무요소 방법에서의 적응적 해석을 위한 오차의 평가

Adaptive Analysis and Error Estimation in Meshless Method

정 흥 진*
Chung, Heung-Jin

요 지

본 연구에서는 무요소방법에 적응적 해석기법을 적용하기 위한 부분 및 전체오차의 평가기법을 제안하였다. 본 연구에서 제안한 오차의 평가방법은 무요소방법에서 계산된 응력이 오차가 큰 영역에서 진동한다는 특성을 이용한 것으로 해석결과 얻어진 응력을 낮은 차수의 형상함수로 투사하는 후처리를 함으로써 가상진동모우드를 제거하고 이때 얻어진 투영응력과 원래의 응력을 비교하여 부분오차 및 전체오차를 구할 수 있다. 1차원 및 2차원 예제해석을 통하여 투영응력을 구할 때 가능한 한 작은 영향영역을 사용하는 것이 바람직하다는 것을 보였으며 이는 영향영역의 크기를 과도하게 설정한 경우 투영응력을 과대 평가할 수 있기 때문이다. 본 연구에서 제안한 오차의 평가기법은 다른 무요소 방법에 적용될 수 있다.

Abstract

In this paper, local and global error estimates for the element-free Galerkin (EFG) method are proposed. The essence of proposed error estimates is to use the difference between the values of the projected stress and these given directly by the EFG solution. The stress projection can be obtained simply by taking product of shape function based on a different domain of influence with the stresses at nodes. In this study, it was found that the effectivity index is optimized if the domain of influence in stress projection procedure is the smallest that retains regularity of the matrices in EFG. Numerical tests are shown for various 1D and 2D examples illustrating the good effectiveness of the proposed error estimator in the global energy norm and in the local error estimates.

Keywords : *meshless method, adaptive analysis, error estimation, element-free galerkin method*

1. 서 론

유한요소법은 1950년대 이후 공학적 문제를 해결하는 강력한 도구로써 널리 이용되어 왔으며 최근에는 컴퓨터의 비약적인 발전에 힘입어 예전에는 불가능했던 복잡한 거동의 해석에 이를 이

* 정회원·전주대학교 토목환경공학과, 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

용하려는 여러 연구들이 활발히 진행되고 있다. 하지만 특수한 문제의 경우 유한요소법이 가지는 한계 때문에 효과적인 해석이 불가능한 경우가 있다. 예를 들어 유한요소법을 이용하여 압연강재의 생산과정에서의 재료의 거동을 예측하는 경우 해석과정에서 대변형이 일어나고 경계조건도 시간에 따라 변하게 된다. 이 경우 초기에 구성했던 유한요소체눈이 극심하게 찌그러지는 현상을 피할 수 없고 이에 따라 해의 정확도에 많은 영향을 미치게 된다. 구조물의 파괴형상을 예측하려는 경우나 새롭게 개발된 구조재료의 해석에서도 복잡하게 진행되는 균열을 고정된 유한요소체눈으로 적절히 모델링하는 것이 거의 불가능하다.

일반적인 유한요소해석은 초기에 형성된 체눈을 해석의 진행에 따라 그대로 사용하기 때문에 불규칙하게 진행하는 균열해석의 경우 초기 체눈의 형상을 따라 균열이 진행될 수 밖에 없으며 이에 따라 해석이 부정확하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 적응적 체눈 세분화기법이 활발히 연구되고 있으나 체눈의 재형성과정이 복잡하고 재형성된 새로운 체눈에 대한 물리량을 재구성하는데 또 다른 오차가 생기게 되는 문제점이 있다[1].

이러한 유한요소법의 한계를 극복하고 좀더 유연한 수치해석법의 필요에 의해 무요소방법(Meshless Method)이 최근 활발히 연구되고 있다. 유한요소법은 절점에 인접한 요소에 의해 그 절점의 영향권이 결정되지만 무요소 방법의 경우는 요소의 개념 없이 그 절점을 중심으로 하는 일정한 크기의 원(또는 구)이 그 절점에서의 물리량을 결정한다는 점에서 근본적인 차이가 있다. 따라서 유한요소해석에서 필수적인 체눈을 구성할 필요가 없고 단지 절점의 좌표값만을 필요로 하게 된다. 무요소방법을 이용하여 균열의 진행문제를 해석하는 경우 새롭게 생성되는 균열은 기존의 절점을 이동할 필요없이 새로운 절점만을 그 위치에 추가시키면 되므로 효율적인 해석이 가능하다는 장점이 있다.

무요소방법은 원래 경계조건이 모호한 천체물리학적 현상을 해결하려는 시도로 제안되었고 Libersky와 Petschek[2]이 이를 고체역학에 적용하였으며 그 후 여러 연구자들에 의해 개선되었다. 이와는 별도로 Nayroles등[3]은 기저함수(Basis Function)와 가중함수(Weight Function)을 이용한 Diffuse Element Method를 제안하였고 Belytschko등[4]은 이 방법이 결국은 Lancaster의 이동최소자승법(Moving Least Square Method)[5]과 동일한 개념이라는 것을 밝히고 element-free Galerkin(EFG) method를 제안하여 파괴역학이나 균열해석등에 이용하였다. Liu등[6]은 EFG와 유사하게 Convolution 적분을 이용한 RKPM(Reproducing Kernel Particle Method)을 제안하였다. 그 외에도 여러 연구자들에 의해 개념은 유사하지만 구현방법이 조금씩 다른 무요소방법들이 제안되었는데 Hp-cloud Method, Partition of Unity Finite Element Method, Particle in Cell, Generalized Finite Element Method등이 있고 Belytschko는 이 방법들을 비교 정리한 논문[7]을 발표하였다.

무요소방법은 체눈의 개념이 없어서 절점의 생성이나 소멸이 상대적으로 자유로워 적응적 방법의 개념을 적용하기가 매우 편리하다. 최근 무요소방법에 있어서 적응적 방법과 오차평가기법에 대한 여러 연구가 진행되고 있다. Duarte 와 Oden[8]은 Hp-Cloud Method에서 해석영역 내부와 경계부분의 잔차(Residual)를 이용하여 오차를 평가하였고 Liu 등[9]은 형상함수의 차수를 분리하는 방법으로 RKPM에서 적응적 해석을 하였다. 하지만 이 방법들은 각각 계산이 복잡하고 오차의 일관된 평가가 불가능하다는 단점을 가지고 있다.

일반적인 유한요소법에서는 요소사이에 응력의 연속성이 없는 소위 응력의 점프현상이 있어서 많은 연구자들이 좀더 정확하고 연속적인 응력분포를 얻기위한 연구를 하였다. 대표적인 방법이 응력평탄화(Stress Smoothing)방법인데 이 방법은 해석결과 얻어진 응력의 분포를 최소자승법을 이용하여 절점에서의 응력으로 변환하고 이를 형상함수를 사용하여 응력분포로 이용하는 방법이다. 이후처리된 응력분포와 원래의 응력분포

의 차이로 오차를 평가하고 이를 이용하여 적응적 해석을 한다. 하지만, 무요소방법의 경우는 요소자체가 없기 때문에 전 해석영역에서 응력의 분포가 연속이므로 이러한 불연속적인 응력분포 특성을 오차의 평가에 이용할 수 없다.

본 연구에서는 무요소방법에 적응적 해석기법을 적용하기 위한 오차의 평가기법을 제안하였다. 이 방법은 무요소방법에서 계산된 응력이 오차가 큰 영역에서 진동한다는 특성을 이용한 것으로 해석결과 얻어진 응력을 낮은 차수의 형상함수로 투사하는 후처리를 함으로써 가상진동모우드를 제거하고 이때 얻어진 투영응력과 원래의 응력을 비교하여 부분오차 및 전체오차를 구할 수 있다. 이 점에서 본 연구에서 제안한 오차평가기법이 Zienkiewicz-Zhu오차[9]와 비슷하다고 할 수 있다.

2. 무요소방법(EFG 방법을 중심으로)

본 절에서는 무요소방법중에서 EFG방법을 중심으로 무요소방법의 개념과 형상함수의 유도과정을 간략히 설명한다. 임의의 연속함수 $u(\mathbf{x})$는 다음과 같이 다항식벡터 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$와 그에 따른 계수벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$의 내적을 이용한 부분적으로 연속인 근사함수 $u_L^h(\mathbf{x})$로 나타낼 수 있다.

$$u_L^h(\mathbf{x},\ \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\Omega_x \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{p}(\mathbf{x})\in\mathbf{R}^m$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})\in\mathbf{R}^m$이고 m은 다항식의 차수이다. 이동최소자승법을 이용하여 계수벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$를 구하려면 다음과 같은 함수를 최소화하는 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$를 구하면 된다. 즉, 절점에서의 실제값과 식(1)에서 근사식으로 나타낸 값의 차이에 임의의 가중치함수를 곱한 값의 최소값을 구하는 문제로 생각할 수 있다.

$$E[\mathbf{a}(\mathbf{x})] = \sum_{I=1}^{n} w_I(\mathbf{x},\ a)\left[u_I - u_L^h(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_I)\right]^2 \qquad \mathbf{x}_I\in\Omega_x$$
$$= \sum_{I=1}^{n} w_I(\mathbf{x},\ a)\left[u_I - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x})\right]^2 \tag{2}$$

여기서 n은 영역 Ω_x내부에 있는 절점의 수이고 $w_I(\mathbf{x},\ a) = w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I,\ a)$는 양의 값을 가지고 절점에서 가까울 수록 큰값을 가지는 가중치함수이다. 본 연구에서는 절점에서의 거리를 변수로 갖고 지수함수로 나타내지는 다음과 같은 가중치함수를 사용하였다.

$$w_I(\mathbf{x},\ a) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(d_I/c)^2} - e^{-(a/c)^2}}{(1-e^{-(a/c)^2})} & if\ d_I \le a \\ 0 & if\ d_I > a \end{cases} \tag{3a}$$

여기서 c는 가중치함수의 형상을 결정하는 상수이고 $d_I = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|$이다. 무요소방법에서 절점이 영향을 미치는 영향영역의 크기는 다음식으로 결정 된다.

$$a = D_m h \tag{3b}$$

여기서 h는 절점사이의 평균 거리이다.
한편 $\mathbf{E}(\mathbf{a})$가 최소값을 갖는 $\mathbf{a}$는

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x},\ a)\mathbf{B}(\mathbf{x},\ a)\mathbf{u} \tag{4a}$$

이고, 여기서

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\ a) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I)w_I(\mathbf{x},\ a)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \tag{4b}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\ a) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I)w_I(\mathbf{x},\ a) \tag{4c}$$

이다. 영역을 전체영역으로 확장하면

$$u^h(\mathbf{x}) = u_L^h(\mathbf{x},\ \bar{\mathbf{x}}) \tag{5}$$

로 될 수 있고 이를 식(3)과 식(1)에 대입하면,

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$
$$= \sum_{I}^{n}\sum_{j}^{m} P_j(x)(\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x))_{jI}\,u_I$$
$$\equiv \sum_{I}^{n}\phi_I(x)u_I \tag{6}$$

이 된다. 이식은 유한요소법에서 절점값과 형상함수를 이용하여 임의의 위치에서의 값을 구하는 식과 매우 유사하다. 따라서 일단 형상함수를 나타내는 식(6)을 구성하면 그 이후는 일반적인 유한요소법의 정식화 과정과 완전히 같다.

3. 오차의 평가

본 연구에서 제안한 오차의 평가기법을 설명하기 위해 다음과 같이 선형정적문제를 무요소방법으로 해석하는 경우를 가정하였다.

$$\mathbf{Lu} \equiv \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{DSu} = \mathbf{f} \quad in\ \Omega \tag{7}$$

여기서 D는 재료행렬이고 S는 다음과 같이 변형율을 정의할 수 있는 미분연산자이다.

$$\varepsilon^h(\mathbf{x}) = \mathbf{Su}^h(\mathbf{x}) \tag{8}$$

해석결과를 이용하여 무요소방법에서 응력을 직접 구하면,

$$\sigma^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\sum_I^n \mathbf{S}\phi_I(x)\mathbf{u}_I \tag{9}$$

이고 여기서 n은 영향영역 Ω_x^n내에 들어가는 절점의 수이다.

함수 $u(x)$의 임의의 점 $\mathbf{x}\in\Omega$에서의 미분값은 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$를 상수로 가정하는 경우 다음과 같이 구할 수 있다[3].

$$u_{,i}^h \approx \mathbf{p}_{,i}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{10}$$

하지만 실제로 계수 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$는 영역내에서 일정하지 않다. Belytschko 등[4]은 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$의 공간적 변화를 고려하지 않으면 해석결과가 부정확해지고 조각시험(Patch Test)도 통과하지 못하는 것을 보였고 다음과 같이 함수의 미분값 $u_{,i}^h$을 구하였다.

$$u_{,i}^h = \sum_I^n \phi_{I,i}(\mathbf{x})u_I$$

$$= \sum_I^n \sum_j^m \{P_{j,i}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{iI} + (\mathbf{A}_{,i}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,i})_{jI}\}u_I \tag{11}$$

무요소방법에서의 형상함수는 2차원문제의 경우 종모양이며 이를 한번 미분한 함수는 원래 형상함수 보다 차수가 높게 된다. 이는 유한요소법과는 정반대되는 현상으로 이를 이용하여 응력분포를 구할 경우 균열의 선단부같은 응력의 경사가 급한 부분을 잘 나타낼 수 있다. 마치 p-version 유한요소법에서 고차의 형상함수를 사용한 것과 마찬가지의 효과를 나타내서 일부 연구결과에서 무요소방법이 Locking문제를 해결하는 현상을 보이는 것도 이와 같은 현상일 것이다.

한편, 응력의 경사가 급한 부분에서 가상진동현상이 보이는 것도 변위의 형상함수보다 더 높은 차수를 가지는 응력의 형상함수 때문에 생기는 현상이다[10]. 본 논문은 이러한 가상진동현상이 응력의 경사가 급한부분에서 두드러지게 나타난다는 사실을 이용하여 오차를 평가하였다. 즉, 해석결과로 얻어진 절점에서의 응력 σ^h을 낮은 차수를 갖는 형상함수를 이용하여 다시 한번 사상(Mapping)하여 새로운 응력분포 σ^P를 얻는 것이다. 마치 높은 주파수성분만을 필터링하여 소리의 잡음을 없애는 것과 유사하다. 새로운 투영응력(Projected Stress, σ^P)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma^P(\mathbf{x}) = \sum_K^l \left\{ \Psi_K(\mathbf{x})\mathbf{D}\sum_I^n \mathbf{S}\phi_I(\mathbf{x}_K)\mathbf{u}_I \right\}$$

$$= \sum_K^l \Psi_K(\mathbf{x})\sigma^h(\mathbf{x}_K) \tag{12}$$

여기서 $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$는 절점 K에서의 응력, l은 투영과정에서 사용된 영역 Ω_x^P내에 있는 절점의 갯수이고, $\Psi_K(\mathbf{x})$는 EFG 형상함수이다. 응력을 구할때 사용한 형상함수와 응력을 사상할 때 사용한 형상함수는 각각

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m P_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x},\ a_1)\mathbf{B}(\mathbf{x},\ a_1))_{jI} \tag{13}$$

$$\Psi_K(\mathbf{x}) = \sum_j^m P_j(x)(\mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x},\ a_2)\mathbf{B}_p(\mathbf{x},\ a_2))_{jK} \tag{14}$$

로 나타내지며 여기서 $a_1 \neq a_2$이다. 식(14)에서 $(\mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x},\ a_2)\mathbf{B}_p(\mathbf{x},\ a_2))_{jK}$를 계산할 때에는 식(1)-

(6)과 같은 과정을 거치지만 영향영역의 크기는 다른것을 사용한다. 투영응력은 계산된 결과를 단순히 한번 사상하는 과정만으로 얻을 수 있으므로 일반적인 유한요소법의 응력평탄화과정에서 필수적인 역행렬을 구하는 작업등의 추가적인 계산이 필요 없이 간단하게 구할 수 있다.

임의의 위치에서 응력의 오차 σ^e는

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \tag{15}$$

로 구해지고 놈(norm)을 사용하여 정량화 할 수 있다. 본 연구에서는 일반적으로 많이 쓰이는 에너지놈을 오차의 척도로서 사용하였다. 에너지놈의 계산을 위해서 적분점 $x=x_g$에서의 오차의 에너지놈은

$$\| e(\mathbf{x}_g) \| = \left\{ \frac{1}{2} \sigma^{eT}(\mathbf{x}_g) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}_g) \right\}^{1/2} \tag{16}$$

이고 이를 이용하여 전체 오차를 구하면

$$\| \mathrm{E} \| = \left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \tag{17}$$

이 되며 이를 전체오차의 척도로서 사용할 수 있다. 한편, 적응적 방법을 적용하려면 상대오차값이 필요한데 이는 다음과 같이 평가된 오차를 전체 에너지로 나누면 구할 수 있다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} \tag{18}$$

여기서 전체 에너지놈은

$$\| U \| = \left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \tag{19}$$

이다.

4. 수치 해석

본 절에서는 정확해를 알 수 있는 여러 문제를 해석하여 본 연구에서 제안한 오차의 평가기법의 정확도를 평가하고 적응적방법에의 적용성을 살펴 본다. 먼저 간단한 1차원 문제와 말단에 하중이 작용하는 외팔보문제, 인장력을 받는 원형구멍이 있는 무한평판문제를 해석하여 무요소방법에서 응력분포의 특징과 오차 평가기법의 정확도를 검증하고 적응적 방법에서 많이 사용되는 L형평판과 균열을 가지는 평판문제를 해석하여 적응적 방법에 대한 적용성을 보인다.

예제 1. 1차원 문제

1차원 문제로서 다음과 같은 지배 미분방정식을 갖는 탄성막대문제를 선택하였다. 하중은 전체 해석영역에 걸쳐 분포한다고 가정하였다.

$$AEu,_{xx} + q = 0 \qquad 0 < x < 1 \tag{20}$$

경계조건은

$$u(0) = 0 \quad \text{과} \quad u,_x(1) = 0 \tag{21}$$

이고 여기서 단면적은 $A=1.0$이고 탄성계수는 $E=1.0$이다.

다음과 같이 전영역에서 일정한 하중을 받는 경우와 선형으로 변하는 하중을 받는 경우의 두 가지 하중조건에 대하여 해석하였다.

$$\text{Case 1} \quad q(x) = 100 \qquad 0 < x < 1 \tag{22}$$

$$\text{Case 2} \quad q(x) = 100x \qquad 0 < x < 1 \tag{23}$$

영향영역은 $a = D_m h$로 계산되며 여기서 h는 절점간격이고 D_m은 사용자가 정하는 영향계수이다. 절점은 전 영역에서 일정하게 분포 시켰고 절점사이에서는 4점적분을 하였다. 해석과 사상시 영향영역의 크기는 각각 $D_m^a = 2.5$과 $D_m^a = 1.0$를 사용하였다.

각 하중경우에 대하여 EFG응력과 투영응력의 분포를 그림 1에 나타내었다. 정확해에 의하면 응력의 분포는 각 하중상태에 따라 선형분포와 포물선분포를 보인다. 그림 1에서 볼 수 있는 바와 같이 응력의 경사가 급해지면 EFG 응력의

진동도 따라서 증가하는 것을 볼 수 있다. 본문에서 언급한 바와 같이 이 EFG응력과 투영응력의 차이를 이용하여 오차를 구할 수 있다.

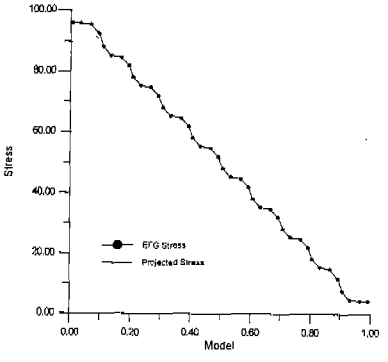
응력의 투영시 사용되는 영향영역의 최적값을 구하기 위해 해석에 사용되는 영향영역 D_m^a과 투영에 사용되는 영향영역 D_m^p의 크기를 변화시켜가며 해석을 하였다. 한편, 평가된 오차의 정확도는 다음과 같은 효율지수로서 평가할 수 있다.

$$\theta = \frac{\|E\|}{\|E_{ex}\|} \tag{24}$$

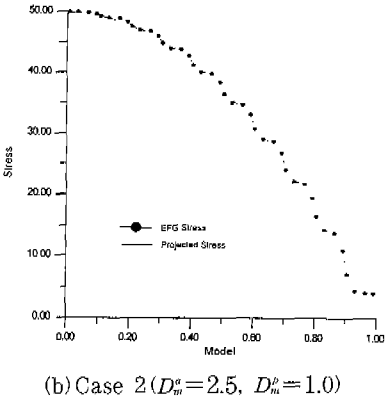
여기서 $\|E\|$는 식(17)에서 구한 오차의 에너지놈이고 $\|E_{ex}\|$는 정확해로 구한 오차의 에너지놈이다.

그림 2는 다양한 D_m^p값에 따라 효율지수의 분포를 나타낸 것이다. D_m^p의 값이 1.0에서 2.0사이의 값을 가질 때 평가된 오차의 정확도를 확보할 수 있음을 알 수 있고 그 이상의 값을 사용하면 정확도가 많이 떨어진다는 사실을 알 수 있다. 그리고 작은 D_m^a값을 사용했을 경우에는 효율지수가 D_m^p에 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있다.

효율지수는 D_m^a의 값이 1.0에 근접할 때 D_m^p의 크기에 상관없이 최적값을 나타낸다. 하지만 이 경우 EFG해석 결과 자체의 정확도는 많이 떨어지게 된다. 예를 들면 Case 1의 경우 D_m^a=1.1일 때 상대오차가 0.127%이었고 D_m^a=3.0일 때는 0.036%이었다.

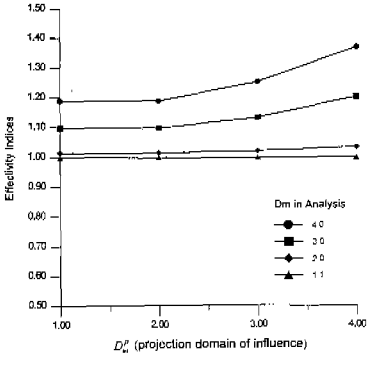


(a) Case 1 (D_m^a=2.5, D_m^p=1.0)

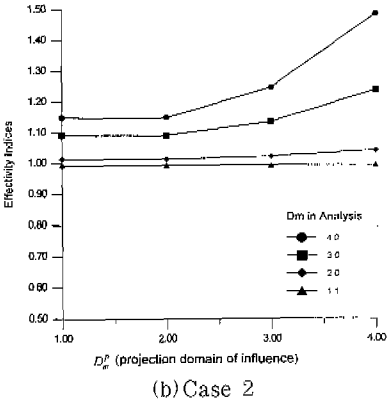


(b) Case 2 (D_m^a=2.5, D_m^p=1.0)

그림 1 EFG응력과 투영응력의 분포(예제1)



(a) Case 1



(b) Case 2

그림 2 D_m^a과 D_m^p에 대한 효율지수 분포(예제1)

예제 2. 외팔보 문제

2차원 문제로서 다음과 같이 정확해를 가지고 있는 외팔보[11]를 해석하였다.

$$u_x = \frac{-py}{6\bar{E}I}\left[(6L-3x)x + (2+v)\left(y^2-\frac{D^2}{4}\right)\right] \quad (25a)$$

$$u_y = \frac{P}{6\bar{E}I}\left[3vy^2(L-x)+(4+5v)\frac{D^2x}{4}+(3L-x)x^2\right] \quad (25b)$$

여기서 응력은

$$\sigma_{xx} = \frac{P(L-x)y}{I} \quad (26a)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (26b)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4}-y^2\right) \quad (26c)$$

이고

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (27a)$$

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{평면응력상태} \\ E/(1-\bar{v}^2) & \text{평면변형율상태} \end{cases} \quad (27b)$$

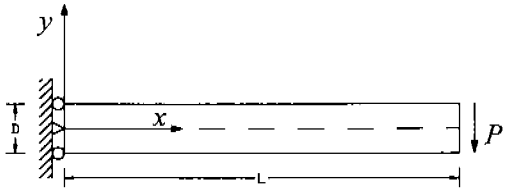
$$\bar{v} = \begin{cases} v & \text{평면응력상태} \\ v/(1-v) & \text{평면변형율상태} \end{cases} \quad (27c)$$

이다. 그림 3에 문제의 형상과 EFG 절점분포를 보였다. 경계조건은 $x=0$, $-D/2 \le y \le D/2$에서 식(25)에 따라 적용하였다. 평면응력상태로 가정하였고 각 상수는 $E=3.0\times10^7$, $v=0.25$, $D=1$, $L=8$로 하였다.

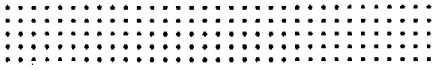
2차원 문제의 경우 임의의 위치 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_I$에서 영향영역의 크기는

$$a_I = D_m c_I \quad (28)$$

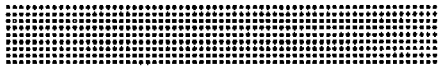
로 나타낼 수 있으며 D_m은 가중치함수의 구성을 위한 영향영역계수이다. 계수 c_I는 절점의 분포



(a) Cantilever beam



(a) Cantilever beam



(a) Cantilever beam

그림 3 외팔보 문제

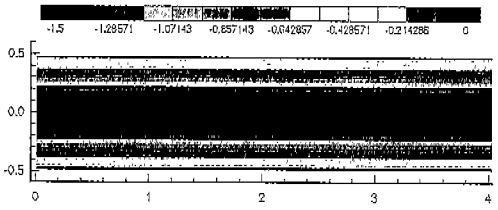
에 따라 해당 위치에 인접한 3개의 절점을 포함하는 원의 반지름이다.

영향영역계수는 각각 $D_m^u = 3.0$과 $D_m^p = 1.5$을 사용하였다. 정확해, EFG해석해, 투영응력에 의한 전단응력의 분포를 그림 4에 각각 비교하여 나타내었다. 정확해에 의하면 전단응력은 길이방향으로 일정한 값을 갖지만 EFG해석 결과, 가상진동이 생긴것을 볼 수 있고 투영응력은 이 가상진동을 어느정도 제거한 결과를 보여준다. 이때 에너지놈의 오차분포를 그림 5와 6에 나타내었다. 본 논문에서 제안한 오차평가기법을 이용한 오차의 분포와 정확해에 의한 오차의 분포가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

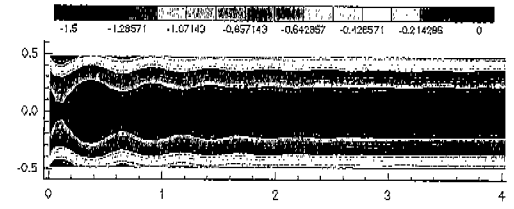
다양한 D_m^u값에 따른 효율지수의 분포를 그림 7에 나타내었다. 효율지수가 통상적인 허용범위 $0.8<\theta<1.2$내에 들기 위해서는 D_m^u의 값을 1.0에서 1.5사이의 값을 사용해야 함을 알 수 있다. 이는 1차원 문제의 결과와 일치하는 것이다.

예제 3. 원형구멍을 갖는 무한 평판 문제

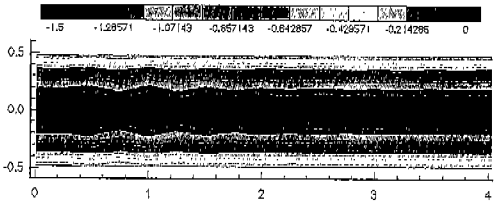
원형구멍을 갖는 무한평판이 1축인장하중을 받는 경우를 해석하였다. 응력의 분포는 Timo-



(a) Exact solution

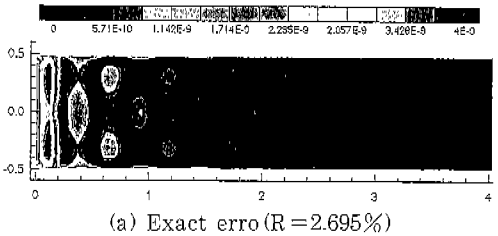


(b) EFG solution

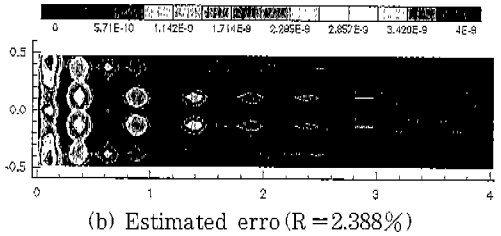


(c) Projected solution

그림 4 전단응력 분포, 165절점

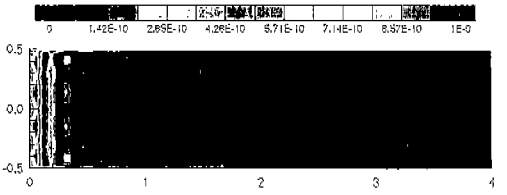


(a) Exact erro (R=2.695%)

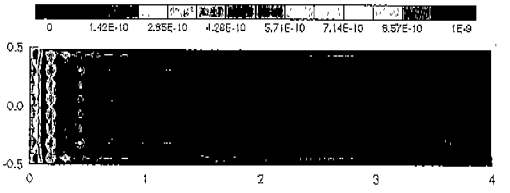


(b) Estimated erro (R=2.388%)

그림 5 오차의 분포, 165절점 (θ=1.104)
(D_m^a=3.0, D_m^b=1.5)

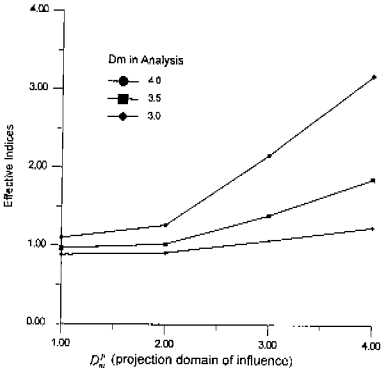


(a) Exact erro (R=0.227%)

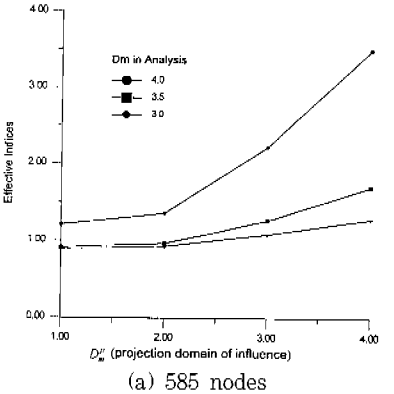


(b) Estimated erro (R=0.274%)

그림 6 오차의 분포, 585절점 (θ=1.209)
(D_m^a=3.0, D_m^b=1.5)



(a) 165 nodes



(a) 585 nodes

그림 7 영향지수의 분포(예제 2)

shenko 와 Goodier[11]에 의해서 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{xx}(x, y) = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta \tag{29a}$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta\right) - \frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta \tag{29b}$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4}\sin 4\theta \tag{29c}$$

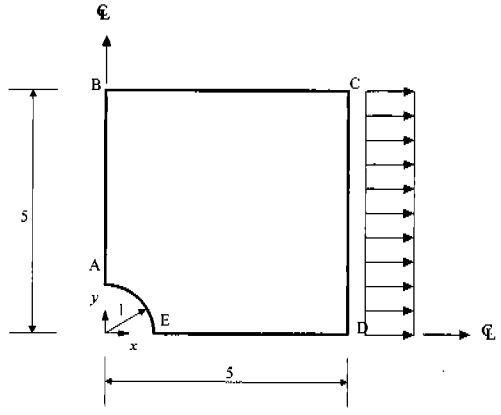
이 문제의 경우 상하, 좌우에 대하여 대칭이므로 1/4 모델링을 하였다. 문제의 형상과 절점분포는 그림 8에 나타내었다. 경계조건은 경계AB와 ED는 대칭조건을 주었고 경계 BC와 DC에는 식(29)에 나타낸 응력에 해당하는 하중을 주었다.

그림 9에 정확해에 의한 오차의 분포와 본 연구에서 제안한 평가기법을 이용한 오차의 분포를 도시하였다. 평판의 내부의 경우는 오차를 정확히 평가하였으나 원형구멍이 있는 경계부분은 곡선부의 경계때문에 적절히 평가되지 못하였음을 알 수 있다. 이는 곡선부의 기하학적인 모델링 오차는 본 연구에서 제안한 오차평가기법으로 평가할 수 없다는 것을 의미한다.

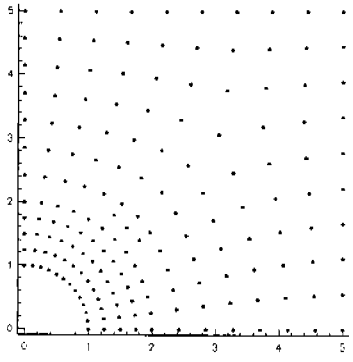
그림 10에는 2.5에서 4.0사이의 값을 갖는 D_m^a과 1.5에서 4.0사이의 값을 갖는 D_m^b에 따른 효율지수의 값을 나타내었다. 이 예제에서도 마찬가지로 D_m^b의 값은 1.5이하의 값을 갖는 것이 효과적이라는 것을 알 수 있다. 하지만 너무 작은 D_m^b값은 식(14)의 행렬 A_b을 특이행렬로 만들어서 문제해석 자체를 불가능하게 할 우려가 있으므로 주의해야 한다.

예제 4. 균열이 있는 평판 문제

균열을 모델링할 경우 균열을 중심으로 변위가



(a) geometry

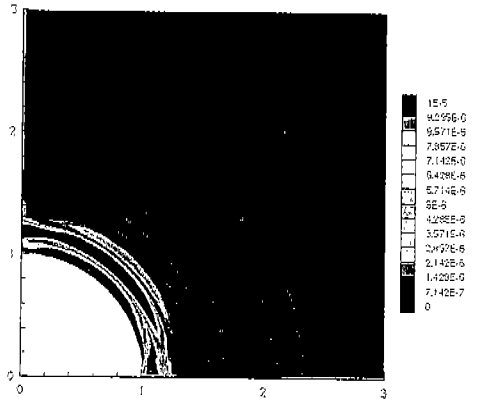


(b) nodal configuration

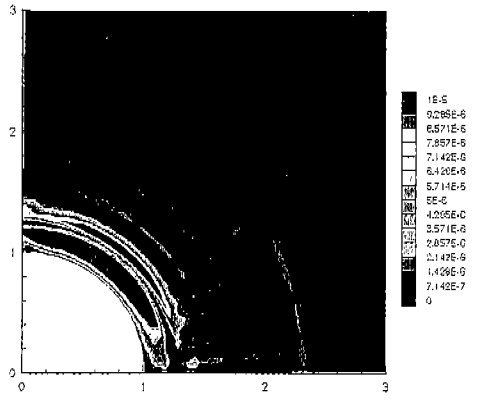
그림 8 원형구멍이 있는 무한평판(예제 3)

불연속이 되어야 한다. 무요소방법에서 이를 구현하는 가장 간단한 방법은 영향영역을 정의할 때 균열이 지나는 상대영역 부분을 제외하는 가시방법(Visibility Criterion)이 있다[4),12),13)]. 이 방법은 균열이 마치 장벽처럼 작용하여 균열 건너편에 영향을 미칠 수 없다는 가정을 이용한 것이다. 또 하나의 방법은 마치 빛이 회절하는 현상을 이용한 회절법(Diffraction Method)으로 균열을 사이에 두고 영향이 완전히 두절되는 것이 아니고 어느 정도 영향을 미친다는 가정을 이용한 것이다[12),13)]. 균열을 사이에 두고 미치는 영향은 두 지점 사이를 잇는 최단거리에 비례하여 계산한다.

이 예제에서는 위의 두 가지 방법에 대하여 본



(a) Exact erro(상대오차, R=2.59%)



(a) Estimated erro(상대오차, R=2.24%)

그림 9 에너지 오차분포((θ=0.924) (D_m^a=2.5, D_m^p=1.5))

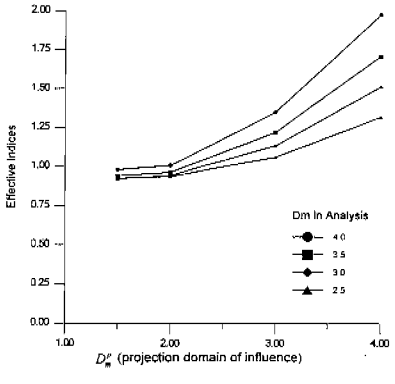


그림 10 D_m^a과 D_m^p에 따른 효율지수의 변화(예제 3)

연구에서 제안한 오차의 평가기법을 적용하고 비교하기 위하여 길이가 2a이고 균열의 길이가 a인 평판을 해석하였다(그림 11참조). 균열주위의 변위장은 다음과 같이 계산된다[14].

$$u_x = \frac{k_1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \quad (30a)$$

$$u_y = \frac{k_1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \quad (30b)$$

여기서 μ는 전단 탄성계수, κ는 Kolosov상수, r은 균열선단부에서의 거리이고 α는 균열선으로부터의 각도이다. 응력집중계수는 $k_1 = 1psi\sqrt{in}$ 다. 이 변위장에 따른 응력은 평형조건을 만족시키므로 이 변위장을 이용하여 주위의 경계조건을 정할 수 있다. 적응적 해석에 대한 적용성을 보이기 위해서 균일한 절점분포와 균열주위로 밀집된 절점분포를 가진 두가지 모델에 대하여 해석하였다(그림12참조).

그림 13~16에서는 두가지 모델링 방법(uniform and refined)과 두가지 균열영향 처리방법(visibility criterion and diffraction method)에 대하여 D_m^a=2.5과 D_m^p=1.5을 이용하여 해석하였고 각각 구한 오차의 분포를 도시하였다. 이 그림에서 균열선단부에서의 오차가 상대적으로 매우 큰 것을 볼 수 있고 따라서 오차가 적절히 평

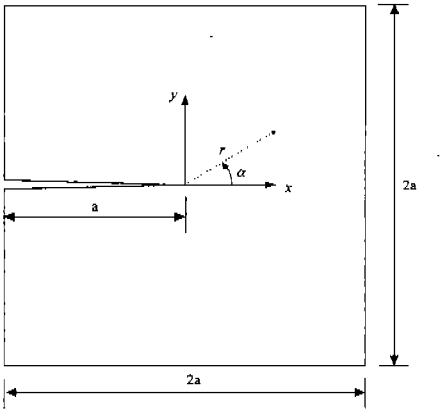
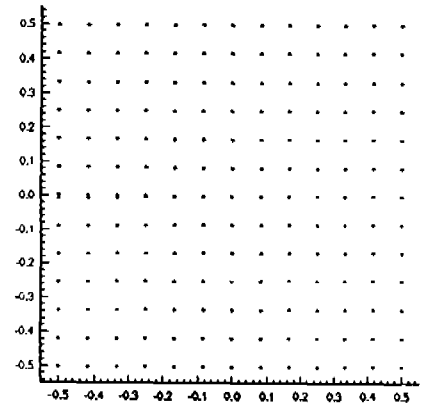
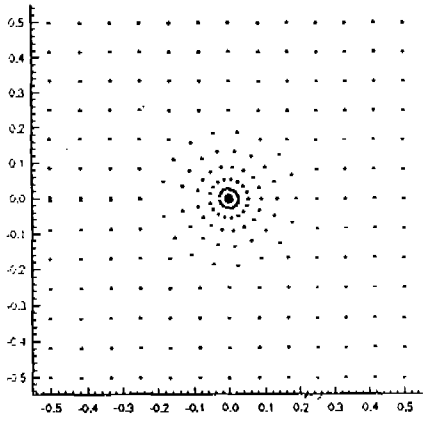


그림 11 균열이 있는 평판과 기준 좌표계



(a) Uniform mesh



(b) Refined mesh

그림 12 해석에 사용된 절점 분포

가되고 있음을 알 수 있다.

표 1에는 각 방법에 대한 상대오차와 효율지수를 정리하여 나타내었다. 회절법의 경우에 효율지수는 거의 1의 값을 갖는 것을 알 수 있고 가시방법의 경우 오차의 분포는 정확히 일치하지만 상대오차의 정확도는 떨어진다는 것을 알 수 있다. 상대오차를 비교하면 절점이 밀집된 모델이 등분포 모델보다 더 정확한 해석결과를 나타낸다는 것을 알 수 있으며 본 연구에서 제안한 방법을 그대로 적응적 방법에 적용할 수 있음을 알 수 있다.

그림 17에는 회절법을 사용한 해석결과를 에

표 1 상대오차와 효율지수의 비교(그림 13~16)

Mesh	Method	Relative Error (%)	Effectivity Index
uniform	visibility criterion	21.69	0.71
	diffraction method	20.42	1.01
refined	visibility criterion	13.60	1.24
	diffraction method	13.58	1.10

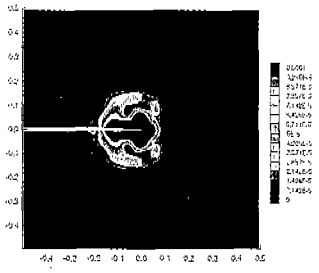
너지놈의 분포로 나타내었다. EFG해석결과는 균열주위에서 진동하는 것을 볼 수 있고 이를 투영한 분포는 이러한 가상진동이 많이 제거된 것을 알 수 있다.

참고적으로 그림 18은 적응적 해석법에서 많이 사용되는 L형평판이 측면 등분포하중을 받는 평면응력상태의 해석결과를 나타낸 것이다. 절점의 갯수를 증가시킴에 따라 오차가 줄어드는 것을 볼 수 있으며 오차가 기하학적 특이점 부분에 집중되고 있어서 이 부분에 절점이 추가되야 할 필요가 있는 것을 알 수 있다.

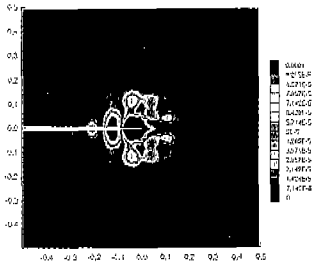
5. 결 론

무요소 방법에 적응적 방법을 적용하기 위한 오차의 평가 방법을 제안하였다. 본 연구에서 제안한 오차의 평가방법은 무요소방법에서 계산된 응력이 오차가 큰 영역에서 진동한다는 특성을 이용한 것으로 해석결과 얻어진 응력을 다시한번 낮은 차수의 형상함수로 투사하는 후처리를 함으로써 가상진동모우드를 제거하고 이 투영응력과 원래의 응력을 비교하여 부분오차와 전체오차를 구할 수 있었다. 이 과정에서는 다른 오차평가 기법에서 필요한 역행렬을 구할 필요가 없으므로 비교적 간단하게 오차를 평가할 수 있다.

수치예제에서는 투영응력을 구할 때 가능한 한 작은 영향영역을 사용하는 것이 바람직하다는 것을 보였으며 이는 과도한 영향영역은 투영응력을

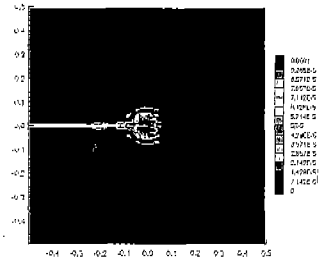


(a) Exact (R = 21.69%)

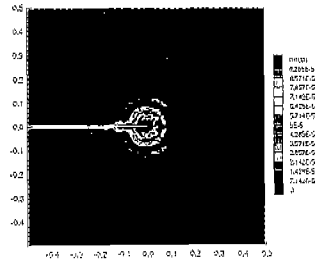


(b) Estimated (R = 16.05%)

그림 13 에너지놈 오차의 분포 (visibility criterion, uniform mesh, θ=0.71)

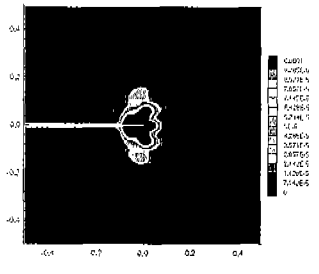


(a) Exact (R = 13.6%)

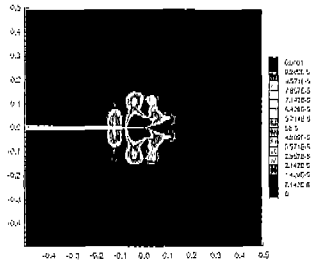


(b) Estimated (R = 16.8%)

그림 14 에너지놈 오차의 분포 (visibility criterion, refined mesh, θ=1.24)

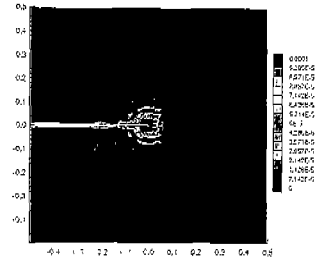


(a) Exact (R = 20.42%)

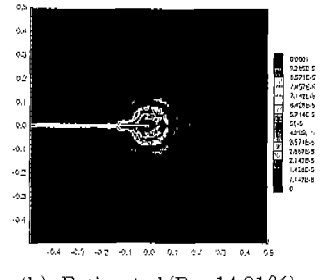


(b) Estimated (R = 20.13%)

그림 15 에너지놈 오차의 분포 (diffraction method, uniform mesh, θ=1.01)

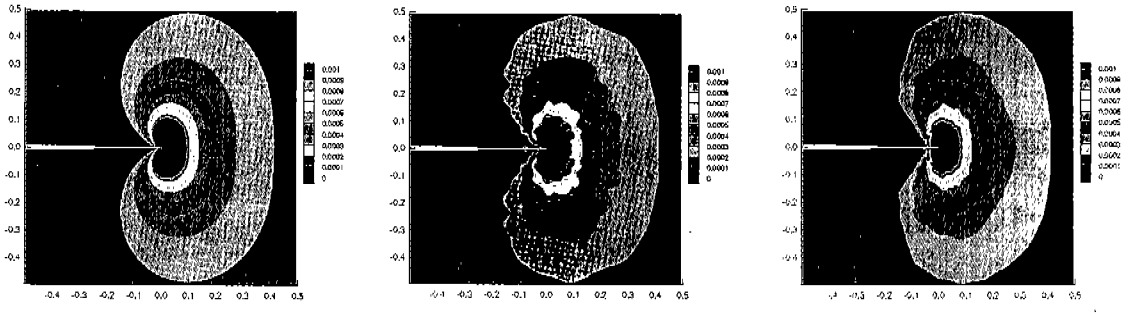


(a) Exact (R = 13.5%)



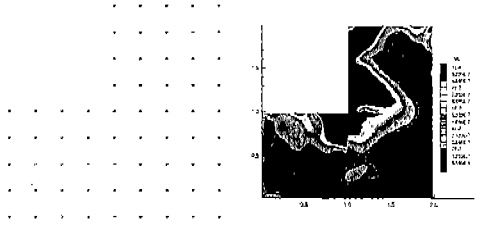
(b) Estimated (R = 14.91%)

그림 16 에너지놈 오차의 분포 (diffraction method, refined mesh, θ=1.10)

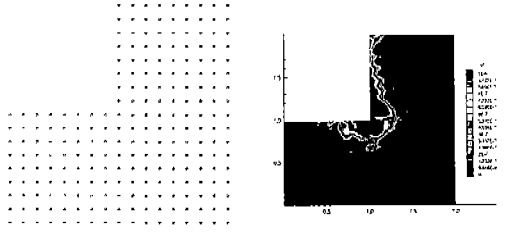


(a) Exact solution (b) EFG solution (c) Projected solution

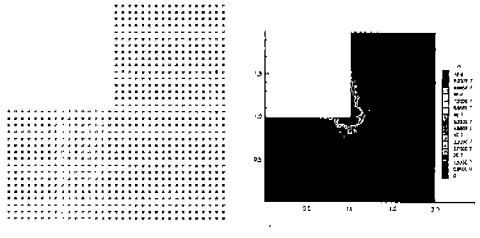
그림 17 에너지놈 오차의 분포(refined mesh, diffraction method)



(a) 65절점을 사용한 경우(에너지놈=.508E-02, 오차놈=.154E-02)



(b) 225절점을 사용한 경우(에너지놈=.489E-02, 오차놈=.932E-03)



(c) 633절점을 사용한 경우(에너지놈=.480E-02, 오차놈=.559E-03)

그림 18 L형평판에서 절점에 따른 오차의 분포

과대 평가할 수 있기 때문이다. 평가된 오차의 정확도를 나타내는 효율지수는 투영응력을 구할 때의 영향영역이 작을수록 1에 가까운 값을 나타내었지만 해석에서 사용된 영향영역이 작은 경우에는 별 영향을 받지 않았다. 균열문제의 경우에는 부분오차를 정확히 평가하였으며 회절법의 경우 효율지수가 거의 1에 가까운 값을 나타내었다.

본 연구에서 제안한 오차의 평가방법은 오차의 분포에 따라 자동적으로 절점을 발생시켜주는 프로그램을 이용하면 적응적 해석에 바로 적용될 수 있다. 또한 해석결과를 후처리하여 이용하는 방법이기 때문에 EFG방법이 아닌 다른 무요소 방법들에도 그대로 적용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Choi, C. and Chung, H., An adaptive control of spatial-temporal discretization error in finite element analysis of dynamic problems, *Structural Engineering and Mechanics 3*(1995), *391-409.*
2. Libersky, L. D. and A. G. Petschek. Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials. *The Next Free Laglange Conference*(1991), *248-257.*
3. Nayroles, B., G. Touzot and P. Villon. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics 10*(1992), 307-318.
4. Belytschko, T., Y. Y. Lu and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Method in Engineering 37*(1994), 229-2506.
5. Lancaster, P. and K. Salkauskas. Surface generated by moving least squares method. *Math. Comput. 37*(1981), 141-158.
6. Liu, W. K., W. Hao, Y. Chen, S. Jun and J. Gosz. Multiresolution reproducing kernel particle methods. *Computational Mechanics*(1996), submitted.
7. Belytschko, T., Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl. Meshless methods : An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139*(1996). 3-47.
8. Duarte, C. A. and J. T. Oden. An hp Adaptive Method Using Clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139*(1996), 237-262.
9. Zienkiewicz, O. C. and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Method in Engineering 24*(1987), 337-357
10. Chung, H. and Belytschko, T, An Error Estimates in the EFG Method. *Computational Mechanics*(1997),.Accepted.
11. Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity* (Third ed.) (1970). New York : McGraw Hill.
12. Belytschko, T., Y. Krongauz, M. Fleming, D. Organ and W. K. Liu. Smoothing and accelerated computations in the element-free Galerkin method. Journal of Computational and Applied Mathematics 74 (1996). 111-126.
13. Organ, D., M. Fleming, T. Terry and T. Belytschko. Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. Computational Mechanics 18(3) (1996). 225-235.
14. Anderson, T. L.. Fracture Mechanics : Fundamentals and Applications (First ed.) (1991). CRC press.

(접수일자 : 1997. 12. 31)