기 위해서는 가능한 모든 초기조건을 표현하는 fractal basin경계를 고려하여야 한다.

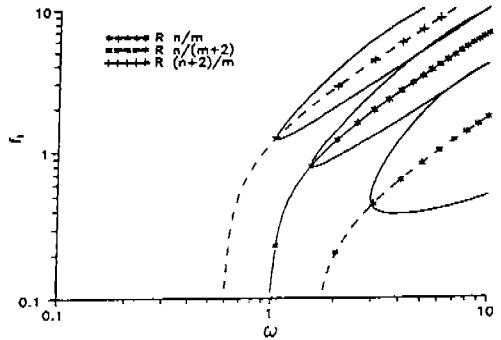


Fig. 3 Superstructure in bifurcation sets

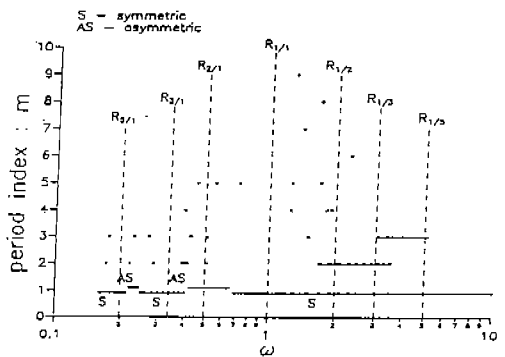
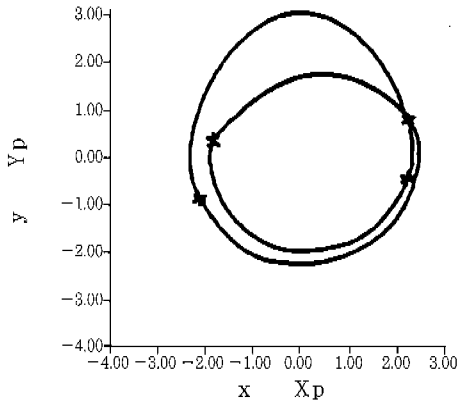
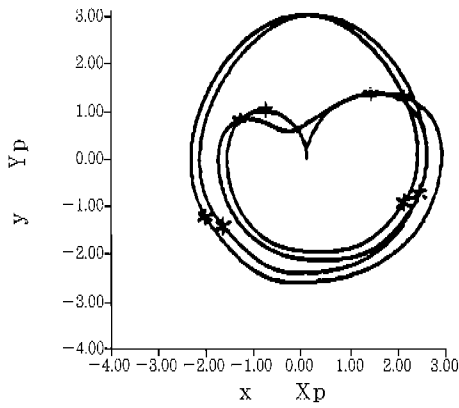
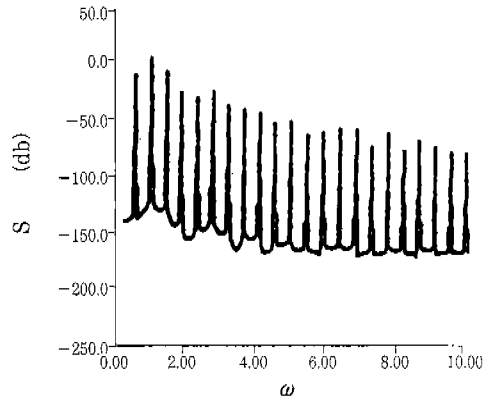


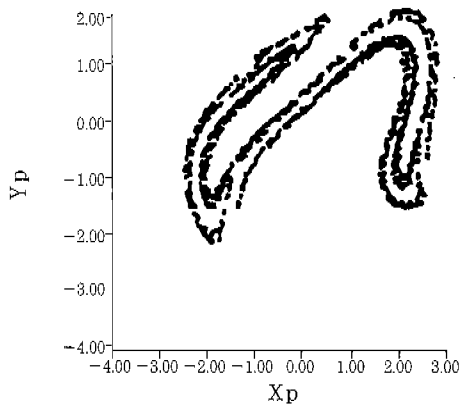
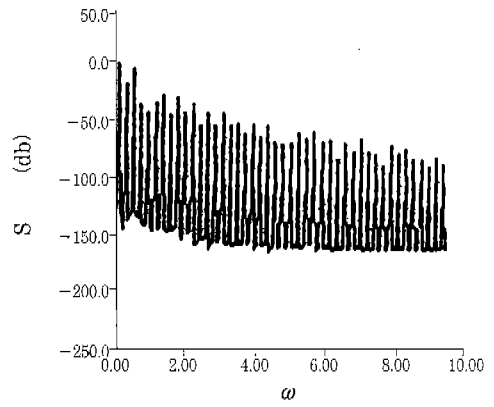
Fig. 4 Bifurcation diagram



(a) $\omega=1.7, (n/m, J) = (1/2, 2)$



(b) $\omega=1.68, (n/m, J) = (1/2, 4)$



(c) $\omega=1.65, (n/m, J) = ("1/2", \infty)$

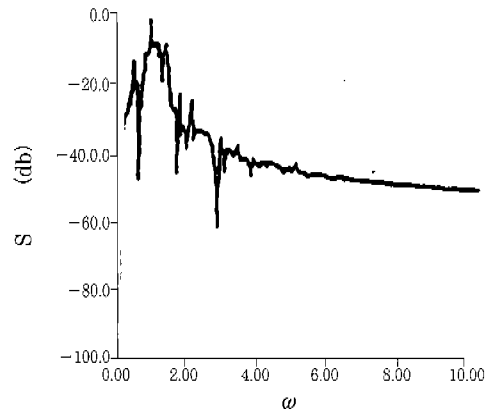
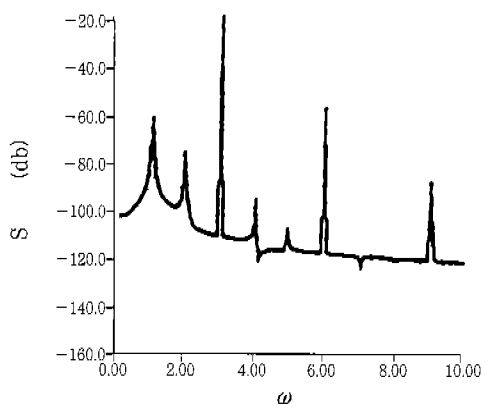
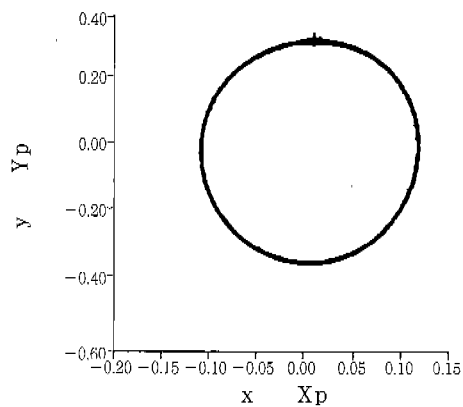
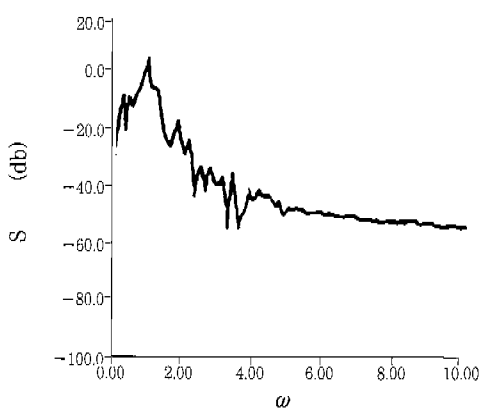
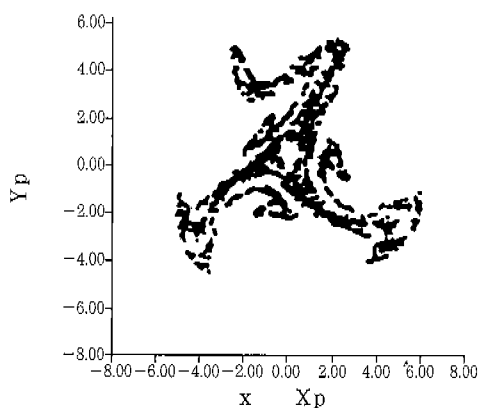


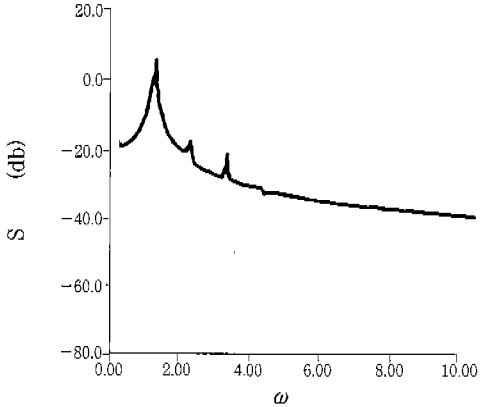
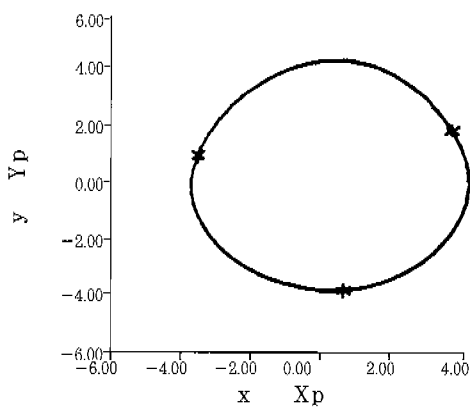
Fig. 5 Evolution of chaotic attractor via period doubling



(a) $\omega=3.05, (n=m=1)$



(b) $\omega = 3.10, (n/m, J) = ("1/2", "1")$



(c) $\omega=3.15, (n/m, J) = (1/3, 1)$

Fig. 6 Evolution of chaotic attractor via explosion

6. 혼돈거동으로의 경로

혼돈 전 (prechaotic) 과 혼돈 후 (postchaotic) 운동의 스펙트럼 구성요소에 의해 밝혀졌듯이 이상 끌개 (strange attractor) 로 가는 가능경로는 비대칭 및 대칭해의 전개로써 묘사될 수 있으며, 연속한 주기증가는 하나의 가능경로이다. 주기 배가 (Fig. 5) 를 포함한 이러한 경로는 차수지표 (ordering index) $j : 2, 4, 8 \dots$ (e.g., $R_{1/2,1} \rightarrow R_{1/2,2} \rightarrow R_{1/2,4} \rightarrow R_{1/2,8}$) 를 이용하여 초구조 안에서 추적할 수 있다. 혼돈거동으로 이어지는 주기 배가 경로는 추가적인 짝수조화 (even harmonics) 의 출현과 함께 발견되었다 (Fig. 5). 이와 유사하게 추가적인 기수조화 (odd harmonics) 의 출현에 의한 주기 삼배가 경로 (period tripling route) 도 확인되었으며 이는 수치적으로 검증하였다. 그러므로 주기 증가 시나리오는 분기집합 안에 있는 내부 공명뿔 (internal resonance horn) 의 축적을 나타낸다. 주기 증가 시퀀스가 무한하면, 시스템의 자유도를 나타내는 차원지표 (dimension index, d) 는 정수값을 못 가지며, 특유의 fractal 차원을 갖게된다 [e.g., $R_{1/2, \infty}$, $R_{2/3, \infty}$ Fig. 5 (c)].

본 연구의 결과에 따라 새로운 혼돈거동으로의 경로가 주기운동의 주변에서 생기는 돌발적인 변화에서 발견되었는데, 이는 국부적 분기접선에서 발생하며 $2m\pi/n$ 울트라열조화의 축약과 관계된다. 이 경로는 매개변수영역에서 짧게 존재하며 saddle에 의해 분리된 (heteroclinic tangency로 규정된 분기) 두 개의 이웃 끌개간에서 "상충 (collision)" 이 일어날 때 이상끌개에서 최고조를 이룬다. 계선해양시스템에서는 홀수 ($m, n =$ 짝수) 의 자기유사 열조화와 울트라열조화 시나리오에 대하여 이상끌개가 발견되었으며, 반면 비대칭해의 짝수 ($m, n =$ 기수) 울트라열조화 시나리오는 과도기적 혼돈거동에서만 나타났다.

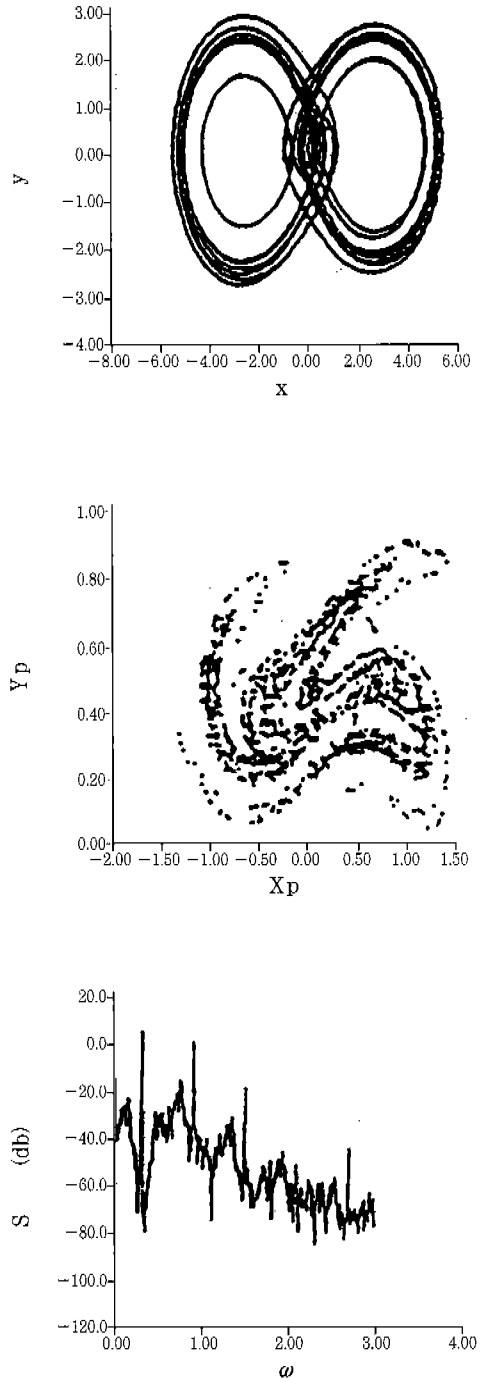


Fig. 7 Chaotic attractor in ultrasubharmonic domain [$\omega=0.33, (n/m, J) = (7/3, \infty)$]

7. 결 론

본 연구에서는 복잡한 비선형시스템의 전체적 응답거동의 중요한 (그리고 잠재적으로 유익한) 특성을 상세히 분석하였다. 특히 강성도 및 여기력에 내재된 복잡한 비선형을 소유하는 수중다점계선해양시스템의 분기집합에 내재된 초구조와 혼돈거동의 가능경로에 대하여 해석적 및 수치적으로 분석하였다. 분기는 국부적 안정해석을 통하여 매개변수 영역상에서 확인되었으며, 정상 상태의 분기초구조는 수치해석을 통하여 밝혀졌다.

비선형정도와 해의 차원을 나타내는 공명수를 유도하였으며, 차수공명수를 통해 공명주위의 구조를 밝혔으며 열조화, 울트라조화, 울트라열조화 등과 같은 고도의 비선형 응답의 발생을 예측할 수 있음을 보였다. 결과에서 얻은 초구조는

시스템의 안정성과 이상끌개의 징후를 지배하는 메커니즘임도 밝혔다. 혼돈으로 가는 주기증가의 무한시퀀스에 대한 유연한 변환 외에 돌연한 격발(saddle에 의해 분리된 인접끌개의 충돌)로 인한 혼돈으로의 가능경로도 발견되었으며 이는 수치적으로도 입증되었다.

발 체 논 문

본 기사는 다음의 논문을 발췌하여 요약 정리한 기사입니다.

Gottlieb, O., Yim, S.C.S., and Lin, H., "Analysis of Bifurcated Superstructure of Nonlinear Ocean System", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 123, No. 11, Nov. 1997, pp. 1180~1187. 