

안정도를 보장하는 Takagi-Sugeno 퍼지 제어기의 설계 : 선형행렬부등식을 이용한 풀이

Design of Stabilizing Takagi-Sugeno Fuzzy Controllers : An LMI Approach

김진성 · 박주영* · 박대희**

Jinsung Kim, Jooyoung Park* and Daihee Park**

고려대학원 응용전자공학과
*고려대학교 제어계측공학과
**고려대학교 전산학과

요 약

퍼지 시스템의 안정도와 퍼지 제어기의 설계 방법론에 관한 연구는 최근 들어 많은 주목을 받아왔다. 본 논문은 TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템에 대한 제어기 설계문제가 선형행렬부등식(LMI, linear matrix inequality)을 포함하는 convex 문제로 간략화됨을 보인다. 입력행렬의 구조에 따라서 TS 퍼지 시스템을 세 가지로 분류하고, 각각에 대해 선형행렬부등식을 이용한 제어기 설계 방법론을 제시한다. 또한, 안정도 이외의 성능요건을 고려한 제어기를 설계한다. 제안된 설계 방법론을 설명하기 위해 예제를 다룬다.

ABSTRACT

There have been several recent studies concerning the stability of fuzzy control system and the synthesis of stabilizing fuzzy controllers. This paper reports on a related study of the TS (Takagi-Sugeno) fuzzy systems, and it is shown that the controller synthesis problems for the nonlinear systems described by the TS fuzzy model can be reduced to convex problems involving LMIs (linear matrix inequalities). After classifying the TS fuzzy systems into three families based on how diverse their input matrices are, different controller synthesis procedure is given for each of these families. A numerical example is presented to illustrate the synthesis procedures developed in this paper.

1. 서 론

퍼지 시스템의 안정도와 퍼지 제어기의 설계 방법론에 관한 연구는 최근 들어 많은 주목을 받아왔다[5-11]. 이러한 연구는 퍼지 제어 분야의 가장 핵심적인 논점을 다루고 있다는 점에서 매우 중요한 의미를 갖는다. 즉, 퍼지 제어의 응용이 모색되던 초창기에는 제어기의 설계가 일반적으로 시행착오에 의해 이루어졌으며 시스템의 안정도가 이론적으로 보장되지 못하고 시뮬레이션에 의한 경험적 입증에만 의존하는 경우가 많았는데 이러한 방식은 엄격한 검증을 중시하는 제어 분야의 특성상 많은 비판을 받아왔다. 최근에는, TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 모델을 이용하는 제어 시스템을 중심으로 이러한 논란을 불식시킬 수 있는 주요한 이론적 성과들

이 Tanaka, Wang, Kang 등에 의해 관찰되고 있다[7,11, 14,15]. TS 퍼지 모델은[4], 결론부가 $\dot{x}=Ax+Bu$ 형태인 퍼지 IF-THEN 규칙들로 표현된다. 본 논문에서는, TS 퍼지 제어기나 변형된 TS 퍼지 제어기를 가지고 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템을 안정화시키는 문제를 고려한다. 입력행렬 B 의 구조에 따라서 TS 퍼지 시스템을 세 가지로 분류하고, 각각에 대해 선형행렬부등식(LMI, linear matrix inequality)을 이용한 제어기 설계 방법론을 제시한다. 먼저, 공통 입력 행렬을 갖는 경우에 대하여 전체 시스템을 안정도를 보장하는 TS 퍼지 제어기가 간단한 선형 행렬 부등식의 풀이를 통해서 구해짐을 보인다. 다음에는, 첫 번째 경우의 여 집합, 즉 입력행렬이 같지 않은 경우의 안정화를 위해 새로운 제어기를 제안한다. 제안된 제어기의 제어 신호는 TS 퍼

이 논문은 1997년도 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의해 연구되었음.

지 제어기의 출력을 후필터링(postfiltering)함으로써 얻어진다. 제안된 퍼지 제어기를 사용한 시스템의 안정도는 선형행렬부등식을 통해 확인할 수 있으며, 안정도를 보장하는 제어기의 변수들은 선형행렬부등식의 풀이로 구해진다. 본 논문에서 고려하는 세 번째 그룹은 비례 입력 행렬 αB 를 가진 TS 퍼지 시스템들로 이루어진다. 이 경우에는 변형된 형태의 TS 퍼지 제어기를 사용하면 매우 편리하게 안정한 제어기 설계를 수행할 수 있음을 관찰한다. 선형 행렬 부등식은 콘벡스 최적화 기법(convex optimization techniques)에 의해 정확하게 풀 수 있기 때문에 제안된 설계 방법론은 매우 실용적인 가치를 지닌다.

본 논문의 구성은 다음과 같다: 2장에서는 TS 퍼지 모델과 이차(quadratic) 안정도, 그리고 선형 행렬 부등식에 대하여 간단히 소개한다. 3장에서는 TS 퍼지 모델로 표현되는 비선형 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어기 설계 방법론을 구체적으로 제시하고, 4장에서는 본 논문에서 확립된 설계 방법론을 설명하기 위해 예제를 다룬다. 마지막으로 5, 6장에서는 토의, 확장 및 결론을 다룬다.

2. 기초이론: TS 퍼지 모델, 이차 안정도 및 선형 행렬 부등식

본 논문은 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템을 안정화시키는 퍼지 제어기의 설계를 다룬다. TS 퍼지 모델의 IF-THEN 규칙은 다음과 같은 형식으로 주어진다.

Plant 규칙 i

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and ... and $z_g(t)$ is M_{ig} ,
THEN

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

여기서, $z_j(t)$ 와 M_{ij} , $i=1, \dots, r, j=1, \dots, g$ 은 각각 전체부 변수와 퍼지 집합이고 r 은 IF-THEN 규칙의 개수이다. TS 퍼지 모델의 일반적인 추론 방법에 의하면, 전체 시스템의 상태 방정식은 다음과 같이 $z(t)$ 에 따라 변하는 가중평균의 형태로 표현된다:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (2)$$

여기에서 입력, 상태 및 전체부 변수의 차원은 다음과 같다: $u(t) \in R^r$, $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^g$. 방정식 (2)에서

하중함수(weight functions)는 다음과 같이 정의된다:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(z_j(t)).$$

여기서, $M_{ij}(z_j(t))$ 은 $z_j(t)$ 가 퍼지 집합 M_{ij} 에 속하는 정도이다. 하중함수 w_i 는 음이 아니고, 일반적으로 다음을 만족한다:

$$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \text{ for all } t > 0 \quad (3)$$

본 논문에서는 (3)이 항상 만족되는 것과 벡터 $x(t)$ 와 $z(t)$ 이 실시간으로 측정 가능함을 가정한다. 하중함수를

$$h_i(z(t)) \triangleq \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

로 정규화 하면 상태방정식(2)는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (4)$$

여기서, 표준화된 하중함수 h_i 는 $h_i(z(t)) > 0, i=1, \dots, r$ 과 $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \forall t \geq 0$ 을 만족한다. 전체부 변수

$z(t)$ 는 일반적으로 입력 $u(t)$ 와는 무관하나 상태 $x(t)$ 와는 긴밀한 상관관계를 갖는다. 따라서 TS 퍼지 시스템은 근본적으로 비 선형 특성을 갖게 된다. 상태방정식(4)는 $\Phi(t) \triangleq [h_1(z(t)), \dots, h_r(z(t))]^T$ 의 궤적을 따라 변하는 선형모델로 구성되는 비선형 시스템을 표현함에 주목하자. 여기에서, $z(t)$ 는 측정되어질 수 있고, 각 하중함수 h_i 는 쉽게 계산될 수 있기 때문에 변수 벡터 $\Phi(t)$ 는 시스템의 동작 중에 실시간으로 구할 수 있다. 이러한 사실은 효과적인 제어 기법의 고안을 가능하게 해준다.

$u(t)=0, \forall t \geq 0$ 인 경우에, TS 퍼지 시스템(4)는 다음과 같은 형태가 된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (5)$$

리아푸노프(Lyapunov) 안정도 이론에 따르면, 0이 아닌 모든 궤적에 따라 감소하는 양의 정부호(positive definite) 함수 $V(x) = x^T P x$ 가 존재하면 시스템은 안정하고, 이러한 리아푸노프 함수를 갖는 시스템을 이차 안정(quadratically stable)하다고 말한다. 시스템 (5)에서, 0이 아닌 궤적 $x(t)$ 에 따른 V 의 미분 값은 다음과

같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\{x^T(t)Px(t)\} \\ &= x^T(t)\left\{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i^T P + P \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i\right\}x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))x^T(t)\{A_i^T P + PA_i\}x(t). \end{aligned}$$

$P > 0$ 인 경우 $A_i^T P + PA_i < 0$ 은 $Q \triangleq P^{-1}$ 로 정의하면, $QA_i^T + A_i Q < 0$ 과 동치이므로, 시스템(5)는 대칭행렬 Q 가 다음을 만족할 때 이차 안정이다[2,7]:

$$Q > 0, \quad A_i Q + QA_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (6)$$

주목할 점은 위 부등식의 왼편은 행렬변수 Q 에 대하여 모두 선형이라는 점이다. 또한, 즉 각 $i \in \{1, \dots, r\}$ 에 대하여 $\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i = A_i$ 를 만족하는 $z(t) \in R^s$ 이 존재한다면, 부등식(6)은 TS 퍼지 시스템(5)가 이차 안정이기 위한 필요충분조건이 된다. 부등식(6)을 만족하는 Q 를 구하거나, 그러한 Q 가 존재하지 않는다는 것을 결정하는 것은 LMI feasibility problem으로 불리는 콘벡스 문제이다. 선형행렬부등식은 다음 형태의 구속조건을 의미한다:

$$A(x) \triangleq A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < 0, \quad (7)$$

여기서, $x \triangleq (x_1, \dots, x_N)$ 는 변수, A_0, \dots, A_N 은 대칭행렬이고 “<”는 음의 정부호(negative definite)임을 의미한다. $A(y) < 0$ 와 $A(z) < 0$ 는 $A\left(\frac{y+z}{2}\right) < 0$ 을 의미하기 때문에, 선형행렬부등식(7)은 변수 x 에 대한 콘벡스 조건이 된다. LMI feasibility problem 및 선형행렬부등식 관련 콘벡스 최적화 문제는 모두 interior point method [2]에 의해 해결될 수 있으며, 이를 풀 수 있는 상용 소프트웨어도 나와있다(예: Matlab LMI Control Toolbox [3]). 많은 제어문제들이 선형행렬부등식으로 수식화 될 수 있는데, 시스템 (5)의 이차 안정도도 그 중의 하나이다. (부등식(6)은 Q 의 독립적인 원소를 변수 x_1, \dots, x_N 로 정의하면 표준형인 부등식(7)의 형태로 변환될 수 있다.)

3. LMI를 이용한 퍼지 제어기 설계

이 단원에서는 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템에 대한 퍼지 제어기 설계 문제를 선형행렬부등식을 이용하여 풀고자한다. 입력행렬 B_i 에 따라 근거를

두어 TS 퍼지 시스템을 세 가지로 분류하고, 각각에 대하여 선형행렬부등식에 기초한 해를 제시한다.

3.1 공통 입력 행렬을 갖는 경우

공통 입력 행렬 특성을 지닌 TS 퍼지 시스템의 경우를 고려해보자:

$$B_1 = \dots = B_r = B. \quad (8)$$

이러한 시스템의 집합을 $TS(B)$ 라 부르기로 한다. $TS(B)$ 에 속하는 TS 퍼지 시스템의 상태 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t) + Bu(t) \quad (9)$$

따라서, TS 퍼지 제어기

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) \quad (10)$$

를 적용하면, 다음과 같은 폐루프를 구할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i + BK_i) \right\} x(t) \quad (11)$$

제어기(10)은 플랜트의 TS 퍼지 모델(1)과 동일한 퍼지 집합을 공유하는 다음의 TS 퍼지 규칙들로부터 유도됨에 유의하자:

제어기 규칙 i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and, ..., and $z_r(t)$ is M_{ir} ,

THEN

$$u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, \dots, r.$$

폐루프(11)은 polytopic 형태이므로, 안정도 기준(6)은 다음을 구하는데 사용되어질 수 있다: 만약

$$Q > 0, \quad (A_i + BK_i)Q + Q(A_i + BK_i)^T < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (12)$$

을 만족하는 대칭행렬 Q 가 존재한다면, 폐루프(11)은 안정하다. 여기서 새로운 변수 $Y_i = K_i Q$, $i=1, \dots, r$, 을 도입하면 안정도 문제(12)는 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$Q > 0, \quad A_i Q + QA_i^T + BY_i + Y_i^T B^T < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (13)$$

따라서, 조건(8)이 만족되는 경우에 안정화시키는 TS 퍼지 제어기는 다음과 같이 구해질 수 있다:

TS(B)집합에 대한 제어기 설계과정:

• (13)을 만족하는 $Q=Q^T \in R^{n \times n}$ 와 $Y_i \in R^{p \times n}$, $i=1, \dots, r$ 를 구한다:

• 계산된 Q 와 Y_i 를 이용하여 $K_i=Y_i Q^{-1}$, $i=1, \dots, r$, 를 계산한다.

• 계산된 K_i 를

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$$

에 대입한다.

3.2 다른 입력 행렬을 갖는 경우

입력행렬이 같지 않은 경우를 고려해보자. TS(B)의 여집합을 TS(B_i)라 정의한다. 이 경우에는 Tanaka 등 [5]의 방법을 적용할 수 있으나, 설계 결과가 보수적 (conservative)으로 나타나기 때문에, 안정도 조건의 완화(relaxation)가 필요하다[5]. 대안으로, 다음의 상태 방정식을 갖는 새로운 퍼지 제어기를 제안 해본다.

$$\dot{u}(t) = A_c u(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t). \quad (14)$$

이는, 전형적인 TS 퍼지 제어기

$$u_{TS}(\cdot) \triangleq \sum_{i=1}^r h_i(z(\cdot)) K_i x(\cdot).$$

가 선형시스템 $G_c(s) \triangleq (sI - A_c)^{-1}$ 에 의해 여과된 형태이다. 제어 입력 u 를 TS 퍼지 시스템(4)에 적용하면, 다음을 얻을 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}.$$

$$\dot{u}(t) = A_c u(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$$

$$= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{K_i x(t) + A_c u(t)\}.$$

그 결과, 다음과 같은 페루프가 얻어진다:

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix} X(t) \quad (15)$$

여기서 X는 다음의 확장된 상태 벡터이다:

$$X(t) = [x^T(t) \quad u^T(t)]^T.$$

안정도 조건(6)을 이 polytopic 시스템에 적용함으로써, 다음 조건을 만족하는 대칭행렬 Q 가 존재할 때, 페루프(15)가 안정됨을 알 수 있다:

$$Q > 0, \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ K_i & A_c \end{bmatrix}^T < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (16)$$

여기서 주의해야 할 점은 부등식(16)은 변수 Q , A_c , K_i , $i=1, \dots, r$ 에 대해 비선형이라는 점이다. 선형의 형태로 변환하기 위하여 변수 제거기법[2]을 적용하면, (16)식은 A_c 와 K_i 가 제거된 다음의 선형행렬부등식으로 치환될 수 있다:

$$Q > 0, N^T \left(\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) N < 0, \quad i=1, \dots, r \quad (17)$$

여기서 N 은 $[0_{p \times n} \ I_p]N=0$ 을 만족하는 임의의 최대 랭크 행렬이다. LMI(17)을 만족하는 행렬 Q 가 구해지면, A_c 와 K_i 는 (16)으로부터 계산될 수 있다. 이상의 설계절차를 요약하면 다음과 같다:

TS(B_i)집합에 대한 제어기 설계과정:

• 다음을 만족하는 대칭행렬 $Q \in R^{(n+p) \times (n+p)}$ 를 구한다.

$$Q > 0, [A_i \ B_i] Q \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix} + [I_n \ 0_{n \times p}] Q [A_i \ B_i]^T < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (18)$$

• 선형행렬부등식(16)을 풀어서 A_c 와 K_i , $i=1, \dots, r$ 를 계산한다.

• TS 퍼지 제어기

$$u_{TS}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$$

와 여과기(postfilter)

$$\frac{U(s)}{U_{TS}(s)} = (sI - A_c)^{-1}$$

을 구한다.

3.3 비례 입력 행렬을 갖는 경우

비례적인 입력 행렬을 갖는 TS 퍼지 시스템 집합을 TS(α B)라 정의하자. 즉,

$$\frac{B_1}{\alpha_1} = \frac{B_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{B_r}{\alpha_r} = B \quad (19)$$

여기서 $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$ 이고 $B \in R^{n \times p}$ 이다. 이러한 TS 퍼지 시스템은 다음의 상태 방정식으로 나타낸다:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + \alpha_i u(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t)) \right\} B u(t) \end{aligned} \quad (20)$$

α_i 가 모두 같지 않는 한 상태방정식(20)과 같이 표현된 시스템은 $TS(\alpha B)$ 에 속하므로 두 번째 방법론의 적용이 가능하다. 그러나, TS 퍼지 제어를 약간 변형시켜주면 좀더 간단하고 편리한 해를 구할 수 있다. 특별히 다음과 같이 정의되는 변형된 TS 퍼지 제어를 고려해 보자:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t))} \quad (21)$$

변형된 TS 퍼지 제어를 시스템(20)에 적용하면, 공통 입력 행렬을 갖는 집합의 페루프 상태 방정식과 일치하는 다음의 식을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) + \\ &\frac{\left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t)) \right\} B \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \right\}}{\left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t)) \right\}} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i + BK_i\} x(t) \end{aligned} \quad (22)$$

이 식은 $TS(B)$ 에 대한 페루프의 경우와 일치하므로 페루프의 안정도를 보장하는 퍼지 제어기(21)의 변수들은 $TS(B)$ 에서 소개하였던 과정들에 의하여 구할 수 있다. 정리하면 다음과 같다:

TS(α, B)집합에 대한 제어기 설계과정:

- (19)식을 만족하는 $\alpha_i, i=1, \dots, r$ 와 $B \in R^{n \times p}$ 를 구한다.
- (13)을 만족하는 $Q=Q^T \in R^{n \times n}$ 와 $Y_i \in R^{n \times n}, i=1, \dots, r$,를 구한다:
- 계산된 Q 와 Y_i 를 이용하여 $K_i=Y_i Q^{-1}, i=1, \dots, r$,를 계산한다.

• 계산된 K_i 를

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t))}$$

에 대입한다.

4. 예 제

이번 장은 본 논문의 방법론을 설명하는 예제를 제시한다.

그림 1과 같은 간단한 비선형 mass-spring-damper 시스템을 고려하자. 이 시스템은 [6]의 설계에서 예제 2로 적용된 것이다. 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \psi(\dot{x})u \quad (23)$$

여기서 M 은 질량, $g(x, \dot{x})=D(c_1x+c_2\dot{x})$ 은 damper에 대한 비선형항, $f(x)=c_3x+c_4x^3$ 은 spring에 대한 비선형항, $\psi(\dot{x})=1+c_5\dot{x}^3$ 은 입력에 대한 비선형항이다. 각 파라미터는 다음과 같다:

$$M = 1, D = 1, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0.01, c_4 = 0.1, c_5 = 0.13$$

상태가 움직이는 $x \in [-1.5, 1.5]$ 와 $\dot{x} \in [-1.5, 1.5]$ 임을 가정한다. $x_1 \triangleq \dot{x}, x_2 \triangleq x, x \triangleq [x_1 \ x_2]^T$ 라고 정의하면, 시스템(23)은 다음과 같다:

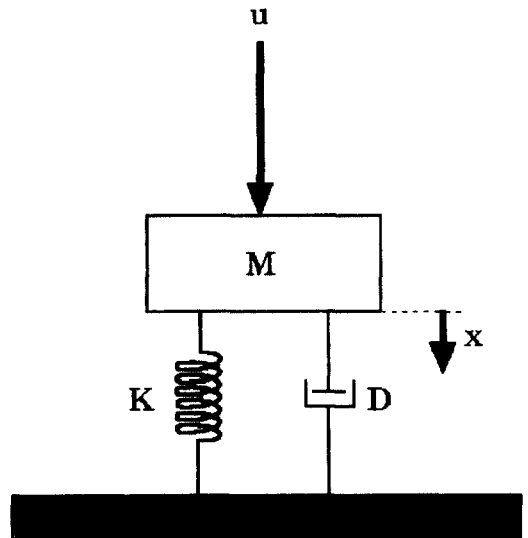


그림 1. 비선형 mass-spring-damper 시스템.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - 0.01x_2 - 0.1x_2^3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + 0.13x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (24)$$

이 시스템은 다음과 같은 TS 퍼지 모델로 표현할 수 있다:

- 규칙1: IF x_1 is about 0 and x_2 is about 0,
THEN $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$,
- 규칙2: IF x_1 is about 0 and x_2 is about ± 1.5 ,
THEN $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$,
- 규칙3: IF x_1 is about 1.5 and x_2 is about 0,
THEN $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$,
- 규칙4: IF x_1 is about 1.5 and x_2 is about ± 1.5 ,
THEN $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)$,
- 규칙5: IF x_1 is about -1.5 and x_2 is about 0,
THEN $\dot{x}(t) = A_5 x(t) + B_5 u(t)$,
- 규칙6: IF x_1 is about -1.5 and x_2 is about ± 1.5 ,
THEN $\dot{x}(t) = A_6 x(t) + B_6 u(t)$.

여기서, 퍼지 집합은 다음 수식 및 그림 2,3으로 정의 된다.

$$w_{11}(x_1) = 1 - \frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \geq 0, \\ 1 + \frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \leq 0 \\ w_{12}(x_1) = \frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \geq 0, 0 \text{ for } x_1 \leq 0 \\ w_{13}(x_1) = 0 \text{ for } x_1 \geq 0, -\frac{8}{27}x_1^3 \text{ for } x_1 \leq 0 \\ w_{21}(x_2) = 1 - \frac{4}{9}x_2^3, w_{22}(x_2) = \frac{4}{9}x_2^3.$$

그리고, 이 퍼지 모델은 다음과 같이 수식화된다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^6 h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (25)$$

이때 상태 공간 행렬 및 정규화된 하중함수는 다음과 같이 주어진다:

$$A_1 = A_3 = A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -0.01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_4 = A_6 = \begin{bmatrix} -1 & -0.235 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1.4388 \\ 0 \end{bmatrix},$$

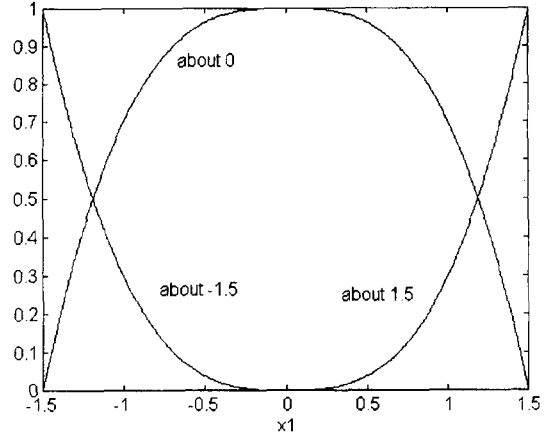


그림 2. x_1 에 대한 퍼지 집합.

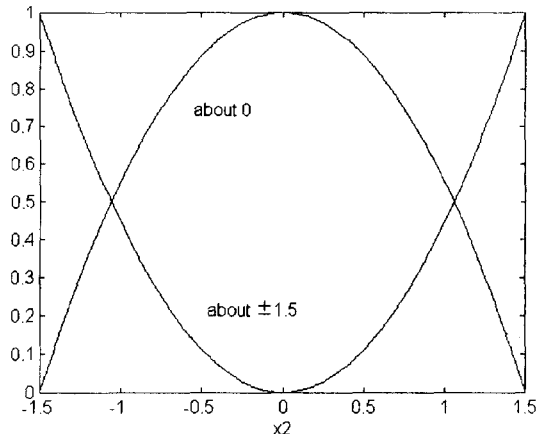


그림 3. x_2 에 대한 퍼지 집합.

$$B_5 = B_6 = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$h_1(x) = w_{11}(x_1(t))w_{21}(x_2(t)), \quad h_2(x) = w_{11}(x_1(t))w_{22}(x_2(t)), \\ h_3(x) = w_{12}(x_1(t))w_{21}(x_2(t)), \quad h_4(x) = w_{12}(x_1(t))w_{22}(x_2(t)), \\ h_5(x) = w_{13}(x_1(t))w_{21}(x_2(t)), \quad h_6(x) = w_{13}(x_1(t))w_{22}(x_2(t)),$$

상태 방정식(25)은 다음의 TS 퍼지 시스템을 나타내며, 이때 퍼지 집합은 그림 2,3과 같이 정의된다. 이 퍼지 모델에서는, 상태 변수 x_1 과 x_2 는 전진부 변수가 되고, 상태 벡터 x 와 입력 u 의 차원은 각각 $n=2, p=1$ 이다. 물론 $h_i(x(t)) \geq 0, \forall i$ 과 $\sum_{i=1}^6 h_i(x(t)) = 1$ 은 항상 만족된다.

먼저, TS(B) 집합에 대한 제어기 설계 과정을 적용해 보자. 선형행렬부등식(18)을 풀어서 다음 값을 얻는다:

(풀이에는 LMI Control Tool Box[3]을 사용한다.)

$$Q = \begin{bmatrix} 54.4196 & -41.0511 & -0.7978 \\ -41.0511 & 153.9205 & -62.4126 \\ -0.7978 & -62.4126 & 128.4051 \end{bmatrix}.$$

과정의 드 번째 단계로 선형행렬부등식(16)를 풀어서 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned} A_c &= -1.1629, \\ K_1 &= [-3.4860 \quad -1.4063], \quad K_2 = [-3.7336 \quad -1.4520], \\ K_3 &= [-4.4792 \quad -1.5896], \quad K_4 = [-4.7268 \quad -1.6354], \\ K_5 &= [-2.4930 \quad -1.2229], \quad K_6 = [-2.7406 \quad -1.2686], \end{aligned} \quad (26)$$

그리고, 제어 신호 $u(t)$ 는 다음으로부터 구한다:

$$u(t) = A_c u(t) + \sum_{i=1}^6 h_i(x(t)) K_i x(t). \quad (27)$$

이 제어기를 시스템(24)에 적용하면, 초기 조건 $x(0) = [-1, -1]^T$ 에 대하여 그림 4의 결과를 얻는다.

다음으로, $TS(\alpha\beta)$ 집합에 대한 제어기 설계 과정을 적용해보자. (19)에 대해

$$\begin{aligned} B &\triangleq B_5, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \triangleq 1/0.5613, \\ \alpha_3 &= \alpha_4 \triangleq 1.4388/0.5613, \quad \alpha_5 = \alpha_6 \triangleq 1 \end{aligned}$$

라 정의하여, 선형행렬부등식(13)을 풀면 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 81.9103 & -32.7641 \\ -32.7641 & 81.9103 \end{bmatrix}, \\ Y_1 &= Y_3 = Y_5 = [72.3811 \quad -202.8421], \\ Y_2 &= Y_4 = Y_6 = [59.2474 \quad -170.0079], \end{aligned}$$

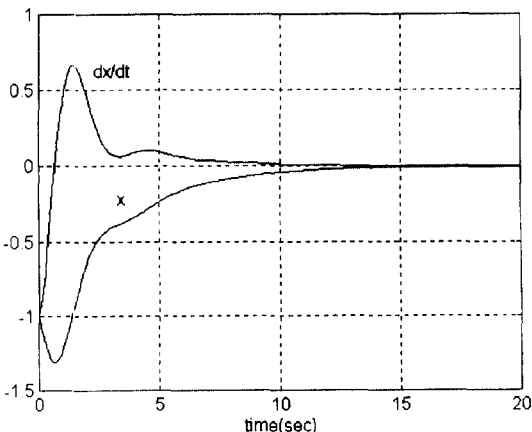


그림 4. (26)와 (27)으로부터 얻어진 제어기에 대한 모의 결과.

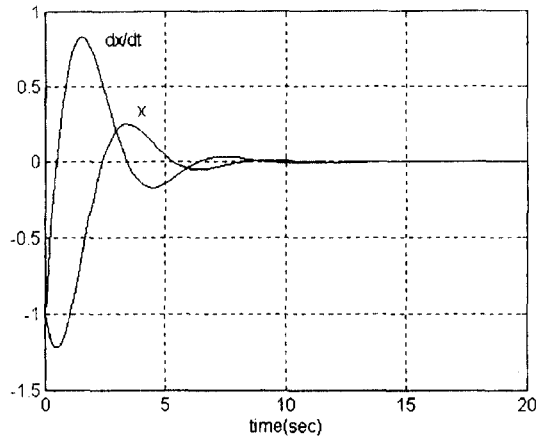


그림 5. (28)와 (29)으로부터 얻어진 제어기에 대한 모의 결과.

구한 Q 와 Y_i 를 이용하여 $K_i = Y_i Q^{-1}$, $i=1, \dots, 6$,를 계산한다.

$$\begin{aligned} K_1 &= K_3 = K_5 = [-0.1273 \quad -2.5273], \\ K_2 &= K_4 = K_6 = [-0.1273 \quad -2.1264], \end{aligned} \quad (28)$$

α_i 와 계산된 K_i , $i=1, \dots, 6$ 를 가지고 제어 신호 $u(t)$ 를 다음으로부터 구한다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t))} \quad (29)$$

이 제어기를 시스템(24)에 적용하면 그림 5의 결과를 얻는다.

5. 토의 및 확장

앞장에서 입력행렬 B_i 의 구조에 따라 TS 퍼지 시스템을 세 가지로 분류하고, 각각에 대해 선형행렬부등식을 이용한 제어기 설계 방법론을 제시하였다. 앞에서 제안된 제어기 설계 방법론은 시스템의 안정도만을 고려하였다. 이번 장에서는 안정도 이외의 성능요건으로서 감소비율(decay rate)[2]과 입력 제한(input constraint)[12]을 고려한 제어기를 설계하고자한다. 세 번째로 제시한 비례 입력 행렬을 갖는 경우의 제어기 설계방법론은 식(19)의 α_i , $i=1, \dots, r$ 의 선택에 의하여 시스템에 범용적으로 사용될 수 있다. 이 방법론을 가지고 감소비율과 입력 제한 조건을 첨가한 제어기를 구한 후, 앞에서 다룬 비선형 mass-spring-damper 시스템에 적용하여 본다.

먼저 감소비율을 적용시켜 보자. 감소 비율은 모든 궤적 x 에 대하여 다음의 조건을 만족하는 β 의 최대 값으로 정의한다:

$$\|x(t)\| \leq Ce^{-\beta t}.$$

감소비율을 구하는데 있어서 이차 리아푸노프 함수를 사용한다. 만약에 모든 궤적 x 에 대하여

$$\frac{d}{dt}V(x) \leq -2\beta V(x) \quad (30)$$

라면,

$$V(x) \leq V(x(0))e^{-2\beta t} \quad (31)$$

이고, $\|x(t)\| \leq Ce^{-\beta t}$ 을 만족한다. 여기에 대한 증명은 다음과 같다:

이차 리아프노프 함수 $V(x) = x^T P x = x^T P^{1/2} P^{1/2} x$ 으로 (31)를 다시 표현하면,

$$\|P^{1/2}x(t)\|^2 \leq \|e^{-\beta t} P^{1/2}x(0)\|^2$$

과 같다. Rayleigh's principle[13]을 이용하면,

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &\leq \frac{\|P^{1/2}x(t)\|^2}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{\|P^{1/2}(e^{-\beta t} x(0))\|^2}{\lambda_{\min}(P)} \\ &\leq \frac{\|P^{1/2}\|^2 \|e^{-\beta t} x(0)\|^2}{\lambda_{\min}(P)} = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \\ \|x(0)\|^2 e^{-2\beta t} &= Ce^{-2\beta t} \end{aligned}$$

이고, 여기서, $C \triangleq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|x(0)\|^2$ 이다.

식(22)와 (31)를 고려하여 이차 안정도 기준을 정리하면,

$$Q > 0, (A_i + BK_i)Q + Q(A_i + BK_i)^T + 2\beta Q < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (32)$$

이고, 앞서 다룬 $TS(B)$ 의 경우와 같이 새로운 변수 $Y_i = K_i Q, i=1, \dots, r,$ 을 도입하면, 안정도 문제(32)는 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$Q > 0, A_i Q + Q A_i^T + B Y_i + Y_i^T B^T + 2\beta Q < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (33)$$

다음으로, 입력을 σ 보다 작게 제한하는 입력 제한을 고려해보자. TS 퍼지 제어기(21)를

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t))}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t)) \left\{ \frac{K_i x(t)}{\alpha_i} \right\}}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t))}$$

으로 분자부분에 α_i 를 첨가하여 표현할 수 있다. 여기서, 만약

$$\left\| \frac{K_i x(t)}{\alpha_i} \right\| < \sigma$$

이면,

$$\|u\| < \sigma$$

을 만족하게 된다. 먼저, ε 을 원점을 중심으로 P 에 의하여 구해지는 타원이라 정의하면 다음과 같이 표현된다[2]:

$$\varepsilon \triangleq \{z \in R^2 | z^T P z \leq 1\}.$$

초기치 $x(0) \in \varepsilon_p$ 라 가정하면,

$$x(0)^T P x(0) \leq 1$$

이므로 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (34)$$

여기서, $Q \triangleq P^{-1}$ 이다.

또한,

$$\begin{aligned} \max_{x \in \varepsilon} \left\| \frac{K_i x}{\alpha_i} \right\| &= \max_{\|P^{1/2}x\| \leq 1} \left\| \frac{K_i P^{-1/2} P^{1/2} x}{\alpha_i} \right\| \\ &= \left\| \frac{K_i P^{-1/2}}{\alpha_i} \right\| = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(K_i P^{-1/2} P^{-1/2} K_i^T)}}{\alpha_i} < \sigma \end{aligned}$$

이므로,

$$K_i P^{-1} K_i^T < \alpha_i^2 \sigma^2$$

이 성립한다. 이 부등식은 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^2 \sigma^2 Y_i \\ Y_i^T & Q \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (35)$$

여기서, $Y_i = K_i Q, i=1, \dots, r,$ 이다. 지금까지 $TS(\alpha_b)$ 에 대한 설계과정을 정리하면 다음과 같다:

감소비율과 입력 제한 조건을 고려한 $TS(\alpha_i/B)$ 집합의 제어기 설계과정:

- (19)를 만족하는 $\alpha_i > 0, i=1, \dots, r$ 와 $B \in R^{n \times p}$ 를 구한다.
- (33), (34) 그리고 (35)를 만족하며, 최대 β 일 때의 $Q=Q^T \in R^{n \times n}$ 와 $Y_i \in R^{n \times n}, i=1, \dots, r$ 를 구한다.
- 계산된 Q 와 Y_i 를 이용하여 $K_i=Y_i Q^{-1}, i=1, \dots, r$ 를 계산한다.
- α_i 와 계산된 $K_i, i=1, \dots, r$ 를

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(z(t))} \quad (36)$$

에 대입한다.
위의 과정을 이용하여, $\sigma=100$ 의 조건으로 시스템(24)에 적용하면 다음과 같은 $K_i, i=1, \dots, 6$ 와 그림 6,7의

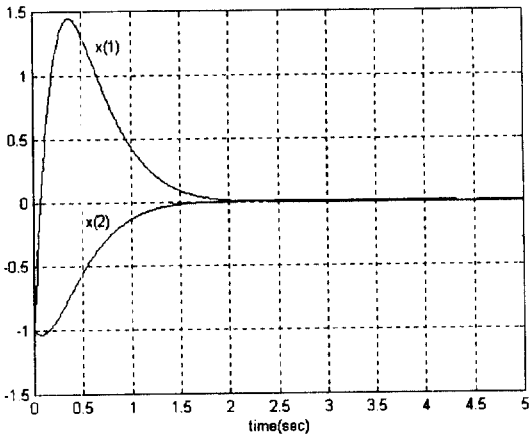


그림 6. (36)과 (37)로부터 얻어진 제어기에 대한 모의 결과.

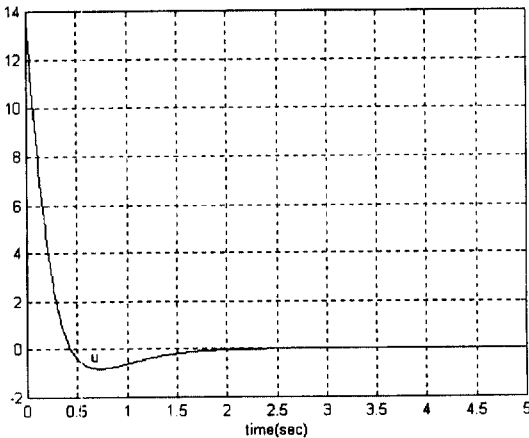


그림 7. (36)과 (37)로부터 얻어진 제어 신호.

결과를 얻는다:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-5.3087 \quad -11.7328], \quad K_2 = [-5.3016 \quad -11.4921] \\ K_3 &= [-6.9614 \quad -15.6374], \quad K_4 = [-6.9564 \quad -15.4013] \\ K_5 &= [-3.7304 \quad -8.0044], \quad K_6 = [-3.7199 \quad -7.7561] \end{aligned} \quad (37)$$

6. 결 론

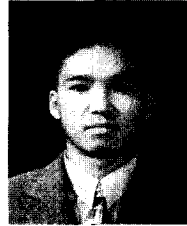
본 논문에서, 우리는 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템에 대해 안정도를 보장하는 퍼지 제어기를 설계하는 문제를 다루었다. 우리는 입력 행렬에 근거를 두어 TS퍼지 시스템을 세 가지 종류($TS(B), TS(B_i), TS(\alpha_i B)$)로 분류한 후에, 각각 다른 제어기 설계 과정을 제시했다. 이 과정들은 주어진 시스템을 안정화시키는 TS 퍼지 제어기 또는 변형된 TS 퍼지 제어기를 제공한다. 각각 제어기 설계 과정에 선형행렬부등식을 적용하여 안정된 제어기를 구성하였다. 또한, 비선형 mass-spring-damper 시스템을 예제로 제안된 제어기 설계 방법론을 적용시켜 보았다. 더 나아가 감소비율과 입력 제한 조건을 첨가한 선형행렬부등식을 적용하여 매우 안정된 제어기를 구성하였다. 선형행렬부등식은 콘벡스 최적화 기법(convex optimization techniques)에 의해 정확하게 풀 수 있기 때문에 제안된 설계 방법론은 매우 실용적임을 확인할 수 있었다. 또한, 각 과정의 선형행렬부등식 풀이 과정에는 Matlab의 LMI Control Toolbox가 매우 효과적으로 사용되었다. 추후 연구과제로는, 입력 행렬이 다른 경우의 제어기 설계 과정에 안정도 이외의 성능요건을 고려하는 것, TS 퍼지 모델의 선형식에 상수항이 있는 경우에 대한 고려, 그리고 상세한 성능비교 등을 들 수 있다.

참고문헌

- [1] P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker, "Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: A design example", *Automatica*, **31**, 1251-1261, 1995.
- [2] S. Boyd, L. Elghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. **15** (SIAM, Philadelphia, 1994).
- [3] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox* (Math Works Inc., Natick, MA, 1995).
- [4] T.Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", *IEEE Transactions on systems, Man and cybernetics*, **15**, 116-132, 1985.
- [5] K. Tanaka, T.Ikeba and H.O. wang, "Design of fuzzy control systems based on relaxed LMI stability con-

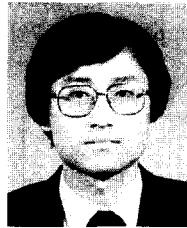
- ditions", Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and control, Kobe, Japan (1996) 598-603.
- [6] K. Tanaka, T.Ikeba and H.O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H[∞] control theory and linear matrix inequalities", IEEE Transactions on Fuzzy Systems **4**, 1-13, 1996.
- [7] K.Tanaka and M.Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control system, Fuzzy Sets and systems", **45**, 135-156, 1992.
- [8] M. Thathachar and P. Viswanath, "On the stability of fuzzy systems", IEEE Transactions on fuzzy Systems **5**, 145-151, 1997.
- [9] L.X. Wang, "Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and stability analysis" (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994).
- [10] H.O. Wang and K. Tanaka, "An LMI-based stable fuzzy control of nonlinear systems and its application to control of chaos", Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, New Orleans, Louisiana, 1433-1438, 1996.
- [11] H.O. Wang, K. Tanaka and M.Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems : Stability and design issues", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, **4**, 14-23, 1996.
- [12] K. Tanaka, T.Ikeba and H.O. Wang, "Fuzzy control system design via LMIs", Proceedings of the American Control Conference, June, 2873-2877, 1997
- [13] Gibert Strang, Linear algebra and its applications, 3rd edition, (Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 1988).
- [14] G. Kang and W. Lee, "Design of state fuzzy controllers and observers", Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1355-1360, 1995.
- [15] G. Kang and W. Lee, "Design of fuzzy parameter adaptive controllers", Proceedings of the Sixth International

ernational Fuzzy Systems Association World Congress, 609-612, 1995.



김진성(Junsung Kim) 준회원

1997년 : 고려대 제어계측공학과 졸업 (학사)
 1997년~현재 : 고려대 대학원 응용전자공학과 석사과정 재학중
 주관심분야 : 비선형제어, 적응제어, 뉴로퍼지제어



박주영(Jooyoung Park) 정회원

1983년 : 서울대 전기공학과 졸업(학사)
 1992년 : 텍사스대 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(공학박사)
 1983년~현재 : 고려대 제어계측공학과 부교수
 주관심분야 : 제어이론 및 신경망



박대희(Daihee Park)

1982년 : 고려대학교 수학과(학사)
 1984년 : 고려대학교 수학과(석사)
 1989년 : 플로리다주립대 전산학과(석사)
 1992년 : 플로리다주립대 전산학과(박사)
 1993년~현재 : 고려대학교 전산학과 부교수
 주관심분야 : 퍼지시스템, 신경망, 데이터베이스