

부분모드 방법을 이용한 점탄성 감쇠기가 설치된 건물의 고유치 해석

Eigenvalue Analysis of the Building with Viscoelastic Dampers Using Component Mode Method

민 경 원* 김 진 구** 조 한 우*** 이 성 경****
Min, Kyung Won Kim, Jin Koo Cho, Han Wook Lee, Sung Kyung

국문요약

본 연구는 점탄성 감쇠기가 설치된 건물의 고유치 해석을 위하여 라그랑지 승수 방법(Lagrange multiplier formulation)을 이용하였다. 특성방정식은 건물의 고유진동수, 감쇠기가 설치된 층의 모드 성분, 감쇠기의 점성 및 강성에 관계된 식으로 나타났으며, 감쇠기의 점성으로 인하여 복소수의 형태로 표현이 되었다. 유도된 특성방정식은 고유치 해석을 위한 일반적인 형태의 식이 아니므로 본 연구에서는 그림 해석을 통하여 감쇠기의 설치로 인한 점성과 강성의 증가로 건물의 복소 고유진동수의 변화를 분석하는 방법을 제시하였다. 그림 해석의 결과에 따르면 감쇠기의 점성과 강성으로 인한 복소 고유진동수의 물리적인 의미를 확인할 수 있으며, 최소 및 최대값을 예측할 수 있다. 또한, 복소 고유진동수를 실수의 고유진동수와 모드 감쇠비로 변환하여 상태방정식에 의한 방법의 결과와 비교하여 정확성을 검증하였다.

주요어 : 건물, 점탄성 감쇠기, 고유치, 라그랑지 승수, 모드, 고유진동수

ABSTRACT

The eigenvalue problem is presented for the building with added viscoelastic dampers by using component mode method. The Lagrange multiplier formulation is used to derive the eigenvalue problem which is expressed with the natural frequencies of the building, the mode components at which the dampers are added, and the viscoelastic property of the dampers. The derived eigenvalue problem has a nonstandard form for determining the eigenvalues. Therefore, the problem is examined by the graphical depiction to give new insight into the eigenvalues for the building with added viscoelastic dampers. Using the present approach the exact eigenvalues can be found and also upper and lower bounds of the eigenvalues can be obtained.

Key words : building, viscoelastic damper, eigenvalue, Lagrange multiplier, mode, natural frequency

1. 서 론

점탄성 감쇠기(viscoelastic damper, 이하 감쇠기라 함.)는 건물에 설치되어 건물의 감쇠능력을 향상시켜 바람 및 지진에 의한 건물의 진동을 감소시켜 주는 역할을 하고 있다.⁽¹⁾

이러한 감쇠기는 점성과 탄성으로 인하여 건물의 감쇠와 강성을 증대시킨다. 따라서, 건물의 진동감소를 분석하기 위해서는 감쇠기로 인한 건물의 진동특성 즉, 고유진동수와 모드 감쇠비를 파악하여야 한다. 그러나, 감쇠기는 인위적인 감쇠증가를 가져오며 건물의 일부층에 설치될 수 있기 때문에 감쇠행렬이 질량행렬과 강성행렬의 1차결합으로 표현되지 않는 비비례 감쇠(non-proportional damping)의 형태를 가지게 된다. 따라서, 비비례 감쇠의 영

* 정희원·인천대학교 건축공학과 조교수, 공학박사
** 정희원·성균관대학교 건축공학과 전임강사, 공학박사
*** (주)삼성물산 건설부문 기술연구소 수석연구원, 공학박사
**** 인천대학교 건축공학과 석사과정

항을 고려하기 위해서는 상태방정식 방법(state-space method)을 이용하여 복소수형태의 고유진동수를 구하는 방법이 있다.⁽²⁾ 그러나, 이러한 방법은 건물과 감쇠기를 통합된 한개의 구조물로 간주하여 모델링하는 방법으로, 감쇠기의 특성이 어떻게 건물에 영향을 미치는가를 파악하기 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 감쇠기 같은 부구조물(sub-structure)이 연결된 건물을 해석하고자 할 때는 각 구조물의 진동특성을 바탕으로 제약조건(constraint condition)을 이용하여 감쇠기가 설치된 건물을 용이하게 파악하는 부분모드 방법(component mode method)⁽³⁾을 채택하여 고유치해석을 위한 특성방정식(characteristic equation)을 유도하기로 한다. 그리고, 이러한 방정식에서 감쇠기와 건물의 상호작용을 분석하고 전체시스템의 진동특성 즉, 고유진동수와 모드감쇠비의 변화를 구하기로 한다.

2. 부분모드 방법

다음 그림 1은 건물과 감쇠기를 별개의 독립된 부구조물로 간주하고 여기에 제약조건을 적용하여 전체 구조물을 구성하는 개념을 보여주고 있다. 해석 순서는 부구조물의 진동에 따른 응답에너지를 유도한 다음 여기에 감쇠기가 설치되는 곳의 제약조건을 적용하여 전체구조물의 특성방정식을 구성하는 것이다. 이러한 특성방정식은 감쇠기의 각 요소들이 건물의 여러 요소에 미치는 영향을 명확히 보여주기 때문에 각 요소들 간의 관계를 이해하는데 도움을 준다.

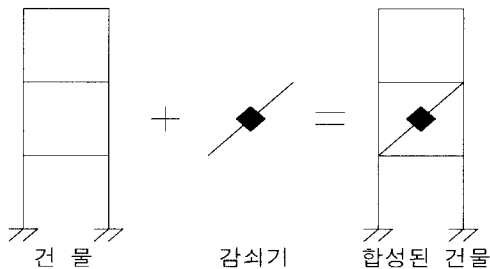


그림 1 건물과 감쇠기의 합성

다음 그림 2와 같이 n 층 건물의 m 층에 감쇠기가 설치된 경우, 진동 거동시 부구조물인 건물의 운동에너지 T_b 와 변형에너지 V_b 는 각각 다음과 같다.

$$T_b = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \quad (1)$$

$$V_b = \frac{1}{2} K y^2 \quad (2)$$

M, K, y 는 각각 건물의 질량행렬, 강성 행렬, 변위 벡터이며 \cdot 는 시간에 대한 1차미분을 의미한다.

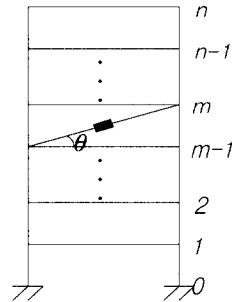


그림 2 건물에 설치된 감쇠기

한편 또 다른 부구조물인 감쇠기는 그림 2와 같이 n 층의 건물에 $m-1$ 층과 m 층 사이에 각도 θ 로 설치되며, 진동 거동시 유발되는 에너지는 감쇠기의 점성성과 강성으로 인한 소산에너지 D_d 와 변형에너지 V_d 는 다음과 같다.

$$D_d = \frac{1}{2} C_d (\dot{y}_m - \dot{y}_{m-1})^2 \cos^2 \theta \quad (3)$$

$$V_d = \frac{1}{2} k_d (y_m - y_{m-1})^2 \cos^2 \theta \quad (4)$$

C_d 과 k_d 은 각각 m 층에 설치된 감쇠기의 감쇠상수와 강성계수이다.

건물의 변위벡터 y 를 다음과 같이 j 번째 모드 ϕ_j 와 모드계수 $q_j(t)$ 로 표현할 수 있으며,

$$y = \sum q_j(t) \phi_j \quad (5)$$

윗 식을 각각의 에너지 식(1)과 (2)에 대입하면

$$T_b = \frac{1}{2} \sum \dot{q}_j^2 \quad (6)$$

$$V_b = \frac{1}{2} \sum \omega_j^2 q_j^2 \quad (7)$$

와 같이 모드계수 q_j 와 건물의 고유진동수 ω_j 이 포함된 식으로 변환할 수 있다. 모드 ϕ 는 질량행렬 M 으로 표준화(mass normalization)되었기 때문에 윗식에는 나타나 있지 않다.

또한, 감쇠기가 설치되어 있는 m 층과 $m-1$ 층의 변위 y_m 와 y_{m-1} 는 다음과 같이 표현이 된다.

$$y_m = \sum q_j \phi_{j,m} \quad (8)$$

$$y_{m-1} = \sum q_j \phi_{j,m-1} \quad (9)$$

윗 식에서 $\phi_{j,m}$ 은 j 번째 모드에서 m 층의 성분을 의미한다.

한편, 감쇠기가 설치된 층의 변위를 각각 독립변수 Z_u 와 Z_b 로 정의하면 감쇠에너지 D_d 와 변형에너지 V_d 는 다음과 같이 표현된다.

$$D_d = \frac{1}{2} C_d (\dot{Z}_u - \dot{Z}_b)^2 \cos^2 \theta \quad (10)$$

$$V_d = \frac{1}{2} k_d (Z_u - Z_b)^2 \cos^2 \theta \quad (11)$$

건물의 변위 y_m 와 y_{m-1} 는 각각 감쇠기의 변위 Z_u , Z_b 와 같으므로 이러한 조건은 다음과 같은 제약조건이 된다.

$$y_m = Z_u \quad (12)$$

$$y_{m-1} = Z_b \quad (13)$$

위 제약조건을 다음과 같이 f_1 와 f_2 로 정의하면

$$f_1 = \sum q_j \phi_{j,m} - Z_u = 0 \quad (14)$$

$$f_2 = \sum q_j \phi_{j,m-1} - Z_b = 0 \quad (15)$$

와 같다.

위와 같이 부분구조물인 건물과 감쇠기에 관계된 에너지를 다음과 같이 통합된 건물의

에너지 T , V , D 로 변환할 수 있다.

$$T = T_b \quad (16)$$

$$V = V_b + V_d \quad (17)$$

$$D = D_d \quad (18)$$

위와 같이, 통합된 에너지 식과 제약조건에 다음과 같은 라그랑지 방정식(Lagrange equation)⁽⁴⁾을 적용하여 특성방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_i} = 0 \quad (19)$$

위에서 λ_1 과 λ_2 는 각각 식(14)와 (15)에 관계된 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)이며, 외력이 없는 자유진동을 고려하였으므로 우변 항이 0이다. 식(16)~(18)을 식(19)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 특성방정식을 유도할 수 있다.

$$\sum_j \frac{(\phi_{j,m} - \phi_{j,m-1})^2}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{(k_d - i\omega C_d) \cos^2 \theta} \quad (20)$$

윗 식을 살펴보면 일반적인 고유치 해석에 관한 특성방정식의 형태가 아닐 뿐 만 아니라, 감쇠기의 점성에 따른 허수의 등장으로 복소수 문제로 확대되는 것을 알 수 있다. 이러한 식의 해석방법으로는 미지수 항을 건물의 특정 고유진동수에 관련된 동조 진동수항(tuned frequency terms)과 비동조 진동수항(detuned frequency terms)으로 구분하여 방정식의 미지수 차수를 낮추어 해석하는 섭동법(perturbation method)이 있다.⁽⁵⁾ 그러나, 동조 진동수항에 여러개의 모드가 포함될 때에는 수치적으로 해석하기가 어려우며 고유진동수의 변화를 예측하기 곤란하다. 또한, 식(20)이 건물과 감쇠기의 진동특성에 관한 사항들로 구성되어 있기 때문에, 이러한 사항들에 의한 변화를 분석할 수 있는 수치해석적인 방법이 아닌 다른 시도가 필요하다. 따라서, 본 연구에서는 위 특성방정식의 해인 고유진동수를 그림(graphical

solution)을 통하여 파악하는 새로운 방법을 제시하고자 한다.

위 특성방정식에서 미지수인 ω 는 다음과 같이 실수 a , b 로 구성된 복소수로 치환할 수 있다.

$$\omega = a + bi \quad (21)$$

이 식을 식(20)에 대입하여 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)에 관련된 2개의 방정식으로 분류를 하고, 변수 a , b 에 대한 실수부와 허수부에 대한 그림의 교점을 파악하여 ω 를 구하기로 한다.

첫째로, 그림 3과 같은 1층 모델의 고유진동수를 그림 해석을 통하여 구하기로 한다. 1층 모델인 경우 건물의 모드가 1개뿐이므로 식(20)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\phi_{11}^2}{\omega^2 - \omega_1^2} = \frac{1}{(k_d - i\omega C_d) \cos^2 \theta} \quad (22)$$

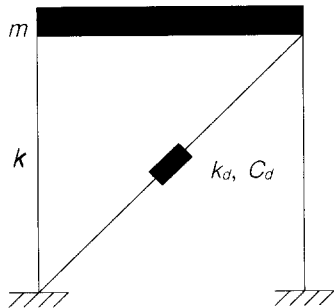


그림 3 감쇠기가 설치된 1층 모델

위 모델에서 감쇠기의 강성 k_d 와 감쇠계수 C_d 는 각각 건물의 강성 k 의 0.5배, $0.1\sqrt{km}$ 로 하였으며, θ 는 45° 로 설정하였다. 그리고, 식(21)과 같이 ω 를 $a + bi$ 로 치환하여 식(22)에 대입하여 실수부와 허수부에 관계된 2개의 방정식(변수 a 와 b 로 표현됨)을 구하여 다음 그림 4와 같이 나타내었다. 참고로 그림 4는 프로그램 언어인 Mathematica에서 Implicit Plot이란 명령어를 사용하여 쉽게 그릴 수 있다.⁽⁶⁾

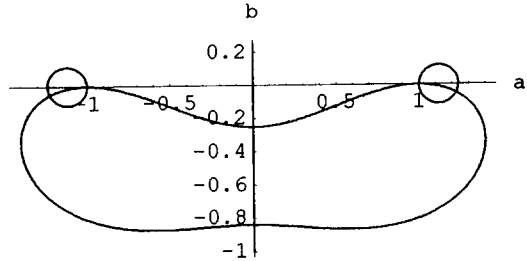


그림 4 복소고유진동수에 관한 실수부와 허수부

위 그림에서 원형에 가까운 것은 실수부이고, 그 외는 허수부에 관계된 것을 나타내며 $a=0$ 인 축을 기준으로 좌우대칭인 것은 복소수 문제에서 해가 켈레 복소수(conjugate complex)로 나타나기 때문이다. 따라서, a 가 양인 한 쪽 부분만을 보면 교점이 2개 있는 것을 알 수 있으며, 하나는 $b=0$ 일 때이며, 또다른 하나는 $b \neq 0$ 일 때이다. $b=0$ 일 때는 감쇠기가 없는 경우이며, $b \neq 0$ 일 때는 감쇠기를 설치한 경우이다.

따라서, 위 모델에서의 해인 복소고유진동수(complex natural frequency) ω 는 $b \neq 0$ 일 때의 교점이므로 다음과 같으며,

$$\omega = \pm 1.2237 - 0.05i \quad (23)$$

$a = \pm 1.2237$, $b = -0.05$ 인 것을 알 수 있다.

복소수 ω 를 다음과 같은 단자유도계의 고유진동수 ω^* 와 모드 감쇠비 ξ^* 로 구성된 식을 이용하여 ω^* 와 ξ^* 를 구할 수 있다.⁽⁷⁾

$$\omega = \omega^* \sqrt{1 - \xi^{*2}} - i\xi^* \omega^* \quad (24)$$

식(23)을 식(24)의 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\omega^* = 1.2247 \text{ rad/sec} \quad (25)$$

$$\xi^* = 0.0408 \quad (26)$$

이다.

위 결과는 식(22)를 그대로 이용하였기 때문에 엄밀해(exact solution)와 같으며, 감쇠기가

없을 때는 건물의 고유진동수는 1rad/sec이다. 따라서, 감쇠기의 강성으로 인하여 고유진동수가 1rad/sec에서 1.2247rad/sec로 증가하였으며, 점성으로 인한 감쇠비가 0에서 0.0408로 증가하였다.

그림 5는 2층건물 모델로 2층에 감쇠기를 설치한 경우이다. 이러한 경우 식(20)의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\frac{(\phi_{12} - \phi_{11})^2}{\omega^2 - \omega_1^2} + \frac{(\phi_{22} - \phi_{21})^2}{\omega^2 - \omega_2^2} = \frac{1}{(k_d - i\omega C_d) \cos^2 \theta} \quad (27)$$

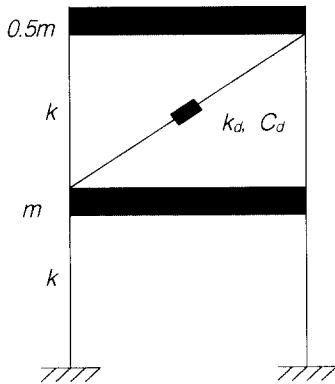


그림 5 감쇠기가 설치된 2층모델

그림 3의 모델과 같이 감쇠기의 강성 k_d 와 감쇠계수 C_d 는 각각 건물의 강성 k 의 0.5배, $0.1\sqrt{km}$ 로 하였으며, 1차와 2차 복소고유진동수에 관한 그림은 그림 6, 7과 같으며 $a > 0$ 인 부분만을 나타내었다.

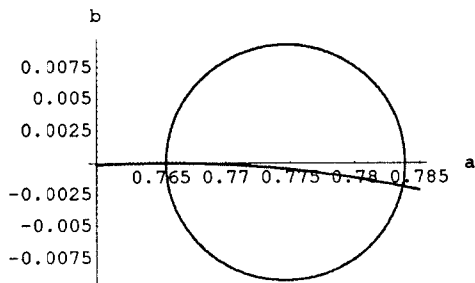


그림 6 1차 복소고유진동수에 관한 실수부와 허수부

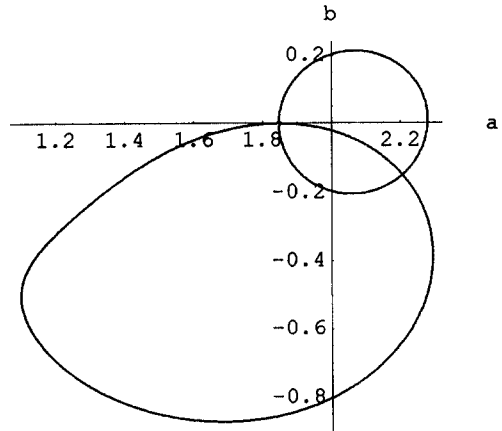


그림 7 2차 복소고유진동수에 관한 실수부와 허수부

위 그림의 교점에서 1차와 2차 고유진동수 ω_1 와 ω_2 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega_1 = 0.7837 - 0.0018i \quad (28)$$

$$\omega_2 = 2.2052 - 0.1482i \quad (29)$$

위 진동수를 실수의 고유진동수와 모드감쇠비로 변환하면 다음과 같다.

$$\omega_1^* = 0.7837 \text{ rad/sec} \quad (30)$$

$$\omega_2^* = 2.2102 \text{ rad/sec} \quad (31)$$

$$\xi_1^* = 0.0023 \quad (32)$$

$$\xi_2^* = 0.0671 \quad (33)$$

위 2층모델의 해석은 감쇠기의 설치로 인한 비비례 감쇠를 고려한 다음과 같은 상태방정식 기법의 특성방정식 해석을 통하여 고유진동수와 모드를 구할 수 있다.⁽²⁾

$$A \dot{Y} + BY = 0 \quad (34)$$

윗 식에서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & \bar{K} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$Y = \begin{Bmatrix} y \\ y \end{Bmatrix} \quad (37)$$

이며, M 은 건물의 질량행렬, C 는 감쇠기로 인한 감쇠행렬, \bar{K} 는 건물과 감쇠기로 인한 강성행렬이다.

식(37)의 Y 를 ve^{st} 로 치환하여 식(34)에 대입하면, 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$sAv + Bv = 0 \quad (38)$$

위에서 v 와 s 는 각각 감쇠기가 설치된 2층 모델의 복소모드벡터(complex mode vector)와 복소고유진동수(complex natural frequency)이다.

식(38)의 고유치 해석을 통하여 복소고유진동수 s 를 구하고, 실수의 고유진동수와 모드감쇠비로 변환하면 다음 표 1과 같다.

표 1 상태방정식 기법에 의한 2층모델의 고유치 해석

특 성	고유진동수	모드감쇠비
1차	0.7839	0.0024
2차	2.2104	0.0675

표 1의 결과와 그림해석에 의한 결과인 식(30)~(33)을 비교하면 매우 일치하는 것을 알 수 있으며, 근소한 차이는 수치해석 과정에 따른 오차라 볼 수 있다.

이러한 결과의 일치는 상태방정식 기법과 본 논문에서 제안한 식(20)을 이용한 방법이 모두 엄밀해석이기 때문이다. 그러나, 식(20)의 방법은 건물과 감쇠기의 특성이 나타나 있으므로 전체구조물에 대한 건물과 감쇠기의

영향을 분석할 수 있으며, 그림해석을 통하여 고유진동수의 변화를 알 수 있다.

그림 6과 7에서, 교점 중 하나는 $b=0$ 일 때로 감쇠기가 없는 경우로, 각각 0.7654와 1.8478이며, 건물의 고유진동수 ω_1, ω_2 에 해당된다. 이러한 경우는 식(27)에서 k_d 와 C_d 가 0일 때 이므로, ω 는 ω_1 과 ω_2 가 되는 것을 재확인 할 수 있다. 그리고, 또 다른 교점은 감쇠기가 설치된 경우로, 허수인 b 값이 존재하며 a 값이 증가하여 실수인 ω_1 와 ω_2 에서 복소수로 변화한 것을 알 수 있다.

이상과 같은 복소고유진동수의 변화는 그림 6과 7의 실수부에 관한 원형그림의 특성을 통하여 미리 예측할 수 있다. 원형그림과 $b=0$ 과의 교점은 그림 6과 7의 경우 각각 (0.7654, 0.7839)와 (1.8478, 2.2791)이다. 0.7654와 1.8478는 감쇠기가 없는 경우의 건물의 고유진동수이며, 0.7839와 2.2791는 점성이 없고 강성만 있어서 건물의 고유진동수만 증가시켜주는 감쇠기를 설치하였을 때, 즉, $C_d=0$ 일 때의 건물의 고유진동수인 0.7836와 2.2104로 예측할 수 있다. 또한, 원형그림에서 반지름을 구할 수 있어 그림 6과 7의 경우 각각 0.0091와 0.1813이다. 이 값은 복소고유진동수의 허수값인 b 의 상한값이 된다.

이상과 같은 과정으로 감쇠기 설치로 인한 건물의 복소고유진동수를 정확히 구할 수 있을 뿐 만 아니라, 복소고유진동수의 최대 및 최소값에 대한 정보를 미리 파악할 수 있다.

다음은 감쇠기가 1층에 설치된 3층 건물에 관한 해석을 그림을 통하여 분석하기로 한다. 그림 8과 같이 전단형 3층 건물인 경우 건물의 모드는 3개 있으므로 식(20)의 특성방정식에서 $j = 1, 2, 3$ 으로 하는 3개의 모드를 고려하면 된다.

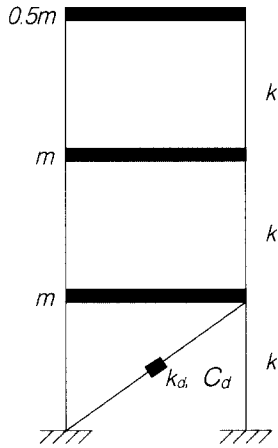


그림 8 감쇠기가 설치된 3층 건물

위 모델에서 감쇠기의 강성 k_d 와 감쇠계수 C_d 는 각각 건물 층강성 k 의 0.5배, $0.1\sqrt{km}$ 로 하였다. 식(20)을 이용한 해석그림은 그림 9, 10, 11과 같으며 복소고유진동수를 실수의 고유진동수와 모드감쇠비로 분리한 것이 다음 표 2와 같으며, 2층모델의 해석에서 논의된 바와 같이 상태방정식 기법과 같은 엄밀해라고 볼 수 있다.

표 2 고유진동수와 모드감쇠비

모드	특성	고유진동수	모드감쇠비
1차		0.5798	0.0095
2차		1.5261	0.0207
3차		1.9576	0.0066

그림 9, 10, 11에서도 마찬가지로 그림 6과 7에서와 같은 현상을 파악할 수 있다. 감쇠기 설치로 복소고유진동수가 나타나며, 실수부 그림이 $b=0$ 인 축에 위치한 원형으로 표현되기 때문에 복소 고유진동수의 변화 및 경계값을 예측할 수 있다.

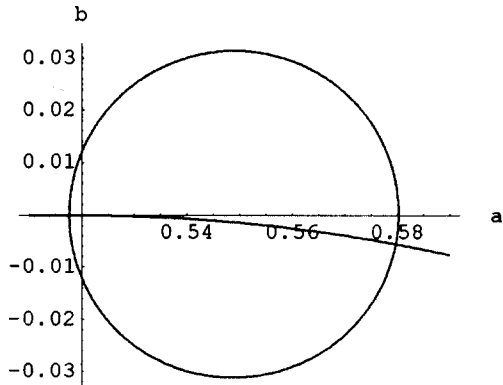


그림 9 1차 복소고유진동수에 관한 실수부와 허수부

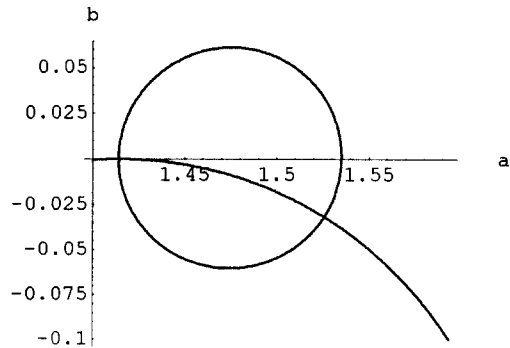


그림 10 2차 복소고유진동수에 관한 실수부와 허수부

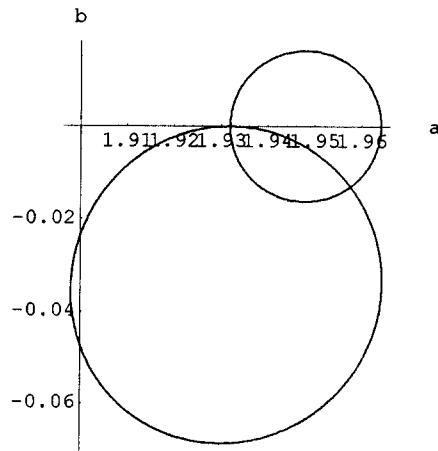


그림 11 3차 복소고유진동수에 관한 실수부와 허수부

3. 결 론

부분 모드법을 이용하여 감쇠기가 설치된 건물의 특성방정식을 유도하였으며 건물의 고유진동수, 감쇠기가 설치된 층의 모드 성분, 감쇠기의 점성 및 강성에 관계된 식으로 나타났다. 유도된 특성방정식은 감쇠기의 점성으로 인하여 복소수 값이 포함되었으며 고유치 해석에 관한 일반적인 형태와는 상이하였다. 따라서, 고유치 해석을 위한 일반적인 수치해석 방법 대신 그림 해석을 통하여 감쇠기의 설치로 인한 점성과 강성의 증가로 건물의 복소 고유진동수의 변화를 분석하는 방법을 제시하였다. 그림 해석의 결과에 따르면, 감쇠기의 점성과 강성으로 인한 복소 고유진동수의 물리적인 의미를 확인할 수 있었으며 최소 및 최대값을 예측할 수 있었다. 또한, 복소 고유진동수를 실수의 고유진동수와 모드감쇠비로 변환하여 상대방정식에 의한 방법의 결과와 비교하여 정확성을 검증하였다.

참 고 문 헌

1. Zhang, R.-H., and Soong, T.T., "Seismic response of steel frame structures with added viscoelastic dampers," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.18, 1989, pp. 389-396.
2. Lobo, R.F. "Inelastic response of reinforced concrete structures with viscoelastic braces," *Technical Report NCEER - 93 - 0006*, 1993, pp. 2.9-2.11.
3. Dowell, E.H., "On some general properties of combined dynamical systems," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.46, 1979, pp. 206-209.
4. Greenwood, D.Y., *Principles of dynamics*, 2nded. N.J., Prentice-Hall Inc., 1988, pp. 280-282.
5. Igusa, T., "Resonance characteristics of connected subsystems : theory and simple configurations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.146, No.3, pp. 407-421.
6. Wolfram, S., *Mathematica : a system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.
7. Veletsos, A.S., and Ventura, C.E., "Modal analysis of non-classical damped linear systems," *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, Vol.14, 1986, pp. 217-243.