

3차원 구형(矩形) 액체 저장 Tank의 Rocking응답

The Rocking Response of Three Dimensional Rectangular Liquid Storage Tank

김 재 관* 박 진 용** 진 병 무** 조 양 희***
Kim, Jae Kwan Park, Jin Yong Jin, Byeong Moo Joe, Yang Hee

국문요약

연약한 지반 위에 기초한 유연한 구형 액체 저장탱크의 Rocking 운동에 대한 3차원 지진응답을 규명하기 위해서 동적 유체-구조물-지반 계의 상호작용 해석방법을 개발하였다. 수평방향 병진 운동과 Rocking 운동을 받는 3차원의 구형 탱크의 운동 지배방정식을 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하여 유도하였고 기반압위 토층의 표면에 놓인 강체 기초의 동적 강성행렬은 Hyperelement 방법으로 계산하였다. 연약한 지반 위에 기초한 3차원의 유연한 탱크의 지진응답은 강체기초의 동적 강성행렬과 유체-구조물 계의 지배방정식을 결합하여 계산하였다.

주요어 : 유체-구조물-지반 상호작용, 구형 탱크, Rocking 운동 응답

ABSTRACT

A dynamic fluid-structure-soil interaction analysis method is developed to investigate the effects of translational and/or rocking motions on the seismic response of flexible rectangular liquid storage tanks founded on the deformable ground. The governing equation for the dynamics of 3-D rectangular tanks subjected to the translational and/or rocking motion is obtained by applying Rayleigh-Ritz method. The dynamic stiffness matrices of a rigid rectangular foundation resting on the surface of a stratum overlaid bedrock are calculated by hyperelement method. The seismic responses of 3-D flexible tank model founded on the deformable ground is calculated by combining the governing equation for the fluid-tank system with the dynamic stiffness matrix of the rigid surface foundation.

Key words : fluid-structure-soil interaction, rectangular tanks, rocking response

1. 서 론

대형 액체 저장탱크의 지진응답은 구조물과 내부에 저장된 유체간의 상호작용에 의해서 큰 영향을 받는다. 그리고, 저장탱크가 연약한 지반 위에 기초되어 있을 경우에는 지반과 구조물간의 상호작용이 일어나게 되고, 그 효과는 일반적으로 지반이 연약할수록 증가하게 된다. 따라서, 저장탱크의 내진설계에서는 유체-구조물-지반 계의 상호작용이 고려되어야 할 필요가 있다.⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾

액체 저장에는 원통형 탱크가 널리 사용되고 있는 관계로 액체 저장탱크의 지진응답에 관한 연구도 주로 원통형 저장탱크를 대상으로 한 것이 주종을 이루고 있다.⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾ 그러나, 사용후핵연료 중간저장시설 등에 사용되는 구형 평면을 갖는 대형 액체 저장탱크에 관한 연구는 극히 드물고, 그나마, 구조물을 강체로 가정 한 것이었다.^{(7),(8)} 최근에 들어서 구조물의 유연성을 고려한 유체-구조물 상호작용이 구형 평면의 액체 저장 탱크의 지진 응답에 미치는 영향을 일부 연구자들이 규명하였으나⁽⁹⁾, 유체-구조물-지반 계의 상호 작용에 대해서는 연구가 아직 미진한 상태에 놓여 있다.

* 정희권 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 부교수

** 학생희원 · 서울대학교 대학원 토목공학과 박사과정

*** 정희권 · 인천대학교 토목공학과 부교수

이 논문에서는 아직까지 충분한 연구가 이루어지지 않은 구형 평면 액체 저장탱크의 유체-구조물-지반 계의 상호작용에 관한 연구 결과를 제시하고자 한다. 먼저 비점성, 비압축성의 이상유체로 가정된 내부 유체의 비회전 운동을 표현하는 Laplace 방정식의 해를 구조물의 벽체 변위의 함수로 나타내었다. 그 다음 구조물의 거동을 Plate 진동 모드의 선형 중첩으로 가정하고서 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하여 구조물과 유체 운동의 지배방정식을 유도하였다. Hyperelement 방법을 사용하여 강체 기초의 동적 강성행렬을 계산하고 유체-구조물 계의 지배방정식과 결합하여서 유체-구조물-지반 계의 지배방정식을 구하였다.

2. 수학적 정식화

2.1 유체의 유동 해석방법

지진하중을 받는 액체 저장탱크의 벽면에 작용하는 동압력은 구조물과 같이 가속되는 Impulsive 압력 성분과 액체 표면의 출렁임에 의한 Convective 압력 성분으로 나눌 수 있다.⁽²⁾ 기존의 연구 결과에 의하면 Convective 압력 성분은 전체 압력의 극히 일부분에 불과한 것으로 알려져 있으므로, 이 연구에서는 액체 표면의 출렁임에 의한 Convective 압력 성분을 고려하지 않는 단순화된 경계조건을 유체의 자유 표면에 부과하였다. 유체-구조물 계의 지배방정식을 유도하기 위하여 선정된 대상 구조물은 그림 1에 묘사되어 있다. 탱크 바닥 표면의 중심에 원점을 둔 직교좌표계가 사용되었다. 비점성, 비압축성 이상 유체의 비회전 운동은 Laplace 방정식을 만족하는 속도 포텐셜로 표현될 수 있다.

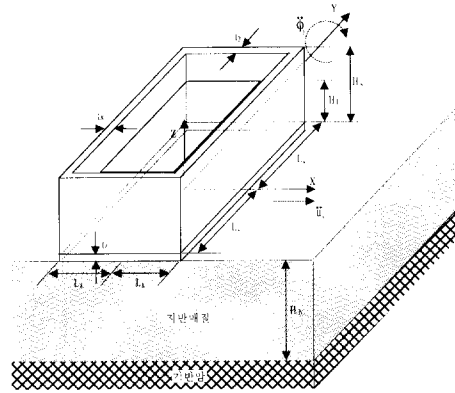


그림 1 해석 구조물 모델

그리고, 이 포텐셜은 자유 표면에서는 압력이 대기압과 같고, 구조물과의 접촉면에서는 유체 입자 속도 및 구조물 표면 속도의 법선 방향 성분이 동일하여야 한다는 운동 조건을 만족시켜야 한다.⁽¹⁰⁾ 이를 위해서 수평방향 병진 운동과 Rocking 운동을 하는 구조물의 운동을 그림 2, 3, 4에 주어진 세 가지 운동 형태의 조합으로 가정하고 각 운동 형태에 대한 속도 포텐셜 Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 를 각각 구하여 중첩함으로써 최종해를 도출하였다.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \quad (1)$$

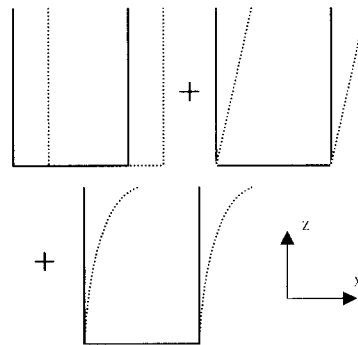


그림 2 속도 포텐셜 Φ_1

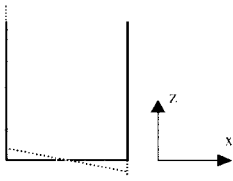


그림 3 속도포텐셜 Φ_2

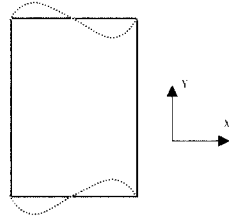


그림 4 속도포텐셜 Φ_3

여기서, Φ_1 은 장변 벽체의 x 축 방향으로의 병진 운동, y 축 중심 강체 회전 운동과 $y-z$ Plane에 대한 역대칭성 상대 변위에; Φ_2 는 바닥의 y 축 중심 강체 회전 운동에; Φ_3 는 단변 벽체의 $x-z$ Plane에 대한 대칭성 상대 변위에 각각 관련된 속도 포텐셜이다. 이렇게 얻어진 속도 포텐셜은 다음과 같은 유체의 연속 방정식과 경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\Phi} = 0, \quad z = H_l \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0, \quad y = \pm L_y \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \dot{u}_x(t) + \dot{w}_1(y, z, t) + z \dot{\phi}_y(t), \quad x = \pm L_x \quad (4c)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0, \quad x = \pm L_x \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad y = \pm L_y \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = -x \dot{\phi}_y(t), \quad z = 0 \quad (5c)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = 0, \quad x = \pm L_x \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} = \pm \dot{w}_2(x, z, t), \quad y = \pm L_y \text{ (복호동순)} \quad (6c)$$

여기서, ∇ 는 Laplace 연산자, \cdot 는 시간에 대한 미분, w_1 은 x 축에 직교하는 장변 벽체의 상대 변위, w_2 는 y 축에 직교하는 단변 벽체의 상대 변위, u_x , ϕ_y 는 각각 x 축 중심 수평 변위, y 축 중심 회전 변위를 의미한다.

변수분리법에 의해서 구하여진 각 포텐셜의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y \cosh(\xi_{mn} L_x)} \\ & \sinh(\xi_{mn} x) \cos(\eta_{mn} y) \cos(\zeta_n z) \\ & \left[\int_{-L_y}^{L_y} \int_0^{H_l} \dot{w}_1(y, z, t) \cos(\eta_{mn} y) \cos(\zeta_n z) dz dy \right. \\ & \left. + \frac{2L_y \delta_{m0} (-1)^n}{\zeta_n} \dot{u}_x(t) \right. \\ & \left. + 2L_y \delta_{m0} \left(\frac{H_l}{\zeta_n} (-1)^n - \frac{1}{\zeta_n^2} \right) \dot{\phi}_y(t) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\gamma_{mn} L_x L_y} \sin(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \\ & \{ \tanh(\gamma_{mn} H_l) \cosh(\gamma_{mn} z) - \sinh(\gamma_{mn} z) \} \frac{L_y \delta_{m0}}{\alpha_n^2} \dot{\phi}_y(t) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\eta_{mn} L_x H_l \sinh(\eta_{mn} L_y)} \\ & \sin(\xi_m x) \cosh(\eta_{mn} y) \cos(\zeta_n z) \\ & \int_{-L_x}^{L_x} \int_0^{H_l} \dot{w}_2(x, z, t) \cos(\xi_m x) \cos(\zeta_n z) dz dx \quad (9) \end{aligned}$$

$$\forall \gamma | \gamma |, \quad \xi_{mn} = \sqrt{(\eta_m^2 + \zeta_n^2)}, \quad \eta_m = m\pi / L_y,$$

$$\zeta_n = (2n+1)\pi / 2H_l, \quad \gamma_{mn} = \sqrt{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)},$$

$$\alpha_n = (2n+1)\pi / 2L_x, \quad \beta_m = m\pi / L_y,$$

$$\eta_{mn} = \sqrt{(\xi_m^2 + \zeta_n^2)}, \quad \xi_m = (2m+1)\pi / 2L_x,$$

$\bar{L}_y = 2L_y$ ($m=0$ 일 때), L_y ($m \neq 0$ 일 때), δ_{m0} 는 Dirac의 델타 함수를 각각 나타낸다. 이로부터

유체의 동압력은 각각의 포텐셜에 대한 압력의 합으로 구할 수 있다. 구조물에 작용하는 동압력을 구체적으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z, t) &= -\rho_l \dot{\Phi} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2\rho_l}{\xi_{mn} H_l L_y \cosh(\xi_{mn} L_x) \sinh(\xi_{mn} x) \cos(\eta_m y) \cos(\zeta_n z)} \\
 &\quad \left[\int_{-L_x}^{L_x} \int_0^{H_l} \ddot{w}_1(y, z, t) \cos(\eta_m y) \cos(\zeta_n z) dz dy \right. \\
 &\quad + \frac{2L_y \delta_{m0} (-1)^n}{\zeta_n} \ddot{u}_x(t) \\
 &\quad + 2L_y \delta_{m0} \left(\frac{H_l}{\zeta_n} (-1)^n - \frac{1}{\zeta_n^2} \right) \ddot{\phi}_y(t) \Big] \\
 &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4\rho_l}{\gamma_{mn} L_x L_y} \sin(\alpha_n x) \cos(\beta_m y) \\
 &\quad \left\{ \tanh(\gamma_{mn} H_l) \cosh(\gamma_{mn} z) - \sinh(\gamma_{mn} z) \right\} \frac{L_y \delta_{m0}}{\alpha_n^2} \ddot{\phi}_y(t) \\
 &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2\rho_l}{\eta_{mn} L_x H_l \sinh(\eta_{mn} L_y)} \\
 &\quad \sin(\xi_m x) \cosh(\eta_{mn} y) \cos(\zeta_n z) \\
 &\quad \int_{-L_x}^{L_x} \int_0^{H_l} \ddot{w}_2(x, z, t) \cos(\xi_m x) \cos(\zeta_n z) dz dx \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서, $p(x, y, z, t)$ 는 유체 동압력, ρ_l 은 유체 밀도이다.

2.2 유체-구조물 상호작용 해석방법

유체-구조물 계의 포텐셜 에너지와 운동 에너지를 구조물 변위의 함수로 표현한 후 Hamilton의 원리를 적용하면 유체-구조물 계의 운동 방정식이 얻어질 수 있다. 이전의 연구⁽¹⁰⁾에서는 x 축에 직교하는 장변 방향 벽체의 변형만을 고려하였지만, 이 논문에서는 y 축에 직교하는 단변 방향 벽체의 변형까지 고려하였다. 벽체를 3번이 고정되고 상단이 자유단인 Plate로 가정하면 유체-구조물 계의 운동 에너지(T), 변형 에너지(V) 그리고 외부 일(W)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned}
 T &= \rho_s t_x \int_{-L_x}^{L_x} \int_0^{H_l} [\dot{w}_1(y, z, t) + \dot{u}_x(t) + z\dot{\phi}_y(t)]^2 \\
 &\quad + \{-L_x \dot{\phi}_y(t)\}^2 dz dy \\
 &+ \rho_s t_y \int_{-L_y}^{L_y} \int_0^{H_l} [\dot{u}(t) + z\dot{\phi}_y(t)]^2 + \{-x\dot{\phi}_y(t)\}^2 \\
 &\quad + \{\dot{w}_2(x, z, t)\}^2 dz dx \\
 &+ \frac{1}{2} \rho_s \int_{-L_x}^0 \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} [\dot{u}(t) + z\dot{\phi}_y(t)]^2 dy dx dz \\
 &+ \frac{1}{2} \rho_s t_z \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \{-x\dot{\phi}_y(t)\}^2 dy dx \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= D_x \int_{-L_x}^{L_x} \int_0^{H_l} \left[\left\{ \frac{\partial^2 w_1(y, z, t)}{\partial y^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial^2 w_1(y, z, t)}{\partial z^2} \right\}^2 \right. \\
 &\quad + 2\nu \frac{\partial^4 w_1(y, z, t)}{\partial y^2 \partial z^2} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_1(y, z, t)}{\partial y \partial z} \right\}^2 \Big] dz dy \\
 &+ D_y \int_{-L_y}^{L_y} \int_0^{H_l} \left[\left\{ \frac{\partial^2 w_2(x, z, t)}{\partial x^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial^2 w_2(x, z, t)}{\partial z^2} \right\}^2 \right. \\
 &\quad + 2\nu \frac{\partial^4 w_2(x, z, t)}{\partial x^2 \partial z^2} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_2(x, z, t)}{\partial x \partial z} \right\}^2 \Big] dz dx \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= 2 \int_{-L_x}^{L_x} \int_0^{H_l} p(L_x, y, z, t) \\
 &\quad \{w_1(y, z, t) + u_x(t) + z\phi_y(t)\} dz dy \\
 &+ 2 \int_{-L_y}^{L_y} \int_0^{H_l} p(x, L_y, z, t) w_2(x, z, t) dz dx \\
 &+ \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} p(x, y, 0, t) \{x\phi_y(t)\} dy dx \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서, ρ_s 는 벽체와 바닥의 밀도, t_x , t_y , t_z 는 각각 x 축에 직교하는 장변 벽체의 두께, y 축에 직교하는 단변 벽체의 두께, 그리고 바닥의 두께, ν 는 벽체의 포아송비, $D_x = Et_x^3/12(1-\nu^2)$, $D_y = Et_y^3/12(1-\nu^2)$, E 는 탄성계수이다.

본 해석에서 이산화된 방정식을 구하기 위해 구조물의 변형을 판의 진동 모드의 중첩으로 가정하는 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하였으며 x 축에 직교하는 벽체와 y 축에 직교하는 벽체의 변위를 다음과 같이 각각 표현하였다.⁽⁶⁾

$$w_1(y, z, t) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n f_{pq}^1(t) \psi_p^y(y) \psi_q^z(z) \quad (14a)$$

$$w_2(x, z, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}^2(t) \psi_i^x(x) \psi_j^z(z) \quad (14b)$$

여기서, $f_{pq}^1(t)$ 는 x 축에 직교하는 벽체의 진동 모드의 일반 좌표함수, $f_{ij}^2(t)$ 는 y 축에 직교하는 벽체의 진동 모드의 일반 좌표함수; $\psi_p^y(y)$ 는 p 번째 y 축 방향 양단 고정정보의 대칭 진동모드, $\psi_i^x(x)$ 는 i 번째 x 축 방향 양단 고정정보의 역대칭 진동모드; $\psi_q^z(z), \psi_j^z(z)$ 는 q 번째, j 번째 z 축 방향 캔틸레버보의 진동모드를 나타낸다.

식(14a, b)을 식(11), (12), (13)에 도입하고 Lagrange 방정식을 구해서 정리하면 아래와 같은 형태로 이산화되는 연립 이차 미분 방정식이 얻어진다.

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{f}_{ab}^1 \\ \ddot{f}_{cd}^2 \\ \ddot{u}_x \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^A \begin{Bmatrix} \ddot{f}_{pq}^1 \\ \ddot{f}_{ij}^2 \\ \ddot{u}_x \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{f}_{pq}^1 \\ \dot{f}_{ij}^2 \\ \dot{u}_x \\ \dot{\phi}_y \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} f_{pq}^1 \\ f_{ij}^2 \\ u_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서, $\mathbf{M}, \mathbf{M}^A, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 는 각각 질량행렬, 유체의 수압에 의해서 발생하는 부가질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬을 나타내고; P_x, M_y 는 각각 기초에 작용하는 x 축 중심 수평 힘, y 축 중심 회전 모멘트를 의미한다. $\mathbf{M}, \mathbf{M}^A, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 에 대한 요소의 표현식은 부록에 제공하였다. 본 연구에서는 \mathbf{C} 를 Rayleigh 감쇠에 의해서 다음과 같이 구성하였다.⁽¹²⁾

$$\mathbf{C} = a_0(\mathbf{M} + \mathbf{M}^A) + a_1 \mathbf{K} \quad (16)$$

$$a_0 = \zeta_m \frac{2\omega_{\max}\omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}, \quad a_1 = \zeta_m \frac{2}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}$$

여기서, ζ_m 는 유체-구조물 계의 감쇠비, $\omega_{\max},$

ω_{\min} 는 각각 식(15)에서 지반의 자유도와 \mathbf{C} 가 없는 행렬을 고유치 해석했을 때의 최대, 최소 진동수를 나타낸다.

2.3 유체-구조물-지반 상호작용 해석방법

Hyperelement를 사용하여 구한 구형 강체 기초의 동적 강성행렬⁽¹³⁾을 식(15)과 주파수 영역에서 결합하면 유체-구조물-지반 계의 지배 방정식이 다음과 같은 형태로 얻어진다.⁽¹⁴⁾ 이 과정에서 구조물의 바닥 표면에서 중심의 위치가 표면 강체기초의 자유도 정의 위치와 바닥의 두께만큼 차이가 나는 것을 고려하여야 한다.

$$\mathbf{S}_{bb}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{uu}^g & \mathbf{S}_{u\phi}^g \\ \mathbf{S}_{\phi u}^g & \mathbf{S}_{\phi\phi}^g \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}_{bb} + \mathbf{L}^T \mathbf{S}_{bb}^g \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f_{pq}\} \\ \{u_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{S}_{bb}^g \{u_{b0}^g\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서, \mathbf{L} 은 구조물의 바닥 표면에서 중심과 강체 표면 기초의 자유도 정의 위치 차이에 의한 변환행렬로서 그 표현은 다음과 같고,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -t_z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{S}_{bb}^g 는 강체 표면 기초의 동적 강성 행렬, $\{u_b\}$ 는 탱크 바닥 표면 중심에서 정의된 자유도를 의미하는데 수평방향의 운동만을 생각하는 경우 $\{u_x\}$, 수평과 Rocking 운동을 함께 고려하는 경우는 $\{u_x, \phi_y\}^T$ 를 나타낸다.

$\{u_{b0}^g\}$ 는 지표면에서의 자유장 운동을 의미하고, $\mathbf{S}_{ss}, \mathbf{S}_{sb}, \mathbf{S}_{bs}, \mathbf{S}_{bb}$ 는 식(15)의 좌변으로부터 아래와 같이 얻어지는 유체-구조물 계의 동적 강성 행렬의 부분 행렬이다.

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{M}^A) \quad (19)$$

식(18)로부터 x 축 방향 수평 지반운동에 대한

전달 함수는 아래와 같이 정의된다.

$$\{H(\omega)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}_{bb} + \mathbf{L}^T \mathbf{S}_{bb}^g \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{S}_{bb}^g \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

3. 해석 결과

3.1 구조물의 모델링

개발된 방법을 검증하고 지반의 강성이 저장 탱크의 지진 응답에 미치는 영향을 알아보기 위하여 그림 1에 주어진 형상의 구형 저장 탱크의 응답을 해석하였다. 이 구조물 모델은 철근 콘크리트로 만들어진 것으로 가정하였고, 그 치수와 물성치는 다음에 주어진 바와 같다: 유체의 밀도, $\rho_l = 1000\text{kg/m}^3$; 철근 콘크리트의 밀도, $\rho_s = 2300\text{kg/m}^3$; 탄성계수, $E = 20.776\text{GN/m}^2$; 콘크리트의 포아송비, $\nu = 0.17$; 벽체의 높이, $H_s = 12.3\text{m}$; 유체의 깊이, $H_l = 11.2\text{m}$; 벽체의 y축 방향 길이, $2L_y = 56\text{m}$; 벽체의 x축 방향 길이, $2L_x = 19.6\text{m}$; 벽체와 바닥의 두께, $t_x = t_y = t_z = 1.2\text{m}$; 유체-구조물 계의 감쇠비, $\zeta_m = 0.03$; 탱크에서 기반암까지 깊이, $H_b = 44\text{m}$; 지반 매질의 감쇠비, $\zeta_s = 0.02$; 지반 매질의 포아송비, $\nu_s = 0.4$; 지반 매질의 전단파 속도, $V_s = 400\text{m/sec}$, 200m/sec .

3.2 고유 진동수의 변화

지반의 강성이 지반-구조물 계에 미치는 가장 현저한 영향 중 하나는 고유 진동수의 변화이다. 그림 5에서 우측 장변 벽면 중앙 부분에 작용하는 단위폭당 압력의 합에 대한 전달 함수를 계산하여 고정기반 구조물 모델의 경우와 비교하였다. 그림에서는 고정기반 모델에 의한 결과를 매질의 전단파 속도가 각각

400m/sec ($V_s 400$), 200m/sec ($V_s 200$)인 토사지반에서의 수평 운동만을 고려한 경우(H)와 수평과 Rocking 운동을 함께 고려한 경우(H+R) 모델에서의 결과와 비교하였다. 압력의 합이 최대가 될 때의 주파수와 최대값을 표 1에 나타내었다. 지반의 강성이 낮아질수록 주파수가 낮은 쪽으로 이동하고 있으며, 최대값도 저하되고 있음을 볼 수 있다. 이러한 현상은 지반-구조물 상호 작용에 관한 지금까지 알려진 거동 특성과 일치하고 있다.

표 1 장변 벽체 중앙에서 단위폭당 압력의 합에 대한 전달 함수가 최대가 될 때의 값과 그 때의 주파수

지반 상태	고정기반	$V_s = 400\text{m/sec}$ 일때		$V_s = 200\text{m/sec}$ 일때	
		H	H+R	H	H+R
조건					
최대 압력의 합 (kPa-sec ²)	667.72	462.15	450.47	271.26	296.49
최대 압력일 때의 주파수(Hz)	3.6377	3.6133	3.5889	3.3448	3.1739

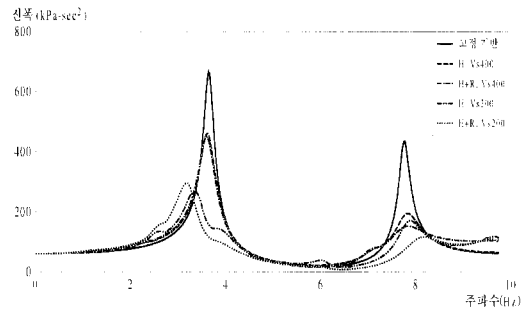


그림 5 고정기반과 매질의 전단파 속도(V_s)가 400, 200m/sec일 때 벽면 중앙에서 단위폭당 압력의 합에 대한 전달함수

3.3 유체 동압력의 분포

다음으로는 유체 동압력 분포에 대한 지반-구조물 상호 작용의 영향을 조사하였다. 자유장 운동은 연직으로 전파하는 전단파에 의해서 발생한다고 가정하였으며 그림 6, 그림 7, 그림 8은 고정기반, 매질의 전단파 속도가 각각 400m/sec ($V_s 400$), 200m/sec ($V_s 200$)인 토

사지에서 수평과 Rocking 운동을 함께 고려한 경우(H+R)에서 탱크의 우측 장변 벽면에 발생한 압력에 대한 전달함수의 분포이다. 그 특성을 보면 지반 강성이 약해짐에 따라서 벽면 중앙 부분에서의 크기가 현저하게 감소하는 것을 알 수 있다. 또, 지반 강성에 따른 압력의 변화를 조사하기 위하여 우측 장변 벽면 중앙의 연직선 상에 발생한 단위폭당 압력의 함에 관한 전달함수의 값이 최대가 될 때, 각 지반 모델별 전달함수의 분포를 그림 9에서 비교하였다. 그림에서 지반의 강성이 낮을수록 그 크기가 감소함을 보여주고 있다. 지반의 수평 운동만을 고려한 경우(H)와 수평과 Rocking 운동을 함께 고려한 경우(H+R)는 큰 차이를 보이지 않는다. 그 이유는 탱크 모델이 높이가 낮고 폭이 넓은 형태이기 때문인 것으로 생각된다.

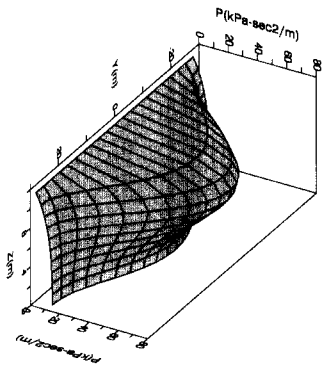


그림 6 주파수영역에서 고정기반일 때 우측 장변 벽면의 압력 분포($f=3.6377$ Hz)

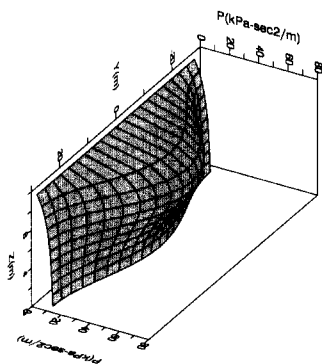


그림 7 주파수영역에서 H+R, Vs400 지반 모델에서 우측 장변 벽면의 압력 분포($f=3.5889$ Hz)

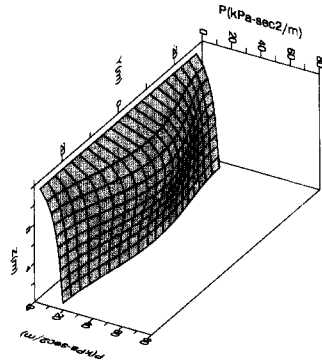


그림 8 주파수영역에서 H+R, Vs200 지반 모델에서 우측 장변 벽면의 압력 분포($f=3.1739$ Hz)

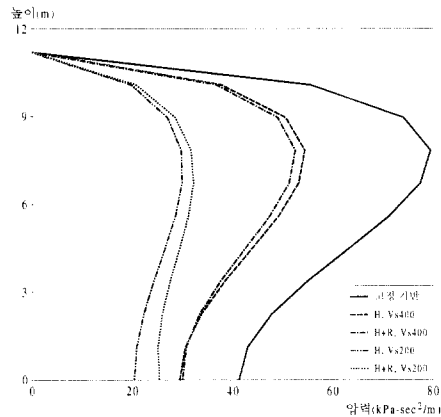


그림 9 주파수영역에서 우측 장변 벽면 중앙의 압력 분포

그림 10에는 바닥의 두께로 인해 발생하는 탱크 바닥의 중심의 위치와 표면기초의 자유도 정의 위치가 다른 것을 무시했을 때, 우측 장변 벽면 중앙의 수압에 대한 전달함수의 분포를 비교해 보았다. 바닥의 두께가 구조물 전체에 미치는 영향은 비교적 작다는 것을 알 수 있다.

그림 11에는 단변 벽체의 두께를 달리 했을 때 그 영향을 나타내었다. 지반의 강성이 비교적 작은, 매질의 전단파 속도가 200m/sec인 경우 그 값이 차이가 나지만 전체적인 영향은 미미하다. 해석 예제의 경우, 단변의 변형을 고려하지 않더라도 큰 차이가 나지 않는 것을 확인할 수 있었다.

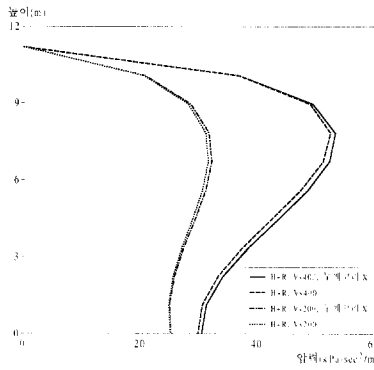


그림 10 주파수영역에서 바닥의 두께를 고려하지 않은 경우 장변 중앙 압력의 비교

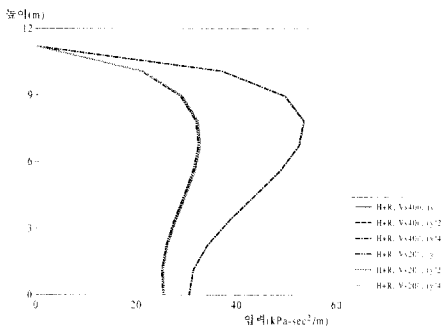


그림 11 주파수영역에서 단벽벽체의 두께를 달리했을 때 장변 중앙 압력의 비교

Fourier 역변환(Inverse Fourier Transform)을 이용하여 시간에 대한 우측 장변 벽면 전체에 작용하는 압력을 구해보았다. 이 때, 지표면에서의 수평방향 입력 지반운동으로 El Centro Earthquake Accelerogram (1940, N-S Component, PGA=0.319g)을 사용하였다. 그림 12에는 시간 변화에 따른 우측 장변 벽면 중앙에서 단위폭에 작용하는 압력의 합을 나타내었다. 그림 6, 7, 8에서 보았던 것처럼 압력의 최고치는 차이가 나지만 전반적인 경향은 유사하다.

그림 13, 14, 15는 그림 12에서 압력이 최대값에 이르는 순간에서 벽면에 작용하는 압력의 분포를 그린 것이다. 그림 13, 14, 15를 비교하여 보면 지반의 강성이 낮아짐에 따라 중앙부분의 수압은 감소하지만 모서리 부분의 수압은 증가하여서 벽면 전체에 작용하는 수압은 많은 차이가 나지 않는다.

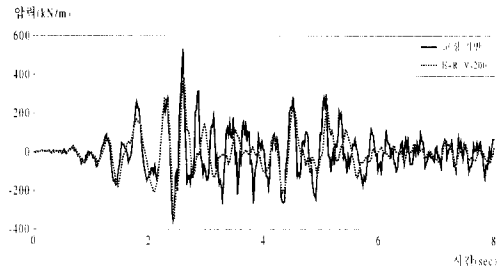
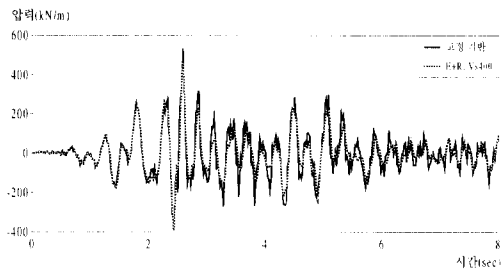


그림 12 시간 변화에 따른 우측 장변 벽면 중앙에서 단위폭당 압력의 합

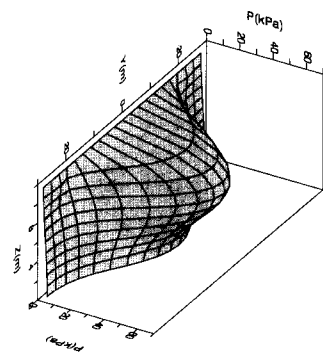


그림 13 시간영역에서 고정기반일 때 우측 장변 벽면의 압력 분포(T=2.58sec)

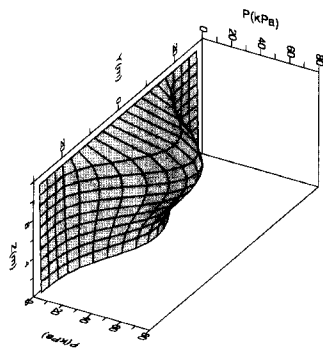


그림 14 시간영역에서 H+R, Vs400 지반 모델에서 우측 장변 벽면의 압력 분포(T=2.58 sec)

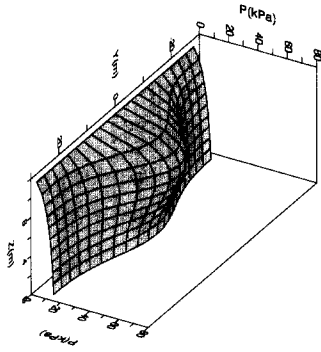


그림 15 시간 영역에서 H+R, Vs200 지반 모델에서 우측 장변 벽면의 압력 분포(T=2.60 sec)

이러한 결과는 표 2에서 보인 시간 영역에서 각각의 위치에서 수압이 최대가 될 때의 값을 통해서도 확인할 수 있다. 지반의 강성이 낮아짐에 따라 중앙에서의 수압은 감소하지만 벽면 전체에 작용하는 압력의 합은 크게 달라지지 않거나 오히려 증가될 수 있음을 보여주고 있다.

표 2 시간영역에서 최대 수압의 크기 비교

지반 상태	고정기반	$V_s = 400\text{m/sec}$ 일때		$V_s = 200\text{m/sec}$ 일때	
		H	H+R	H	H+R
우측 장변 벽체 전체(kN)	13507	14969	15061	13681	15121
우측 장변 벽체 중앙(kN/m)	532.31	454.68	471.96	376.51	383.75
배면 단변 벽체 $x = L_x/2$ (kN/m)	79.607	79.210	80.507	75.748	85.833

4. 결 론

유연한 지반에 기초한 구형 유체 저장탱크의 지진 응답특성을 조사하였다. Rayleigh-Ritz 방법에 의해서 구한 구조물의 운동 방정식과 Hyperelement 방법에 의해서 계산된 강체 기초의 동적 강성 행렬을 결합하여 지반-구조물 계의 운동 방정식을 도출하였다. 지반-구조물 상호 작용에 의해서 유체-구조물-지반 계의 고유 진동수가 낮아지고, 중앙 부분의 유체 동압

력도 작아지는 경향을 나타냄을 확인하였다. 그리고 지반 운동 방향에 평행한 단변 벽체의 변형이 탱크의 응답에 미치는 영향은 경미한 것으로 밝혀졌다. 따라서, 구형 탱크의 지진 응답해석에서는 지반 운동 방향에 직교하는 벽체의 변형만을 고려하여도 타당할 것으로 판단된다.

시간영역의 응답에서는, 압력의 최고치는 차이가 나지만 전체적인 경향은 크게 변화를 보이지 않았다. 연약한 지반에 놓인 탱크의 내진 설계에 있어서 고정기반 모델을 사용하여 지진응답을 해석하는 것은 타당한 것으로 여겨진다. 그러나, 연약한 지반에서는 지표에서의 지반 운동이 경암 지반에 비하여 증폭되고 주파수 내용이 달라질 수 있으므로 이 현상은 반드시 고려되어야 할 것이다.

감사의 글

본 연구는 서울대학교 한국지진공학연구소(KEERC)를 통한 한국과학재단 우수연구소 지원금에 의한 것입니다.

참 고 문 헌

1. Rammerstorfer, F. G., Sharf, K., and Fisher, F. D., "Storage tanks under earthquake loading," *Appl. Mech. Rev.*, 43, 1990, pp. 261-282.
2. Veletsos, A. S., "Seismic response and design of liquid storage tanks," *Guidelines for the Seismic Design of Oil and Gas Pipeline Systems*, Tech. Council on Lifeline Earthquake Engrg., ASCE, New York, N.Y., 1984, pp. 255-370.
3. Haroun, M. A., and Housner, G. W., "Earthquake response of deformable liquid storage tanks," *J. Appl. Mech.*, 48, 1981a, pp. 411-418.
4. Haroun, M. A., and Ellaithy, H. M., "Model for flexible tanks undergoing

- rocking," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 111(2), 1985, pp. 143-157.
5. Veletsos, A. S., and Tang, Y., "Dynamics of vertically excited liquid storage tanks," *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 112(6), 1985, pp. 1228-1246.
 6. Veletsos, A. S., and Tang, Y., "Soil-structure interaction effects for laterally excited liquid storage tanks," *Earthquake Engrg. and Struct. Dyn.*, 19, 1990, pp. 473-496.
 7. Housner, G. W., "Dynamic pressures on accelerated fluid containers," *Bull. Seismological Soc. of Am.*, 47, 1957, pp. 15-35.
 8. Haroun, M. A., "Stress analysis of rectangular walls under seismically induced hydrodynamic loads," *Bull. Seismological Soc. of Am.*, 74(3), 1984, pp. 1031-1041.
 9. Kim, J. K., Koh, H. M., and Kwahk, I. J., "Dynamic response of rectangular flexible fluid containers," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 122(9), 1996, pp. 807-817.
 10. Currie, I. G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, Inc., 1993, pp. 454.
 11. Weaver, W., Timoshenko, S. P., and Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., 1990, pp. 610.
 12. Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1993, pp. 738.
 13. 김재관, 진병무, "동심의 환형기초와 구형기초의 동적상호작용을 고려한 원자로 격납건물의 지진응답", '97학술발표회 논문집, 대한토목학회, 1997, pp. 575-578.
 14. Wolf, J. P., *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall, New Jersey, 1985, pp. 466.

부 록

질량행렬의 요소

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ab} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{abu} & \mathbf{M}_{ab\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{cd} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{uab} & \mathbf{0} & m_{uu} & m_{u\phi} \\ \mathbf{M}_{\phi ab} & \mathbf{0} & m_{\phi u} & m_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{M}_{ab} = 2\rho_s t_x \int_{-L_y}^{L_y} \{\psi_a^y(y)\}^2 dy \int_0^{H_s} \{\psi_b^z(z)\}^2 dz \quad (\text{A2a})$$

$$\mathbf{M}_{cd} = 2\rho_s t_y \int_{-L_x}^{L_x} \{\psi_c^x(x)\}^2 dx \int_0^{H_s} \{\psi_d^z(z)\}^2 dz \quad (\text{A2b})$$

$$\mathbf{M}_{abu} = \mathbf{M}_{uab} = 2\rho_s t_x \int_{-L_y}^{L_y} \psi_a^y(y) dy \int_0^{H_s} \psi_b^z(z) dz \quad (\text{A2c})$$

$$\mathbf{M}_{ab\phi} = \mathbf{M}_{\phi ab} = 2\rho_s t_x \int_{-L_y}^{L_y} \psi_a^y(y) dy \int_0^{H_s} z \psi_b^z(z) dz \quad (\text{A2d})$$

$$m_{uu} = 4\rho_s (t_x L_y H_s + t_y L_x H_s + t_z L_x L_y) \quad (\text{A2e})$$

$$m_{u\phi} = m_{\phi u} = 2\rho_s (H_s^2 t_x L_y + H_s^2 t_y L_x - t_z^2 L_x L_y) \quad (\text{A2f})$$

$$m_{\phi\phi} = \frac{4}{3} \rho_s (t_x L_y H_s^3 + t_y L_x H_s^3 + t_z L_x L_y^3 + t_y H_s L_x^3 + 3t_x H_s L_x^2 L_y + t_z^3 L_x L_y) \quad (\text{A2g})$$

부가질량행렬의 요소

$$\mathbf{M}^A = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{abpq}^A & \mathbf{M}_{abij}^A & \mathbf{M}_{abu}^A & \mathbf{M}_{ab\phi}^A \\ \mathbf{M}_{cdpq}^A & \mathbf{M}_{cdij}^A & \mathbf{M}_{cdu}^A & \mathbf{M}_{cd\phi}^A \\ \mathbf{M}_{upq}^A & \mathbf{M}_{uij}^A & m_{uu}^A & m_{u\phi}^A \\ \mathbf{M}_{\phi pq}^A & \mathbf{M}_{\phi ij}^A & m_{\phi u}^A & m_{\phi\phi}^A \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{M}_{abpq}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\rho_l}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y} \tanh(\xi_{mn} L_x) \int_{-L_y}^{L_y} \psi_p^y(y) \cos(\eta_m y) dy \int_0^{H_l} \psi_q^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \int_{-L_x}^{L_x} \psi_a^x(x) \sinh(\xi_{mn} x) dx \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \quad (\text{A4a})$$

$$\mathbf{M}_{abij}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\rho_l}{\eta_{mn} H_l L_x \sinh(\eta_{mn} L_x)} \sin(\xi_m L_x) \int_{-L_x}^{L_x} \psi_i^x(x) \sin(\xi_m x) dx \int_0^{H_l} \psi_j^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \int_{-L_y}^{L_y} \psi_a^y(y) \cosh(\eta_{mn} y) dy \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \quad (\text{A4b})$$

$$\mathbf{M}_{cdpq}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\rho_l}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y \cosh(\xi_{mn} L_x)} \cos(\eta_m L_y) \int_{-L_x}^{L_x} \psi_p^x(x) \sinh(\xi_{mn} x) dx \int_0^{H_l} \psi_q^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \int_{-L_y}^{L_y} \psi_c^y(y) \cos(\eta_m y) dy \int_0^{H_l} \psi_d^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \quad (\text{A4c})$$

$$\mathbf{M}_{cdij}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\rho_l}{\eta_{mn} H_l L_x} \coth(\eta_{mn} L_y) \int_{-L_x}^{L_x} \psi_i^x(x) \sin(\xi_m x) dx \int_0^{H_l} \psi_j^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \int_{-L_y}^{L_y} \psi_c^y(y) \sin(\xi_m y) dy \int_0^{H_l} \psi_d^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \quad (\text{A4d})$$

$$\mathbf{M}_{abu}^A = \mathbf{M}_{upq}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y \delta_{m0} (-1)^n}{\xi_{mn} \zeta_n H_l \bar{L}_y} \tanh(\xi_{mn} L_x) \int_{-L_y}^{L_y} \psi_a^y(y) \cos(\eta_m y) dy \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \int_{-L_x}^{L_x} \psi_u^x(x) \sinh(\xi_{mn} x) dx \int_0^{H_l} \psi_q^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \quad (\text{A4e})$$

$$\mathbf{M}_{ab\phi}^A = \mathbf{M}_{\phi pq}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y \delta_{m0}}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y} \left\{ \frac{H_l}{\zeta_n} (-1)^n - \frac{1}{\zeta_n^2} \right\} \tanh(\xi_{mn} L_x) \int_{-L_y}^{L_y} \psi_a^y(y) \cos(\eta_m y) dy \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \cos(\zeta_n z) dz + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y \delta_{m0}}{\gamma_{mn} \alpha_n^2 L_x \bar{L}_y} \int_{-L_x}^{L_x} \psi_a^x(x) \cos(\beta_m x) dx \int_{-L_y}^{L_y} \psi_b^y(y) \cos(\eta_m y) dy \int_0^{H_l} \psi_c^z(z) \{ \tanh(\gamma_{mn} H_l) \cosh(\gamma_{mn} z) - \sinh(\gamma_{mn} z) \} dz \quad (\text{A4f})$$

$$\mathbf{M}_{cdu}^A = \mathbf{M}_{uij}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y \delta_{m0} (-1)^n}{\xi_{mn} \zeta_n H_l \bar{L}_y \cosh(\xi_{mn} L_x)} \cos(\eta_m L_y) \int_{-L_x}^{L_x} \psi_c^x(x) \sinh(\xi_{mn} x) dx \int_0^{H_l} \psi_d^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \int_{-L_y}^{L_y} \psi_u^y(y) \cosh(\eta_{mn} y) dy \int_0^{H_l} \psi_j^z(z) \cos(\zeta_n z) dz \quad (\text{A4g})$$

$$\mathbf{M}_{cd\phi}^A = \mathbf{M}_{\phi ij}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y \delta_{m0}}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y \cosh(\xi_{mn} L_x)} \left\{ \frac{H_l}{\zeta_n} (-1)^n - \frac{1}{\zeta_n^2} \right\} \cos(\eta_m L_y) \int_{-L_x}^{L_x} \psi_c^x(x) \sinh(\xi_{mn} x) dx \int_0^{H_l} \psi_d^z(z) \cos(\zeta_n z) dz + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y \delta_{m0} (-1)^{m+n}}{\gamma_{mn} \alpha_n^2 L_x \bar{L}_y} \int_{-L_x}^{L_x} \psi_c^x(x) \sin(\xi_m x) dx \int_{-L_y}^{L_y} \psi_i^y(y) \cosh(\eta_{mn} y) dy \int_0^{H_l} \psi_j^z(z) \{ \tanh(\gamma_{mn} H_l) \cosh(\gamma_{mn} z) - \sinh(\gamma_{mn} z) \} dz \quad (\text{A4h})$$

$$m_{uu}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\rho_l L_y^2 \delta_{m0}}{\xi_{mn} \zeta_n^2 H_l \bar{L}_y} \tanh(\xi_{mn} L_x) \quad (A4i)$$

$$m_{\phi\phi}^A = m_{\phi u}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\rho_l L_y^2 \delta_{m0}}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y} \left\{ \frac{H_l}{\zeta_n^2} - \frac{(-1)^n}{\zeta_n^3} \right\} \tanh(\xi_{mn} L_x) \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\rho_l L_y^2 \delta_{m0}}{\gamma_{mn} \alpha_n^2 L_x \bar{L}_y} \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \{ \tanh(\gamma_{mn} H_l) \cosh(\gamma_{mn} z) - \sinh(\gamma_{mn} z) \} dz \quad (A4j)$$

$$m_{\phi\phi}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\rho_l L_y^2 \delta_{m0}}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y} \left\{ \frac{H_l}{\zeta_n} (-1)^n - \frac{1}{\zeta_n^2} \right\}^2 \tanh(\xi_{mn} L_x) \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\rho_l L_y^2 \delta_{m0}}{\gamma_{mn} \alpha_n^2 L_x \bar{L}_y} \int_0^{H_l} z \{ \tanh(\gamma_{mn} H_l) \cosh(\gamma_{mn} z) - \sinh(\gamma_{mn} z) \} dz \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y^2 \delta_{m0}}{\xi_{mn} H_l \bar{L}_y \cosh(\xi_{mn} L_x)} \left\{ \frac{H_l}{\zeta_n} (-1)^n - \frac{1}{\zeta_n^2} \right\} \int_{-L_x}^{L_x} x \sinh(\xi_{mn} x) dx \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8\rho_l L_y^2 \delta_{m0} (-1)^n}{\gamma_{mn} \alpha_n^2 L_x \bar{L}_y} \tanh(\gamma_{mn} H_l) \int_{-L_x}^{L_x} x \sin(\alpha_n x) dx \quad (A4k)$$

강성행렬의 요소

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{abpq} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{cdij} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (A5)$$

$$\mathbf{K}_{abpq} = 2D_x \int_{-L_x}^{L_x} \frac{\partial^2 \psi_a^y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_p^y(y)}{\partial y^2} dy \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \psi_q^z(z) dz \\ + 2D_x \int_{-L_x}^{L_x} \psi_a^y(y) \psi_p^y(y) dy \int_0^{H_l} \frac{\partial^2 \psi_b^z(z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi_q^z(z)}{\partial z^2} dz \\ + 2\nu D_x \left[\int_{-L_x}^{L_x} \frac{\partial^2 \psi_a^y(y)}{\partial y^2} \psi_p^y(y) dy \int_0^{H_l} \psi_b^z(z) \frac{\partial^2 \psi_q^z(z)}{\partial z^2} dz \right. \\ \left. + \int_{-L_x}^{L_x} \psi_a^y(y) \frac{\partial^2 \psi_p^y(y)}{\partial y^2} dy \int_0^{H_l} \frac{\partial^2 \psi_b^z(z)}{\partial z^2} \psi_q^z(z) dz \right] \\ + 4(1-\nu) D_x \int_{-L_x}^{L_x} \frac{\partial \psi_a^y(y)}{\partial y} \frac{\partial \psi_p^y(y)}{\partial y} dy \int_0^{H_l} \frac{\partial \psi_b^z(z)}{\partial z} \frac{\partial \psi_q^z(z)}{\partial z} dz \quad (A6a)$$

$$\mathbf{K}_{cdij} = 2D_y \int_{-L_y}^{L_y} \frac{\partial^2 \psi_c^x(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_i^x(x)}{\partial x^2} dx \int_0^{H_l} \psi_d^z(z) \psi_j^z(z) dz \\ + 2D_y \int_{-L_y}^{L_y} \psi_c^x(x) \psi_i^x(x) dx \int_0^{H_l} \frac{\partial^2 \psi_d^z(z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi_j^z(z)}{\partial z^2} dz \\ + 2\nu D_y \left[\int_{-L_y}^{L_y} \frac{\partial^2 \psi_c^x(x)}{\partial x^2} \psi_i^x(x) dx \int_0^{H_l} \psi_d^z(z) \frac{\partial^2 \psi_j^z(z)}{\partial z^2} dz \right. \\ \left. + \int_{-L_y}^{L_y} \psi_c^x(x) \frac{\partial^2 \psi_i^x(x)}{\partial x^2} dx \int_0^{H_l} \frac{\partial^2 \psi_d^z(z)}{\partial z^2} \psi_j^z(z) dz \right] \\ + 4(1-\nu) D_y \int_{-L_y}^{L_y} \frac{\partial \psi_c^x(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_i^x(x)}{\partial x} dx \int_0^{H_l} \frac{\partial \psi_d^z(z)}{\partial z} \frac{\partial \psi_j^z(z)}{\partial z} dz \quad (A6b)$$