

# 불확실성을 가지는 비선형 시스템의 견실 퍼지 제어기 설계 Robust Fuzzy Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems

정은태 · 권성하 · 조종선

Eun Tae Jeung, Sung-Ha Kwon and Joongseon Joh

창원대학교 공과대학 제어계측공학과

## 요 약

본 논문은 파라미터 불확실성을 가지는 비선형 시스템을 안정화하는 견실 퍼지 제어기 설계 기법을 제시한다. 견실 퍼지 제어기를 설계하기 위하여, 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno(T-S) 모델로 표현하고 퍼지 제어기는 병렬 분산 보상(PDC: parallel distributed compensation)의 개념을 이용한다. Lyapunov 함수를 이용하여 파라미터 불확실성을 가지는 T-S 퍼지 모델의 안정성을 논하고, 견실 퍼지 제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬 부등식(LMI: linear matrix inequality)을 이용하여 나타낸다. 이러한 선형 행렬 부등식의 해들로부터 견실 퍼지 제어기를 직접적으로 구할 수 있다.

## ABSTRACT

This paper presents a method for designing robust fuzzy controllers to stabilize nonlinear systems with parameter uncertainty. To design robust fuzzy controllers, nonlinear systems are represented by Takagi and Sugeno's fuzzy models. The fuzzy control systems utilize the concept of the so-called parallel distributed compensation (PDC). Using a Lyapunov functional, the stability for Takagi and Sugeno's fuzzy model with parameter uncertainty is discussed. And a sufficient condition for the existence of robust fuzzy controllers is given in terms of linear matrix inequality(LMI). Based on the solutions of their LMIs, we can obtain a robust fuzzy controller.

## 1. 서 론

1965년 Zadeh가 퍼지 이론에 대한 논문을 발표한 후, 퍼지 이론을 이용한 퍼지 제어는 많은 산업 현장에서 응용되었고 많은 성공적인 사례를 가지고 있다. 그러나 퍼지 제어 시스템에 대한 안정성 해석과 체계적인 제어기 설계 기법을 제시한 논문은 그다지 많지 않다. 최근, Tanaka 등[1]은 전건부에 파라미터 불확실성을 가지는 퍼지 시스템에 대한 견실 안정성 조건을 유도하였고, Wang 등[2]은 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템을 안정화하는 방법을 제시하였다. 퍼지 제어기를 설계하기 위해, 그들은 병렬분산보상(PDC: parallel distributed compensation)이라는 개념을 이용하였다. 또한, Tanaka 등[3]은 T-S 퍼지 모델에 대하여 감쇠율(decay rate)을 만족하는 안정성 조건을 선형 행렬 부등식을 이용하여 나타내었다. 그리고 Joh 등[4]은 각 부시스템의 극배치를 고려함으로써 시스템의 성능과 안정성을 보장하는 퍼지 제어기를 선형 행렬 부등식으로 나타내었다.

그리고 비선형성과 불확실성으로 인하여 전체 시

스템이 불안정해질 수 있으므로 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대한 퍼지 제어는 Tanaka 등[5]과 Chen 등[6]에 의해 이루어졌다. Tanaka 등[5]은 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대한 안정성을 해석하고, 불확실성 비선형 시스템을 안정화하는 견실 퍼지 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 그러나 그들의 설계 기법은 페루프 시스템의 안정성을 판명하기 전에 미리 상태궤환 이득을 결정하여야 한다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 연속시간과 이산시간에서 T-S 퍼지 모델로 묘사된 불확실성 비선형 시스템을 안정화하는 퍼지 제어기를 설계한다. 이러한 퍼지 제어기는 병렬분산보상의 개념을 이용하여 구성되며, 파라미터 불확실성에 대해서 페루프 시스템이 점근적으로 안정할 충분조건을 유도한다. 이러한 유도 과정에서, 불확실성을 가지는 T-S 퍼지 모델에 대한 퍼지 제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬 부등식으로 나타내었으며, 견실 퍼지 제어기는 선형 행렬 부등식의 해로부터 구성되어 졌다. 본 논문의 타당성을 보이기 위해 간단한 예를 보인다.

## 2. 문제설정과 예비지식

T-S 퍼지 모델은 비선형 시스템을 모델링하는데 효과적인 방법으로 잘 알려져 있다. 불확실성을 가지는 T-S 퍼지 모델

Plant rule  $i$ : IF  $x_1(t)$  is  $M_{i_1}$  and  $\dots$  and  $x_n(t)$  is  $M_{i_n}$   
 THEN  $\dot{\Delta x}(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, r$  (1)

을 고려한다. 여기서  $\dot{\Delta x}(t)$ 는 연속시간에서  $\dot{x}(t)$ 를, 이산시간에서  $x(t+1)$ 를 의미한다.  $M_{ij}$ 는 퍼지 집합이고,  $x(t) \in R^n$ 는 상태,  $u(t) \in R^m$ 는 입력,  $r$ 은 IF-THEN 규칙의 수,  $A$ 와  $B$ 는 적절한 차원을 가지는 상수 행렬이다. 그리고 불확실성 행렬은

$$[\Delta A_i(t) \Delta B_i(t)] = H_i F_i(t) [E_{A_i} \ E_{B_i}], \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2)$$

와 같이 표현할 수 있다고 가정하고,  $H_i, E_{A_i}, E_{B_i}, i = 1, 2, \dots, r$ 는 적절한 차원을 가지는 기지의 상수행렬이고,  $F_i(t), i = 1, 2, \dots, r$ 는

$$F_i(t) \in \Omega = \{F(t) | F^T(t)F(t) \leq I, F(t) \text{의 요소들은 Lebesgue 측정가능}\} \quad (3)$$

와 같이 크기가 제한된 미지의 행렬 함수이다. 주어진  $(x(t), u(t))$ 에 대해서, T-S 퍼지 모델은

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) \{(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \{(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)\} \quad (4) \end{aligned}$$

와 같이 퍼지 모델의 출력으로  $\dot{\Delta x}(t)$ 를 추론한다. 여기서

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t))$$

$$h_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))}$$

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$$

이고  $M_{ij}(x_j(t))$ 는 멤버십 함수  $M_{ij}$ 에서  $x_j(t)$ 의 멤버십 등급이다. 그리고 모든  $t$ 에 대하여

$$\begin{aligned} w_i(x(t)) &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) &> 0 \end{aligned} \quad (5)$$

을 가정하면,

$$h_i(x(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1 \quad (6)$$

이다. 그리고 모든  $i = 1, 2, \dots, r$ 에 대해서  $(A_i, B_i)$ 는 제어가능(controllable)이라 가정한다. (1)의 퍼지 시스템을 안정화하는 전실 퍼지 제어기로

Control rule  $i$ : IF  $x_1(t)$  is  $M_{i_1}$  and  $\dots$  and  $x_n(t)$  is  $M_{i_n}$   
 THEN  $u(t) = K_i x(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  (7)

와 같이 묘사된 상태폐환 제어기를 고려한다. 이러한 퍼지 제어기의 최종 출력은

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) K_i x(t) \quad (8)$$

이다. 퍼지 시스템 (4)에 퍼지 제어기 (8)을 적용하였을 때, 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \\ &\quad \{(A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t)) K_j\} x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

이다. 본 논문의 목적은 연속시간 퍼지 시스템(CFS: continuous-time fuzzy system)과 이산시간 퍼지 시스템(DFS: discrete-time fuzzy system)에서 폐루프 시스템 (9)를 안정화하는  $K_i$ 를 설계하는 것이다. 주요 결과에 앞서 잘 알려진 결과들을 알아본다.

**보조정리 1 [CFS]** 연속시간에서 제어입력을 가하지 않은 시스템 (4)를 고려한다.

$$\hat{A}_i^T(t)P + P\hat{A}_i(t) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (10)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $P$ 가 존재하면, 제어입력을 가하지 않은 시스템 (4)의 평형점(equilibrium point)은 점근적으로 안정하다. 여기서  $\hat{A}_i(t) = A_i + \Delta A_i(t)$ 이다.

**증명** 참고문헌 [7] 참조. ■

**보조정리 2 [DFS]** 이산시간에서 제어입력을 가하지 않은 시스템 (4)를 고려한다.

$$\hat{A}_i^T(t)P\hat{A}_i(t) - P < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (11)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $P$ 가 존재하면, 제어입력을 가하지 않은 시스템 (4)의 평형점(equilibrium point)은 점근적으로 안정하다. 여기서  $\hat{A}_i(t) = A_i + \Delta A_i(t)$ 이다.

**증명** 참고문헌 [1] 참조. ■

**보조정리 3** 임의의 대칭행렬  $L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{bmatrix}$ 에 대해

다음은 등가이다.

i)  $L < 0$

ii)  $L_{11} < 0, L_{22} - L_{12}^T L_{11}^{-1} L_{12} < 0$

iii)  $L_{22} < 0, L_{11} - L_{12} L_{22}^{-1} L_{12}^T < 0$

**증명** 참고문헌 [8] 참조. ■

**보조정리 4** 적절한 차원을 가지는 임의의 상수 행렬  $A, B$ 에 대해서,

$$A^* F^*(t)B + B^* F(t)A \leq \lambda A^* A + \lambda^{-1} B^* B, \quad \forall F(t) \in \Omega, \lambda > 0 \quad (12)$$

이다.

**증명** 참고문헌 [9] 참조. ■

**보조정리 5** 정방행렬  $A$ 의 고유치가

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid f_D(z) := L + Nz + N^T \bar{z} < 0\} \quad (13)$$

와 같은 볼록(convex) 영역에 존재할 필요충분조건은

$$[l_{ij}P + n_{ij}AP + n_{ji}PA^T]_{1 \leq i, j \leq k} < 0 \quad (14)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $P$ 가 존재하는 것이다. 여기서  $L = L^T = [l_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}, N = [n_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}$ 이고,

$$[R_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{k1} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

이다.

**증명** 참고문헌 [10] 참조. ■

### 3. 불확실성을 가지는 T-S 퍼지모델의 안정성 조건

이 절에서는 파라미터 불확실성을 가지는 T-S 퍼지 시스템 (1)을 안정화하는 건설 퍼지 제어기 (8)이 존재할 충분조건을 제시하고, 제어기 설계 방법을 제시한다.

**정리 1 [CFS]** 연속시간에서 파라미터 불확실성을 가지는 T-S 퍼지 시스템 (1)을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} S_{ij} & Q_c E_{A_i}^T + V_j^T E_{B_i}^T \\ E_{A_i} Q_c + E_{B_i} V_j & -\lambda_{ij} I \end{bmatrix} < 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, r \quad (15)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $Q_c$ , 행렬  $V_j (j=1, 2, \dots, r)$ , 양수  $\lambda_{ij} (i, j=1, 2, \dots, r)$ 가 존재하면, (1)로 묘사된 불확실성을 가지는 비선형 시스템을 안정화하는 퍼지 제어기 (8)이 존재한다. 여기서

$$S_{ij} = Q_c A_i^T + A_i Q_c + V_j^T B_i^T + B_i V_j + \lambda_{ij} H_i H_i^T, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (16)$$

$$Q_c = P_c^{-1}, \quad (17)$$

$$V_j = K_j Q_c \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (18)$$

이다. 더욱이 퍼지 제어기의 상태제환 이득들은 (18)로부터 얻을 수 있다.

**증명** 보조정리 3으로부터, 행렬 부등식 (15)는 모든  $i, j=1, 2, \dots, r$ 에 대해서

$$S_{ij} + \lambda_{ij}^{-1} Q_c (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) Q_c < 0 \quad (19)$$

을 의미한다. (19)의 앞과 뒤에  $P_c > 0$ 를 각각 곱하면, 모든  $i, j=1, 2, \dots, r$ 에 대해서

$$(A_i + B_i K_j)^T P_c + P_c (A_i + B_i K_j) + \lambda_{ij} P_c H_i H_i^T P_c + \lambda_{ij}^{-1} (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) < 0 \quad (20)$$

이다. 보조정리 4로부터, 모든  $F_i(t) \in \Omega$ 와  $i, j=1, 2, \dots, r$ 에 대해서

$$\lambda_{ij} P_c H_i H_i^T P_c + \lambda_{ij}^{-1} (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) \geq P_c H_i F_i(t) (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) + (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) F_i^T(t) H_i^T P_c \quad (21)$$

이므로 부등식 (20)은

$$[(A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t)) K_j]^T P_c + P_c [(A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t)) K_j] < 0 \quad (22)$$

이다. 따라서 보조정리 1로부터 증명은 완성되었다. ■

**정리 2 [DFS]** 이산시간에서 불확실성을 가지는 T-S 퍼지 시스템 (1)을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} -Q_d & Q_d A_i^T + V_j^T B_i^T & Q_d E_{A_i}^T + V_j^T E_{B_i}^T \\ A_i Q_d + B_i V_j & -Q_d + \lambda_{ij} H_i H_i^T & 0 \\ E_{A_i} Q_d + E_{B_i} V_j & 0 & -\lambda_{ij} I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, r \quad (23)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $Q_d$ , 행렬  $V_j (j=1, 2, \dots, r)$ , 양수  $\lambda_{ij} (i, j=1, 2, \dots, r)$ 가 존재하면, (1)로 묘사된 불확실성을 가지는 비선형 시스템을 안정화하는 퍼지 제어기 (8)이 존재한다. 여기서

$$Q_d = P_d^{-1}, \quad (24)$$

$$V_j = K_j Q_d, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (25)$$

이다. 더욱이 퍼지 제어기의 상태제환 이득들은 (25)로부터 얻을 수 있다.

**증명** 보조정리 3으로부터, 부등식 (23)은 모든  $i, j=1, 2, \dots, r$ 에 대해서

$$-Q_d + Q_d(A_i + B_i K_j)^T (Q_d - \lambda_{ij} H_i H_i^T)^{-1} (A_i + B_i K_j) Q_d + \lambda_{ij}^{-1} Q_d (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) Q_d < 0 \quad (26)$$

을 의미한다. (19)의 앞과 뒤에  $P_d > 0$ 를 각각 곱하면, 모든  $i, j=1, 2, \dots, r$ 에 대해서

$$\begin{aligned} 0 &> -P_d + (A_i + B_i K_j)^T P_d (I - \lambda_{ij} H_i H_i^T P_d)^{-1} (A_i + B_i K_j) \\ &\quad + \lambda_{ij}^{-1} (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) \\ &= -P_d + (A_i + B_i K_j)^T P_d (A_i + B_i K_j) \\ &\quad + \lambda_{ij}^{-1} (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) \\ &\quad + (A_i + B_i K_j)^T P_d H_i (\lambda_{ij}^{-1} I - H_i^T P_d H_i)^{-1} H_i^T P_d \\ &\quad \times (A_i + B_i K_j) \\ &\geq -P_d + (A_i + B_i K_j)^T P_d (A_i + B_i K_j) \\ &\quad + \lambda_{ij}^{-1} (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)^T F_i^T(t) F_i(t) (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) \\ &\quad + (A_i + B_i K_j)^T P_d H_i \\ &\quad \times (\lambda_{ij}^{-1} I - H_i^T P_d H_i)^{-1} H_i^T P_d (A_i + B_i K_j) \\ &\quad - [H_i^T P_d (A_i + B_i K_j) \\ &\quad - (\lambda_{ij}^{-1} I - H_i^T P_d H_i) F_i(t) (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)]^T \\ &\quad \times (\lambda_{ij}^{-1} I - H_i^T P_d H_i)^{-1} [H_i^T P_d (A_i + B_i K_j) \\ &\quad - (\lambda_{ij}^{-1} I - H_i^T P_d H_i) F_i(t) (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)] \\ &= [(A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t)) K_j]^T P_d \\ &\quad \times [(A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t)) K_j] - P_d \end{aligned} \quad (27)$$

이므로, 보조정리 2에 의해서 증명은 완성된다. ■

**참고 1** 파라미터 불확실성을 가지지 않는 경우를 고려한다. 즉,  $\Delta A_i(t)=0, \Delta B_i(t)=0, i=1, 2, \dots, r$ 일 때, (15)와 (23)의 안정성 조건은 각각

CFS:

$$Q_c A_i^T + A_i Q_c + V_j^T B_i^T + B_i V_j < 0, \quad i, j=1, 2, \dots, r \quad (28)$$

DFS:

$$\begin{bmatrix} -Q_d & Q_d A_i^T + V_j^T B_i^T \\ A_i Q_d + B_i V_j & -Q_d \end{bmatrix} < 0, \quad i, j=1, 2, \dots, r \quad (29)$$

으로 바뀌어진다. 그러므로 정리 1과 정리 2는 불확실성이 없는 퍼지 제어 문제를 포함한다. 즉, 감쇠율을 제외한 [3]의 결과와 동일하고, 부시스템의 극배치를 제외한 [4]의 결과와 동일하다.

정리 1과 정리 2는 퍼지 페루프 시스템의 성능을 논의한 것이 아니라, 퍼지 제어기의 존재 조건과 퍼지 제어기 설계 방법을 논의한 것이다. 만약 퍼지 시스템 (9)의 안정성뿐만 아니라 성능을 요구한다면, 정리 1(혹은 정리 2)에 보조정리 5를 첨가함으로써 달성할 수 있다.

**참고 2** 불확실성이 없는  $i$ 번째 페루프 부시스템에 대

한 극배치 조건을 가지는 퍼지 제어기 설계 문제를 고려한다.  $i$ 번째 페루프 부시스템은  $i$ 번째 선형 부시스템에 대한  $i$ 번째 제어기가 동작하여 이루어진 페루프 시스템을 의미한다. 퍼지 페루프 시스템 (9)의 안정성을 보장할 뿐만 아니라 각 페루프 부시스템의 극점을 원하는 영역에 배치하는 퍼지 제어기가 존재하기 위해서는, 모든  $i, j=1, 2, \dots, r$ 에 대해서

CFS: (15)

$$[l_{pq} Q_c + n_{pq} (A_i Q_c + B_i V_i) + n_{qp} (Q_c A_i^T + V_i^T B_i^T)]_{1 \leq p, q \leq k} < 0 \quad (30)$$

DFS: (23)

$$[l_{pq} Q_d + n_{pq} (A_i Q_d + B_i V_i) + n_{qp} (Q_d A_i^T + V_i^T B_i^T)]_{1 \leq p, q \leq k} < 0 \quad (31)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $Q_c$ (혹은  $Q_d$ ), 행렬  $V_i (i=1, 2, \dots, r)$ , 양수  $\lambda_{ij} (i, j=1, 2, \dots, r)$ 가 존재하면 된다.

## 4. 예 제

제안된 견실 퍼지 제어기의 타당성을 검증하기 위해 Tanaka 등[4]의 논문에서 다룬 비선형 질량-스프링-댐퍼(mass-spring-damper) 시스템에 대한 퍼지 제어를 설계한다. 동적 방정식은

$$m\ddot{y} + g(y, \dot{y}) + f(y) = \phi(\dot{y})u \quad (32)$$

이고,  $m$ 은 질량이고  $u$ 는 제어입력으로 가해지는 힘이다.  $g(y, \dot{y}), f(y), \phi(\dot{y})$ 은 각각 댐퍼, 스프링, 입력에 해당하는 비선형 항들이다. 그리고

$$y \in [-1.5, 1.5], \quad \dot{y} \in [-1.5, 1.5] \quad (33)$$

을 가정한다.

**예제 1** 비선형 항들이

$$g(y, \dot{y}) = c_1 y + c_2 \dot{y}, \quad f(y) = c(t)y, \quad \phi(\dot{y}) = 1 + c_3 \dot{y}^3 \quad (34)$$

이고, 각 파라미터들이

$$m = 1.0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c(t) \in [0.5, 1.81], \quad c_3 = 0.13 \quad (35)$$

인 경우를 고려한다. 이때 비선형 시스템은

$$\ddot{y} + \dot{y} + c(t)y = (1 + 0.13\dot{y}^3)u \quad (36)$$

이고, 불확실성을 가지는 비선형 시스템은

Plant rule 1: IF  $\dot{y}$  is  $M_1$  THEN

$$\dot{x} = (A_1 + \Delta A_1(t))x + B_1 u,$$

Plant rule 2: IF  $\dot{y}$  is  $M_2$  THEN

$$\dot{x} = (A_2 + \Delta A_2(t))x + B_2 u \quad (37)$$

와 같은 퍼지 시스템으로 표현할 수 있다. 여기서

$$x = [\dot{y} \ y]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1.4387 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = H_1 F_1(t) E_1, \quad \Delta A_2 = H_2 F_2(t) E_2,$$

$$H_1 = H_2 = [1 \ 0]^T, \quad E_1 = E_2 = [0 \ 0.655]$$

$$F_i(t) \in \Omega, \quad i = 1, 2 \quad (38)$$

이다. 퍼지 집합은

$$M_1(\dot{y}) = 0.5 + \frac{\dot{y}^3}{6.75}, \quad M_2(\dot{y}) = 1 - M_1(\dot{y}) = 0.5 - \frac{\dot{y}^3}{6.75} \quad (39)$$

으로 정의하고  $\dot{y} \in [-1.5, 1.5]$ 이다. 여기서 Plant Rule 1과 Plant Rule 2에 해당하는 선형 시스템은 각각  $\dot{y} = 1.5$ 와  $\dot{y} = -1.5$ 일 때, (36)을 선형화한 것이다. 그리고  $(1 + 0.13\dot{y}^3)$ 을

$$1 + 0.13\dot{y}^3 = M_1(\dot{y}) \times 1.43875 + (1 - M_1(\dot{y})) \times 0.56125 \quad (40)$$

와 같이 표현하여 (39)의 멤버십 함수를 구한 것이다. 따라서 (36)의 비선형 시스템과 (37)의 퍼지 시스템은 구간  $\dot{y} \in [-1.5, 1.5]$ 에서 일치한다. 각 부시스템의 극점을 중심이  $(-2, 0)$ 이고 반지름이 1.6인 원의 내부에 배치하고자 한다면, 보조정리 5로부터 선형 행렬 부등식 영역은

$$\begin{bmatrix} -1.6 & 2 \\ 2 & -1.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z < 0 \quad (41)$$

으로 주어진다. 이때 (15)와 (30)을 만족하는 해들은 MATLAB의 LMI Toolbox를 이용하여 구할 수 있다. 그 해들 중에 하나는

$$[\lambda]_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{bmatrix} 92.3966 & 92.3966 \\ 76.7998 & 76.7998 \end{bmatrix},$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} 263.2683 & -138.0123 \\ -138.0123 & 85.7900 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = [-334.3835 \ 154.5777],$$

$$V_2 = [-614.2364 \ 274.7837] \quad (42)$$

이고 퍼지 제어기의 상태궤환 이득  $K_1$ 과  $K_2$ 는

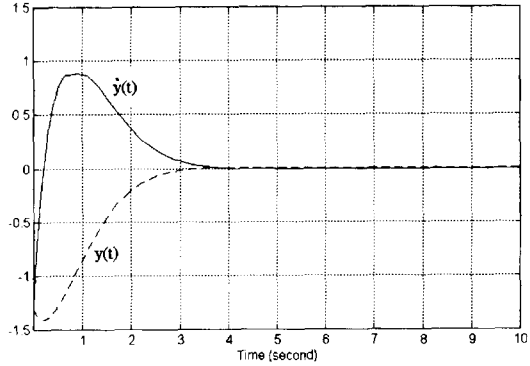


그림 1. 예제 1의 시간응답.  
Fig. 1. Response of example 1.

$$K_1 = [-2.0781 \ -1.5413],$$

$$K_2 = [-4.1747 \ -3.5130] \quad (43)$$

이다. 설계된 퍼지 제어기는 불확실성을 가지는 비선형 시스템을 안정화시킨다. 그림 1은 비선형 시뮬레이션을 한 결과이다. 시뮬레이션에 사용된 불확실성  $c(t)$ 는

$$c(t) = 1.155 + 0.655 \cos(3y^{10} \sin y) \quad (44)$$

이다.

**예제 2 비선형 항들이**

$$g(y, \dot{y}) = c_1(t)\dot{y} + c_2(t)\dot{y}^3,$$

$$f(y) = c_3(t)y,$$

$$\phi(\dot{y}) = 1 + c_4(t) \quad (45)$$

이고

$$m = 1.0, \quad c_1(t) \in [0.5, 1.5], \quad c_2(t) \in [0, 0.2],$$

$$c_3(t) \in [0.5, 1.81], \quad c_4(t) \in [-0.45, 0.45] \quad (46)$$

인 시스템을 고려한다. 이때 비선형 시스템

$$\ddot{y} + c_1(t)\dot{y} + c_2(t)\dot{y}^3 + c_3(t)y = (1 + c_4(t))u \quad (47)$$

은 예제 1과 마찬가지로

Plant rule 1: IF  $\dot{y}$  is  $M_1$  THEN

$$\dot{x} = (A_1 + \Delta A_1(t))x + (B_1 + \Delta B_1(t))u,$$

Plant rule 2: IF  $\dot{y}$  is  $M_2$  THEN

$$\dot{x} = (A_2 + \Delta A_2(t))x + (B_2 + \Delta B_2(t))u \quad (48)$$

와 같은 T-S 퍼지 모델로 표현되어질 수 있다. 여기서

$$x = [\dot{y} \ y]^T$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -1.0 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -1.225 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \Delta A_1 &= H_1 F_1(t) E_{A_1}, & \Delta B_1 &= H_1 F_1(t) E_{B_1}, \\
 \Delta A_2 &= H_2 F_2(t) E_{A_2}, & \Delta B_2 &= H_2 F_2(t) E_{B_2}, \\
 H_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.655 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & H_2 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.655 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 E_{A_1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{B_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & E_{A_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{B_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 F_i(t) &\in \Omega, \quad i=1, 2
 \end{aligned} \tag{49}$$

이다. 퍼지 집합을

$$M_1(\dot{y}) = 1 - \frac{\dot{y}^2}{2.25}, \quad M_2(\dot{y}) = \frac{\dot{y}^2}{2.25} \tag{50}$$

으로 정의하고  $\dot{y} \in [-1.5, 1.5]$ 이다. 원점을 중심으로 하고 사이 각이  $2\pi/3$ 인 원뿔 영역(conic sector)과  $-3 < \text{Re}(z) < -1$ 인 영역의 교집합 내에 각 부시스템의 극점을 배치하고자 한다면, 보조정리 5로부터 선형 행렬 부등식 영역은

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \\ \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \\ \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \end{bmatrix} \bar{z} < 0, \\
 &\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{z} < 0
 \end{aligned} \tag{51}$$

으로 주어진다. 이때 (15)와 (30)을 만족하는 해들 중에 하나는

$$\begin{aligned}
 [\lambda]_{1 \leq i, j \leq 2} &= \begin{bmatrix} 4.9865 & 4.9865 \\ 5.1263 & 5.1263 \end{bmatrix}, \\
 Q_c &= \begin{bmatrix} 2.5209 & -0.9983 \\ -0.9983 & 0.9943 \end{bmatrix}, \\
 V_1 &= [-4.0703 \quad -0.3364], \\
 V_2 &= [-3.6549 \quad -0.5455]
 \end{aligned} \tag{52}$$

이고, 퍼지 제어기의 상태궤환 이득들은

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-2.9029 \quad -3.2530], \\
 K_2 &= [-2.7676 \quad -3.3274]
 \end{aligned} \tag{53}$$

이다. 설계된 퍼지 제어기를 이용하여 시뮬레이션한 결과를 그림 2에 나타내었다. 시뮬레이션에 사용된

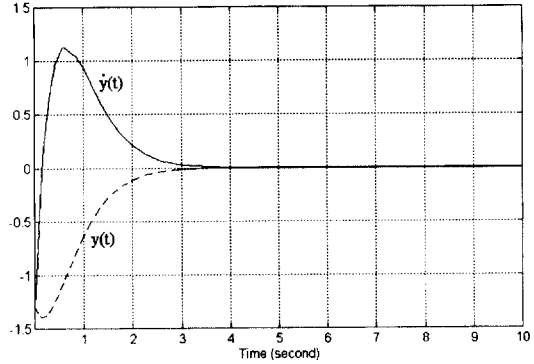


그림 2. 예제 2의 시간응답  
Fig. 2. Response of example 2

불확실성들은

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &= 1 + 0.5 \cos(y), \\
 c_2(t) &= 0.1 + 0.1 \sin(y), \\
 c_3(t) &= 1.155 + 0.655 \cos(3y^{10} \sin y), \\
 c_4(t) &= 0.13 \dot{y}^3
 \end{aligned} \tag{54}$$

이다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 연속시간과 이산시간에서 T-S 퍼지 모델로 묘사된 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대한 견실한 퍼지 제어기를 설계하였다. 견실한 퍼지 제어기가 존재할 충분조건을 선형 행렬 부등식을 이용하여 나타내었고, 그 선형 행렬 부등식의 해로부터 퍼지 제어기의 상태궤환 이득들을 직접적으로 구할 수 있었다. 즉, 제안한 퍼지 제어기 설계 기법은 불확실성을 가지는 비선형 시스템의 안정성을 보장하는 제어기를 직접적으로 구할 수 있다. 그리고 불확실성이 없는 각 부시스템의 극점을 원하는 위치에 배치함으로써 비선형 시스템의 안정성뿐만 아니라 성능 문제까지도 고려하였다.

## 참고문헌

- [1] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **2**(2), pp. 119-134, May 1994.
- [2] H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*,

4(1), pp. 14-23, Feb. 1996.

[3] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy control system design via LMIs," in *Proc. American Contr. Conf.*, **5**, pp. 2873-2877, 1997.

[4] J. Joh, E. T. Jeung, W. J. Chung and S.-H. Kwon, "A new design method for T-S fuzzy controller with pole placement constraints," *J. Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, **7**(3), pp. 72-80, Aug. 1997.

[5] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability,  $H^\infty$  control theory and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **4**(1), pp. 1-13, Feb. 1996.

[6] B.-S. Chen, C.-H. Lee and Y.-C. Chang, " $H^\infty$  tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **4**(1), pp. 32-43, Feb. 1996.

[7] C.-L. Chen, P.-C. Chen and C.-K. Chen, "Analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets Syst.*, **57**, pp. 125-140, 1993.

[8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[9] G. Shi, Y. Zou and C. Yang, "An algebraic approach to robust  $H^\infty$  control via state feedback," *Systems Control Lett.*, **18**, pp. 365-370, 1992.



**정은태(Eun Tae Jeung) 정회원**

1991년 2월: 경북대학교 전자공학과 졸업 (공학사)  
 1993년 2월: 동대학원 전자공학과 졸업 (공학석사)  
 1996년 8월: 동대학원 전자공학과 졸업 (공학박사)  
 1997년~현재: 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 전임강사

주관심분야: 견실제어,  $H^\infty$  제어, 시간지연, 퍼지제어 등

[10] M. Chilali and P. Gahinet, " $H^\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **41**(3), pp. 358-367, 1996.

[11] Y. Wang, L. Xie and C. E. de Souza, "Robust control of a class of uncertain nonlinear systems," *Systems Control Lett.*, **19**, pp. 139-149, 1992.



**권성하(Sung-Ha Kwon) 정회원**

1977년: 고려대학교 전기공학과 공학사  
 1981년: 동대학원 전기공학과 공학석사  
 1986년: 동대학원 전기공학과 공학박사  
 1985년 ~ 현재: 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 교수

1993년 ~ 1998년: 창원대학교 공과대학장, 기획연구실장, 중앙도서관장  
 주관심분야: 가변구조제어, 적응제어, 견실제어 등



**조중선(Joongseon Joh) 정회원**

1981년 2월: 인하대학교 기계공학과 졸업 (공학사)  
 1983년 2월: 서울대학교 대학원 기계설계학과 졸업 (공학석사)  
 1991년 6월: Dept. of Mechanical Engineering, Georgia Tech. (공학박사)

1983년 1월~1986년 8월: 대우중공업 중앙연구소  
 1991년 10월~1993년 2월: 국방과학연구소  
 1993년 3월~현재: 창원대학교 공과대학 제어계측공학과 조교수  
 1996년 2월~1997년 2월: Texas A & M Univ. (Post-Doc.)  
 주관심분야: 퍼지 및 지능제어, 전문가 시스템, 지능형 의공학 기기 등