

## ☒ 연구논문

## 체계수명시험에서 얻어진 부품의 수명자료를 이용한 Freund 모형의 추정

홍연웅

동양대학교 산업공학과

### Estimation of Freund Model for System Level Life Testing Using Component Life Data

Yeon-Woong Hong

Dept. of Industrial Engineering, Dongyang University

#### Abstract

Consider a life testing experiment in which multiple two-component shared parallel systems are put on test, and the test is terminated at a specified number of system failures. The bivariate data obtained from such a system-level life testing can be classified into three classes: 1) the case of failed two components with known failure times, 2) the case of censored two components, and 3) the case of one censored component and the other failed component of which the failure time might be known or unknown. Under this censoring scheme and the assumption of Freund's bivariate exponential life distribution, the maximum likelihood estimators are obtained. Results of comparative studies based on Monte Carlo simulation are presented.

#### 1. 서론

두 개의 부품을 가지는 병렬체계에서 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 주는데 이러한 병렬체계를 부하분배체계라한다. 이중부품 부하분배체계의 상호종속적인 부품의 수명을 나타내는 확률모형에는 여러 가지가 있지만 Freund(1961)는 식(1)과 같은 이변량지수분포로 모

형화하였다. 순간고장률이 각각  $\alpha$ 와  $\beta$ 이며 서로 독립인 지수분포를 따르는 두 부품 1과 2가 병렬구조를 이루는 체계에서 부품1이  $x$ 에서 먼저 고장나는 순간 부품2는 부품1이 분담하던 부하를 이전받아 순간고장률이  $\beta$ 에서  $\beta'$ 으로 변화하는 한편, 부품2가  $y$ 에서 먼저 고장나면 부품1의 순간고장률도  $\alpha$ 에서  $\alpha'$ 으로 변화하는 경우에 두개의 부품이 동시에 고장날 확률을 0이라 가정하면 결합수명분포는 다음과 같이된다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta' e^{-\beta'y - (\alpha + \beta - \beta')x}, & \text{for } 0 < x < y \\ \alpha'\beta e^{-\alpha'x - (\alpha + \beta - \alpha')y}, & \text{for } 0 < y < x \end{cases} \quad (1)$$

Freund는 위의 모형을 제안하고 통계적 성질 등을 밝혔으며,  $X$  및  $Y$ 의 주변분포가 지수분포를 따르지 않는데도 이변량지수분포라고 명명하였다. Kunchur와 Munoli (1994)는 두 부품의 수명이 모형(1)을 따를 때 체계신뢰도에 대한 최소분산불편추정량을 구하였다. 그 외에도 Freund모형을 적용한 연구에는 Weier(1981), Hanagal과 Kale (1992), Hanagal(1996) 등이 있지만 이들은 부품의 수명자료가 완전히 얻어지는 경우에 적용한 것이다.

그러나 현실적으로 정상수명시험을 실시하는 경우에도 예정된 시험 시간 내에 모두 고장나지 않으면 자료의 수가 적어지고, 시험시간을 연장하면 검사비용이 증가하게 된다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 실험현장에서는 중도에 시험을 중단하는 등의 방법을 많이 사용한다.

본 연구에서는 Freund의 이변량지수분포를 따르는  $n$ 개의 부하분배체계를 수명시험하여 미리 정해진 수의 체계에서 고장이 발생하면 시험을 종결하고 이때까지 얻어진 부품의 수명자료를 이용하여 모형의 모수에 대한 최우추정량을 구한다. 여기서 강조할 사항은 시험단위가 체계이지만 얻어지는 수명자료는 부품의 것이라는 점이다. 체계가 고장이면 각 부품의 수명은 관측가능하며, 한 부품만 고장이면서 관측중단된 체계는 부품의 수명이 관측가능한 경우와 불가능한 경우로 나누어 생각한다. 본 연구에서 사용되어질 부호에 대한 설명은 다음과 같다.

- $n$  : 표본의 크기(체계의 수)
- $x$  : 부품1의 고장시각
- $y$  : 부품2의 고장시각
- $z_r$  :  $n$ 개의 체계 가운데  $r$ 번째 체계의 고장 시점,  $r=1, 2, \dots, n$
- $C_1, C_2$  : 수명이 관측중단되는 부품 1 및 2의 집합
- $D_1, D_2$  :  $z_r$  이전에 고장나는 부품 1 및 2의 집합
- $D_{12}$  : 부품1이 부품2 보다 먼저 고장나며 수명이 관측되는 부품의 집합,
- $D_{21}$  : 부품2가 부품1 보다 먼저 고장나며 수명이 관측되는 부품의 집합,
- $r_1$  :  $C_1 \cap D_2$ 의 원소의 개수
- $r_2$  :  $C_2 \cap D_1$ 의 원소의 개수

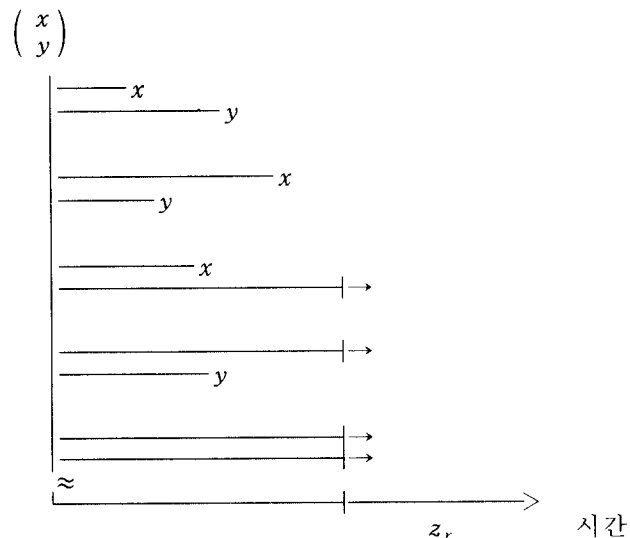
- $r_3$  :  $C_1 \cap C_2$ 의 원소의 개수  
 $d_i, d_{ij}$  :  $D_i$  및  $D_{ij}$ 의 원소의 개수,  $i, j = 1, 2$

## 2. 관측중단된 자료의 유형 및 최우추정량

### 2.1 관측중단 데이터의 유형

체계의 수명은 두 개의 부품이 모두 고장나는 시점인  $\max(X, Y)$ 이다. 적어도 하나의 부품이 시험종결시점까지 작동하면 체계는 정상이므로 외형적으로 두 부품 모두 정상인 체계와 한 부품만 고장인 체계는 구분되지 않는다. 고장난 부품을 교체하지 않는다는 가정하에서 체계의 수명을 기준으로 고장상태와 비고장상태를 구분하면 두 부품 모두 고장난 경우와 적어도 한 부품이 작동하는 경우의 두 가지로 구분되어 관찰이 단순화될 수 있지만 데이터의 해석은 용이하지 않다. 그렇다고 조립되기전의 부품단위에서 수명시험을 실시할 경우, 얻어진 데이터에는 부품수명 사이의 상호종속성이 반영되어있지 않으므로 부하의 이전이 모수에 미치는 영향을 설명할 수 없다. 결국 체계단위의 실험을 실시하되 구성부품의 수명시간도 관측되어지는 것이 바람직하다고 사료된다.

두 부품의 결합수명분포가 모형(1)을 따르는  $n$ 개의 체계를 수명시험하여  $r$ 개의 체계에서 고장이 발생하면 시험을 종결하는 상황을 고려해보자. 고장난 부품을 교체하지 않을 경우 부품의 고장시점과 수명시험의 종결시점을 비교하여 발생가능한 데이터의 유형을 분류하면 <그림 1>과 같이 다섯 종류가 있다. 즉, 두 부품이 모두 고장나면서



< 그림 1 > 불완전 데이터의 유형

부품1이 부품2 보다 먼저 고장나는 경우( $D_{12}$ )와 그 반대인 경우( $D_{21}$ ), 부품1은 고장이나 부품2가 시험의 종결시점에서 작동하는 경우( $C_2 \cap D_1$ )와 그 반대의 경우( $C_1 \cap D_2$ ), 그리고 두 부품 모두 생존하는 경우( $C_1 \cap C_2$ )이다. 여기서 체계가 고장인 경우에 두 부품의 수명을 알 수 있다고 가정하며, 체계를 구성하는 두 부품 가운데 하나의 부품만 고장인 경우에는 그 부품의 수명을 알 수 있는 경우와 알 수 없는 경우가 있다고 가정한다.

## 2.2 최우추정량

수명시험이 종료된  $n$ 개의 체계에는 하나의 부품만 고장인 체계가 포함될 수 있으며, 이러한 체계는 기능적으로 정상이지만 체계의 구조에 따라서는 i) 고장난 부품의 수명측정이 가능한 경우, ii) 고장사실은 알 수 있지만 수명측정이 불가능한 경우, iii) 부품의 고장사실조차 알 수 없는 경우의 세 가지로 구분할 수 있다. 본 연구에서는 i) 과 ii)만 다룬다.

### 2.2.1 한 부품만 고장난 체계의 부품수명을 알 수 있는 경우

수명시험의 종결시점  $z$ , 과 체계를 구성하는 부품의 수명을 비교하면 두 부품이 모두 고장인 체계부터 한 부품도 고장이 발생하지 않은 체계까지 다음의 다섯 유형의 데이터가 얻어질 수 있으며, 각 경우에 대하여 우도함수를 구하면 다음과 같다.

(a)  $0 < x < y < z$ , 일 경우:

부품 1과 2의 고장률은 0에서  $x$ 까지 각각  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 가지고, 부품 1이  $x$ 시점에서 고장나면  $x$ 에서  $y$ 까지 부품 2의 고장률은  $\beta'$ 이다. 따라서 하나의 체계에 대하여 이러한 사건이 발생할 확률밀도는

$$\alpha \exp(-\alpha x) \exp(-\beta x) \beta' \exp(-\beta'(y-x)) = \alpha \beta' \exp\{-(\alpha + \beta - \beta')x - \beta'y\}$$

이고 고장난  $d_{12}$ 개의 체계에서 관측된 부품의 고장데이터에 대한 우도함수는

$$L_a = (\alpha\beta')^{d_{12}} \exp\left\{-\left(\alpha + \beta - \beta'\right) \sum_{i \in D_{12}} x_i - \beta' \sum_{i \in D_{12}} y_i\right\} \quad (2)$$

이다.

(b)  $0 < y < x < z$ , 일 경우:

경우 (a)와 같은 방법으로  $d_{21}$ 개의 체계의 고장데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_b = (\alpha'\beta)^{d_{21}} \exp\left\{-\left(\alpha + \beta - \alpha'\right) \sum_{i \in D_{21}} y_i - \alpha' \sum_{i \in D_{21}} x_i\right\} \quad (3)$$

(c)  $0 < x < z_r < y$  일 경우:

부품1의 고장시간은 관측되고 부품2가 관측중단되는  $r_2$ 개의 체계에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_c = \alpha^{r_2} \exp\left\{-\left(\alpha + \beta - \beta'\right) \sum_{i \in C_f \cup D_1} x_i - \beta' r_2 z_r\right\} \quad (4)$$

(d)  $0 < y < z_r < x$  일 경우:

경우 (c)와 같은 방법으로  $r_1$ 개의 체계에서 얻어진 데이터에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_d = \beta^{r_1} \exp\left\{-\left(\alpha + \beta - \alpha'\right) \sum_{i \in C_f \cup D_2} y_i - \alpha' r_1 z_r\right\} \quad (5)$$

(e)  $0 < z_r < x, y$  일 경우:

두 부품 모두 관측중단되는 경우의 우도함수는 다음과 같다.

$$L_e = \exp\left\{-\left(\alpha + \beta\right) r_3 z_r\right\} \quad (6)$$

$n$ 개의 체계를 수명시험하여 얻어진 제2종 관측중단된 데이터에 대한 대수우도함수는 식(2)부터 식(6)까지 대수변환하고 합하면 다음과 같음을 알 수 있고

$$\begin{aligned} \ln L &= (d_{12} + r_2) \ln \alpha + (d_{21} + r_1) \ln \beta + d_{21} \ln \alpha' + d_{12} \ln \beta' \\ &\quad - (\alpha + \beta) \left( \sum_{i \in D_{12}} x_i + \sum_{i \in D_{21}} y_i + \sum_{i \in C_f \cup D_1} x_i + \sum_{i \in C_f \cup D_2} y_i + r_3 z_r \right) \\ &\quad + \alpha' \left( \sum_{i \in D_{21}} y_i - \sum_{i \in D_{12}} x_i + \sum_{i \in C_f \cup D_2} y_i - r_1 z_r \right) \\ &\quad + \beta' \left( \sum_{i \in D_{12}} x_i - \sum_{i \in D_{21}} y_i + \sum_{i \in C_f \cup D_1} x_i - r_2 z_r \right) \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\alpha} = \frac{d_{12} + r_2}{\sum_{i \in D_{12} \cup D_{21}} \min(x_i, y_i) + \sum_{i \in C_f \cup D_1} x_i + \sum_{i \in C_f \cup D_2} y_i + r_3 z_r} \quad (8a)$$

$$\hat{\beta} = \frac{d_{21} + r_1}{\sum_{i \in D_{12} \cup D_{21}} \min(x_i, y_i) + \sum_{i \in C_f \cup D_1} x_i + \sum_{i \in C_f \cup D_2} y_i + r_3 z_r} \quad (8b)$$

$$\hat{\alpha}' = \frac{d_{21}}{\sum_{i \in D_1} (x_i - y_i) - \sum_{i \in C \cap D_1} y_i + r_1 z_r} \quad (8c)$$

$$\hat{\beta}' = \frac{d_{12}}{\sum_{i \in D_2} (y_i - x_i) - \sum_{i \in C \cap D_2} x_i + r_2 z_r} \quad (8d)$$

식(7)에서 부품1이 부품2보다 먼저 고장나는 사건이 없으면 ( $d_{12}=0$ ) 부품 2의 순간 고장률이  $\beta'$ 으로 변화하지 않으므로 ( $\ln L$ 은  $\beta'$ 의 함수가 아님)  $\beta'$ 을 추정할 수 없으며,  $d_{21}=0$ 이면  $\ln L$ 은  $\alpha'$ 의 함수가 아니므로  $\alpha'$ 을 추정할 수 없다. 모든 체계가 완전히 고장나는 경우의 최우추정량은 식(8)에  $r_1=r_2=r_3=0$  및  $C_1 \cap D_2 = C_2 \cap D_1 = \emptyset$ 를 대입하여 얻을 수 있다. Hanagal과 Kale(1992)은 완전한 데이터가 얻어지는 경우 네 가지 모수의 최우추정량의 완비충분성이나 점근적 독립성 및 정규성을 밝힌 바 있는데 이러한 성질은 식(8)에 대해서도 성립함을 알 수 있다.

### 2.2.2 한 부품만 고장난 체계의 부품수명을 알 수 없는 경우

시험의 종결시점까지 하나의 부품에서 고장이 발생한 사실은 알 수 있으나 기술적, 물리적 또는 경제적 이유로 고장시간측정이 불가능하거나 비합리적인 경우, 고장난 부품의 수명을 처리하는 방법에 따라 추정결과가 다르게 나타날 수 있다. 본 연구에서는 부품1이 고장났어도 수명을 알 수 없을 때, 부품1의 수명을  $p_1 z_r$ 이라고 하고 식(4)에서  $x$ 를  $p_1 z_r$ 로 대치하여 다음의 식(9)를 얻는다. 마찬가지로 부품2가 고장이면 식(5)에서  $y$ 대신  $p_2 z_r$ 을 대입하여 식(10)을 얻는다. 단,  $p_i (0 \leq p_i \leq 1, i=1, 2)$ 는 기지이다.

$$L_c' = \alpha^{r_2} \exp\{-(\alpha + \beta - \beta')r_2 p_1 z_r - \beta' r_2 z_r\} \quad (9)$$

$$L_d' = \beta^{r_1} \exp\{-(\alpha + \beta - \alpha')r_1 p_2 z_r - \alpha' r_1 z_r\} \quad (10)$$

대수우도함수는 식(2), (3), (6)과 (9), (10)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \ln L &= (d_{12} + r_2) \ln \alpha + (d_{21} + r_1) \ln \beta + d_{21} \ln \alpha' + d_{12} \ln \beta' \\ &\quad - (\alpha + \beta) \left( \sum_{i \in D_1} x_i + \sum_{i \in D_2} y_i + r_2 p_1 z_r + r_1 p_2 z_r + r_3 z_r \right) \\ &\quad + \alpha' \left( \sum_{i \in D_1} y_i - \sum_{i \in D_2} x_i + r_1 p_2 z_r - r_1 z_r \right) \\ &\quad + \beta' \left( \sum_{i \in D_2} x_i - \sum_{i \in D_1} y_i + r_2 p_1 z_r - r_2 z_r \right) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\alpha} = \frac{d_{12} + r_2}{\sum_{i \in D_1 \cup D_2} \min(x_i, y_i) + (r_2 p_1 + r_1 p_2 + r_3) z_r} \quad (12a)$$

$$\hat{\beta} = \frac{d_{21} + r_1}{\sum_{i \in D_1 \cup D_2} \min(x_i, y_i) + (r_2 p_1 + r_1 p_2 + r_3) z_r} \quad (12b)$$

$$\hat{\alpha}' = \frac{d_{21}}{\sum_{i \in D_2} (x_i - y_i) + (1 - p_2) r_1 z_r} \quad (12c)$$

$$\hat{\beta}' = \frac{d_{12}}{\sum_{i \in D_1} (y_i - x_i) + (1 - p_1) r_2 z_r} \quad (12d)$$

### 2.3 부분 Freund 모형

Freund 모형은 네 개의 모수가 가지는 관계에 따라서 여러 가지 부분 모형을 가지는데 대표적인 부분 모형은  $\alpha = \alpha'$ 이고  $\beta = \beta'$ 인 경우와  $\alpha = \beta$ 이고  $\alpha' = \beta'$ 인 경우 및  $\alpha + \beta = \alpha' = \beta'$ 인 경우의 세 가지이다. 첫째 모형은 부품의 부하가 서로 독립인 지수분포를 따르며 고장난 부품이 부담하던 부하가 작동하는 부품으로 전가되지 않는 병렬체계를 나타낸다. 따라서 지수분포를 따르는 하나의 부품을 수명시험하는 상황과 동일하므로 기존의 연구를 참고하기 바란다(Lawless, 1982). 둘째 모형은 식(1)에서  $\alpha = \beta = \lambda$ ,  $\alpha' = \beta' = \lambda'$  이라하면 동일부품부하분배체계를 나타내는데 대칭인 Freund 모형이라고하며 두 부품의 결합수명분포는 다음과 같다.

$$f_s(x, y) = \lambda \lambda' \exp\{-\lambda|x-y| - 2\lambda \min(x, y)\}, \quad x > 0, y > 0 \quad (13)$$

전술한 실험상황과 같이 수명자료가 얻어질 때, 한 부품만 고장나고 그 수명을 알 수 있는 경우에 최우추정량을 구하면 다음과 같으며

$$\hat{\lambda} = \frac{d_{12} + d_{21} + r_1 + r_2}{2(\sum_{i \in D_2 \cup D_1} \min(x_i, y_i) + \sum_{i \in C_1 \cup D_1} x_i + \sum_{i \in C_2 \cup D_2} y_i + r_3 z_r)} \quad (14a)$$

$$\hat{\lambda}' = \frac{d_{12} + d_{21}}{\sum_{i \in D_2 \cup D_1} |x_i - y_i| - \sum_{i \in C_1 \cup D_1} x_i - \sum_{i \in C_2 \cup D_2} y_i + (r_1 + r_2) z_r} \quad (14b)$$

고장사실은 알 수 있으나 부품의 수명을 모를 경우 최우추정량은 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{d_{12} + d_{21} + r_1 + r_2}{2\left\{ \sum_{i \in B_1 \cup B_2} \min(x_i, y_i) + (r_2 p_1 + r_1 p_2 + r_3) z_r \right\}} \quad (15a)$$

$$\lambda' = \frac{d_{12} + d_{21}}{\sum_{i \in B_1 \cup B_2} |x_i - y_i| + (1 - p_1) r_2 z_r + (1 - p_2) r_1 z_r} \quad (15b)$$

모든 체계가 완전히 고장나는 경우에  $\lambda$ 와  $\lambda'$ 의 최우추정량은 식(15)에  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  및  $d_{12} + d_{21} = n$ 를 대입하여 구할 수 있다. 셋째 모형은 한 부품이 고장났을 때 작동하는 부품의 순간고장률이 최초 두 부품의 순간고장률의 합으로 표현되는 경우이다.  $\alpha' = \beta' = \lambda'$ 이라하면  $\lambda'$ 의 최우추정량은 식(14b) 또는 식(15b)와 같고,  $\alpha$  및  $\beta$ 의 최우추정량은 식(8a), (8b) 또는 (12a), (12b)와 같다.

### 3. 추정량들의 비교

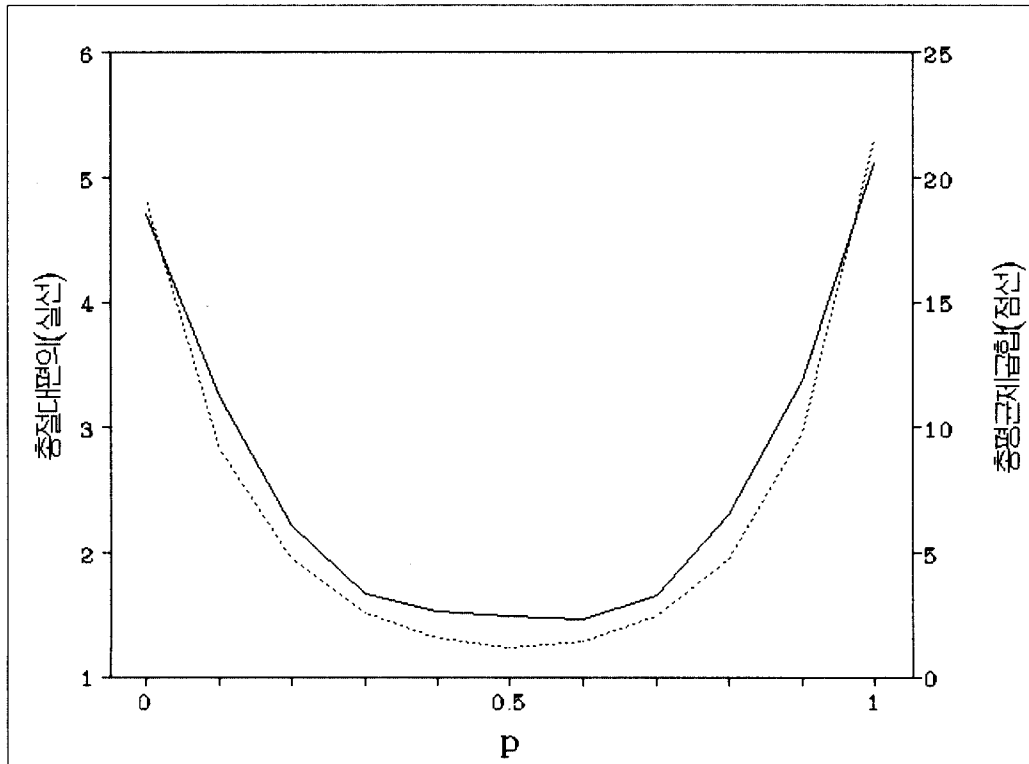
$\alpha=1.0$ ,  $\beta=1.2$ ,  $\alpha'=1.4$ ,  $\beta'=1.6$ 에 대하여 식(1)을 따르는 크기 20의 이변량자료를 IMSL을 이용하여 생성하면 (.0344, .2085), (.3329, .0890), (.2662, .3627), (.22106\*, .0893), (.1686, .2519), (.29520\*, 2.5642\*), (.0129, .5818), (1.0021, .1129), (.1094, 1.3797\*), (.23488\*, .0997), (.19892\*, .6138), (1.1080\*, .3172), (.4081, .3472), (1.4088\*, .1588), (.8255, .6449), (.6978, .1727), (.3636, .3467), (.9289, 1.8799\*), (2.1860\*, .5735), (2.1219\*, .4034)이다.  $r=10$ 이라하면  $z_{10}=1.0021$ 이므로 [\*]표시된 값은 관측중단되어 계산과정에서 1.0021로 대체되며, 밑줄친 값은 고장난 시간을 모를 경우에  $1.0021p$  ( $0 \leq p \leq 1$ )로 대체된다.  $p = p_1 = p_2 = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 에 대하여 위의 데이터를 이용하여 모수의 최우추정치의 편의와 평균제곱오차를 구하면 <표 1>과 같으며 <그림 2>는 절대편의의 합과 평균제곱오차의 합을 나타낸 것이다. 표와 그림에서 알 수 있듯이 절대편의의 합과 평균제곱오차의 합은  $p$ 에 대하여 아래로 볼록한 양상을 가지며  $p=0.6$ 과  $0.5$ 에서 절대편의의 합과 평균제곱오차의 합은 각각 최소임을 알 수 있다. 또한 모수의 값에 따라 차이는 있겠지만 부품의 고장사실만 알 경우에는  $0.5z_r$  시점 부근에서 고장이라 가정하고 분석하면 수명을 아는 경우 보다 좋은 결과를 가져올 수 있는 가능성을 배제할 수 없다(<표 1>의 진한 글꼴).



< 표 1 > 최우추정치에의 편의 및 평균제곱오차

p	최우추정치의 편의 및 총절대편의					평균제곱오차 및 총합				
	$\alpha$	$\alpha'$	$\beta$	$\beta'$	절대총합	$\alpha$	$\alpha'$	$\beta$	$\beta'$	총합
*	-.0757	.8026	-.5012	.5179	1.8974	.2569	.9124	.2569	.9124	2.3387
.0	.8765	2.8657	-.7282	-.2334	4.7038	1.2985	8.2668	1.2985	8.2668	19.1305
.1	.4636	1.9712	-.6709	-.1329	3.2388	.6651	3.9035	.6651	3.9035	9.1372
.2	.1997	1.3994	-.6030	-.0166	2.2187	.4035	1.9585	.4035	1.9585	4.7240
.3	.0164	1.0022	-.5211	.1199	<b>1.6597</b>	.2718	1.0189	.2718	1.0189	2.5814
.4	-.1183	.7104	-.4205	.2821	<b>1.5312</b>	.1908	.5842	.1908	.5842	<b>1.5500</b>
.5	-.2215	.4868	-.2938	.4780	<b>1.4801</b>	.1354	.4655	.1354	.4655	<b>1.2018</b>
.6	-.3030	.3101	-.1295	.7195	<b>1.4622</b>	.1086	.6139	.1086	.6139	<b>1.4450</b>
.7	-.3691	.1669	.0921	1.0246	<b>1.6527</b>	.1447	1.0776	.1447	1.0776	2.4446
.8	-.4238	.0485	.4074	1.4219	2.3016	.3456	2.0243	.3456	2.0243	4.7397
.9	-.4697	-.0510	.8917	1.9611	3.3735	1.0157	3.8487	1.0157	3.8487	9.7287
1.0	-.5088	-.1358	1.7303	2.7345	5.1095	3.2529	7.4961	3.2529	7.4961	21.4980

\*는 고장난 부품의 수명을 아는 경우를 나타냄.



< 그림 2 > p값에 따른 최우추정치의 총절대편의 및 총평균제곱오차

<표 2>는  $\alpha=1.0$ ,  $\alpha'=1.4$ ,  $\beta=1.2$ ,  $\beta'=1.6$ 와  $\alpha=2.0$ ,  $\alpha'=2.8$ ,  $\beta=2.2$ ,  $\beta'=3.0$ 인 두 모형에 대하여 표본크기( $n$ )와 관측중단체계수( $r$ )의 변화에 따른 모수에 대한 최우추정치의 총절대편의와 총평균제곱오차를  $p=p_1=p_2=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ 일 때 5,000회 반복하여 계산한 결과이다.  $p=0.3$ 이면  $n$ 과  $r$ 값에 무관하게 총절대편의와 총평균제곱오차 모두 고장난 부품의 수명을 아는 경우보다 우월함을 알 수 있으며,  $p=0.5$ 이면  $n=40$ ,  $r=20$ 인 경우를 제외하고 총절대편의와 총평균제곱오차는 고장난 부품의 수명을 아는 경우보다 우월하다.

< 표 2 > 최우추정치의 총편의 및 총평균제곱오차

n	r	p	모형 1		모형 2	
			총편의	총평균제곱오차	총편의	총평균제곱오차
20	10	※	.6798	5.1633	1.3130	18.1192
		.1	.8517	6.4447	1.5868	22.3255
		.3	.5027	4.2049	.9598	14.3068
		.5	.6216	4.4459	1.2072	15.3302
		.7	1.2091	7.1615	2.3586	25.6280
	15	※	.5441	3.1863	1.0409	11.1475
		.1	.7125	3.8603	1.3237	13.4927
		.3	.4800	2.7838	.9077	9.6471
		.5	.4860	2.7740	.9425	9.6546
		.7	.7153	3.7232	1.4055	13.2207
30	15	※	.4210	2.4723	.8084	9.1495
		.1	.5942	3.9321	1.0910	14.3192
		.3	.2835	2.0627	.5298	7.6419
		.5	.4127	2.1691	.7986	8.0455
		.7	1.0045	4.3907	1.9531	16.2544
	20	※	.3478	1.8033	.6580	6.6000
		.1	.5558	2.9076	1.0214	10.5873
		.3	.2872	1.6243	.5356	6.0018
		.5	.3344	1.6292	.6454	6.0206
		.7	.6823	2.8220	1.3302	10.4067
40	20	※	.3094	1.6460	.5836	5.9827
		.1	.4711	3.1401	.8487	11.3750
		.3	.1869	1.4933	.3327	5.4374
		.5	.3224	1.5097	.6119	5.4714
		.7	.9107	3.4150	1.7596	12.4798
	30	※	.2465	1.1085	.4687	3.9982
		.1	.4091	1.8190	.7461	6.5618
		.3	.2124	1.0264	.3954	3.7148
		.5	.2398	1.0314	.4676	3.7329
		.7	.4779	1.7773	.9424	6.4900

※는 고장난 부품의 수명을 아는 경우를 나타냄.

이상의 모의실험 결과로부터 다음의 추론을 할 수 있다. 이중부품부하분배체계의 수명시험에서 하나의 부품만 고장난 체계의 부품수명을 반드시 관측할 필요는 없다고 할 수 있으며, 관측이 어려울 경우 시험중단시간( $z_r$ )의 중간시점 또는 그 부근에서 고장이라 가정하고 분석하여도 무리가 아니다. 이러한 가정은 고장난 한 부품의 수명을 측정하는 것이 시간과 비용측면에서 비경제적이거나 물리적으로 불가능 할 경우에 적용될 수 있을 것이다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 Freund모형을 따르는 이변량수명자료가 체계수명을 기준으로 제2종 관측중단되어 얻어질 경우 모형의 모수에 대한 최우추정량을 한 부품만 고장인 체계의 고장부품수명을 아는 경우와 모르는 경우로 나누어 구하고 두 경우를 비교하였다. 부품의 고장사실만 알고 고장시간을 몰라도 관측중단시각의 1/2 또는 그 이하시점에서 고장났다고 가정하여도 편의와 평균제곱오차 측면에서 부품의 수명을 아는 경우보다 우수한 결과를 얻을 수 있었다. 결국, 한 부품만 고장난 부하분배체계에서는 부품의 수명을 알기위하여 시간과 노력을 반드시 투자할 필요가 없다는 것을 확인하였다는 점에서 그 의미가 있다.

그리고 본 연구는 제2종관측중단된 자료를 대상으로 추정하였지만 제1종관측중단 등 다양한 형태의 자료에 대하여도 쉽게 확장할 수 있을 것이다. 또한, 이중부품부하분배체계의 수명은  $\max(X,Y)$ 이므로 이에 대한 자료만 얻어질 때 모수를 추정하는 문제와 부하분배체계의 가속수명시험자료를 분석하는 문제는 향후의 과제로 남겨둔다.

#### 참고문헌

- [1] Freund, J.E.(1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution, *J. Amer. Statist. Assn.* 56, pp. 971-977.
- [2] Hanagal, D.D.(1996). Estimation of System Reliability from Stress-Strength Relationship, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 25(8), pp. 1783-1797.
- [3] Hanagal, D.D. & Kale, B.K.(1992). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Models, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 21(9), pp. 2625-2643.
- [4] IMSL, Inc.(1987). International Mathematical and Statistical Libraries, Inc. IMSL Library: Reference Manual, Houston.
- [5] Kunchur, S.H. & Munoli, S.B.(1994). Estimation of Reliability in Freund Model for Two Component System, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 23(11),

- pp. 3273-3283.
- [6] Lawless, J.F.(1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Weier, D.R.(1981). Bayes Estimation for a Bivariate Survival Model Based on Exponential Distributions, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 10(14), pp. 1415-1427.