

⊗ 연구논문

브라운 운동을 따르는 열화현상을 이용한 일정스트레스 가속수명시험의 최적설계

서순근 · 김갑석 · 하천수
동아대학교 산업공학과

Optimal Design of Constant Stress Accelerated Life Tests Using Degradation Phenomenon Based on a Brownian Motion

Sun-Keun Seo · Kab-Seok Kim · Chen-Soo Ha
Dept. of Industrial Engineering, Dong-A University

Abstract

This study considers optimal design of accelerated life tests under constant stress using that the first passage time to cross a critical boundary through amount of accumulated degradation has an inverse Gaussian distribution when the degradation process follows to a Brownian motion with positive drift of log linear function of stress. Optimum plans for Type I censoring are derived by minimizing the asymptotic variance of estimated quantiles at the use stress. Sensitivity analyses are also conducted to see how sensitive the optimality criterion is with respect to the uncertainties involved in the guessed values.

1. 서론

제품의 신뢰성 평가를 위한 중요한 품질특성치인 수명에 관한 정보는 보통 수명시험을 통해서 얻어지나, 고신뢰성 제품의 수명시험에는 과도한 시험시간이 소요되므로 보통 사용 조건보다 가혹한 스트레스를 가하거나 혹은 사용빈도를 극도로 증가시키는 가속화 시험(Accelerated Test)이 널리 적용된다. 이러한 가속화 시험은 시험제품의 고장시간을 관측하는 가속수명시험(Accelerated Life Test, 이하 ALT)과 열화의 양을

관측하는 가속열화시험(Accelerated Degradation Test, 이하 ADT)으로 크게 나누어진다. 유용한 정보를 얻기 위해서 시험종료시까지 제품의 고장 여부를 관측하는 ALT보다 제품의 열화량을 측정하는 ADT가 시험종료시까지 고장날 가능성이 아주 적거나 혹은 전혀 고장나지 않는 고신뢰성의 제품에의 적용에 유용하므로 요즘 그 중요도가 상대적으로 높아지고 있지만[Meeker and Hamada, 1995], 적절한 열화모형의 부족과 측정오차 및 소요비용등의 측면에서 ADT의 현장에서의 활용은 그다지 용이하지 않는 실정이다[Nelson, 1990].

고장현상의 적절한 가정하에서 지수, Weibull, 대수정규분포 등이 지금까지 수명분포로서 광범위하게 사용되어 왔다. 지수와 Weibull 분포는 극단값 이론을 적용할 수 있을 뿐만 아니라 단순한 고장률 함수를 가진다는 잇점이 있고, 대수정규분포는 광범위한 정규분포 이론에 따른 추론을 적용할 수 있다는 잇점이 있으나 이들 수명분포와 열화현상과의 관계는 명확하지 않다.

따라서, 본 연구에서는 물리적인 열화현상을 이용하여, 즉 제품의 누적 열화량이 양의 유동량(drift) η 와 확산 파라미터 δ^2 을 가지는 브라운 운동을 따를 때, 고장으로 판정할 수 있는 특정 누적열화량 ω 까지의 도달시간(first passage time)이 모수 $\mu = \omega/\eta$ 와 $\lambda = \omega^2/\delta^2$ 를 가지는 Inverse Gaussian 분포를 따른다는 점을 반영하여 사용 스트레스에서의 수명분포의 저분위수의 점근적 분산을 최소로 하는 저스트레스 수준과 각 스트레스의 할당비율을 구하는 정시종결(Type I censoring)하의 일정스트레스 최적 가속수명시험을 설계하고자 한다.

2. Inverse Gaussian 분포

2.1 브라운 운동과 Inverse Gaussian 분포

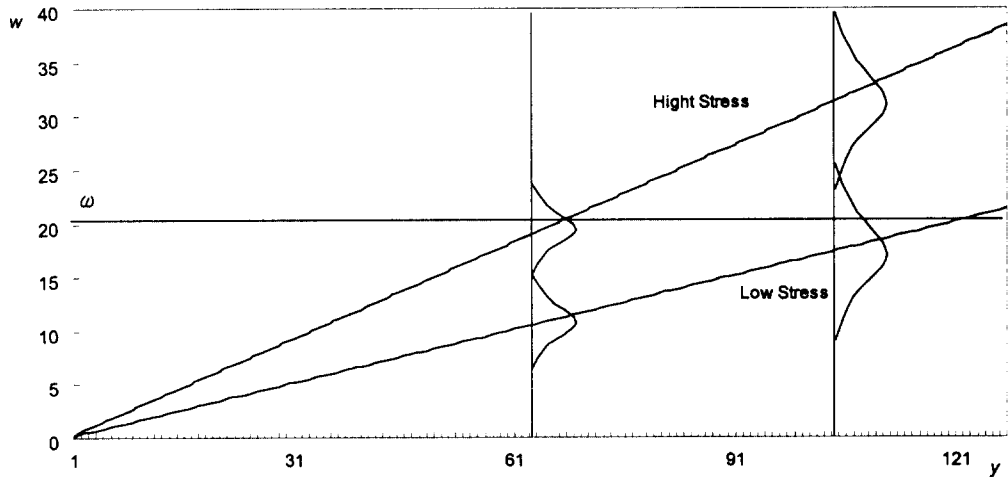
제품이나 재료의 누적 열화량이 확률과정으로 표현되는 피로고장 모형과 Inverse Gaussian(이하 IG) 분포의 관계를 다음과 같이 정리할 수 있다.

누적열화량은 양의 유동량 η 와 확산 파라미터 δ^2 을 가지는 브라운 운동(또는 Wiener process) $\{W(y); y \geq 0\}$ 으로 표현될 수 있으며 브라운 운동 $W(y)$ 는 $W(0) = 0$ 와 평균 $E[W(y)] = \eta y$, 분산 $\delta^2 y$ 를 가지는 독립증분(independent increment) Gaussian process로 정의될 수 있으며 시간의 경과에 따른 누적열화량의 분포를 도시하면 <그림 1>과 같고, $W(y)$ 의 확률밀도함수는 다음과 같다[1, 2, 3].

$$f(w; y) = \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{(w - \eta y)^2}{2\delta^2 y}\right)$$

누적열화 process $W(y)$ 가 어떤 임계치 ω 를 최초로 통과하는 시간을 Y (고장시간)

라고 하면 Y 의 분포는 모수 $\mu = \omega/\eta$ 와 $\lambda = \omega^2/\delta^2$ 를 가지는 IG 분포를 따른다는 것이 알려져 있으므로, 수명분포로서 IG 분포를 적용할 수 있다. IG 분포의 확률밀도함수 및 분포함수는 다음과 같다[Chhikara and Folks, 1989].



< 그림 1 > 브라운 운동하에서의 임계치 도달시간(수명) 분포

$$f(y; \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\lambda(y\mu^{-1}-1)^2}{2y}\right], \quad y > 0, \mu > 0, \lambda > 0$$

$$F(y) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{y}}\left(\frac{y}{\mu}-1\right)\right] + e^{2\lambda/\mu}\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{y}}\left(1+\frac{y}{\mu}\right)\right]$$

단, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수

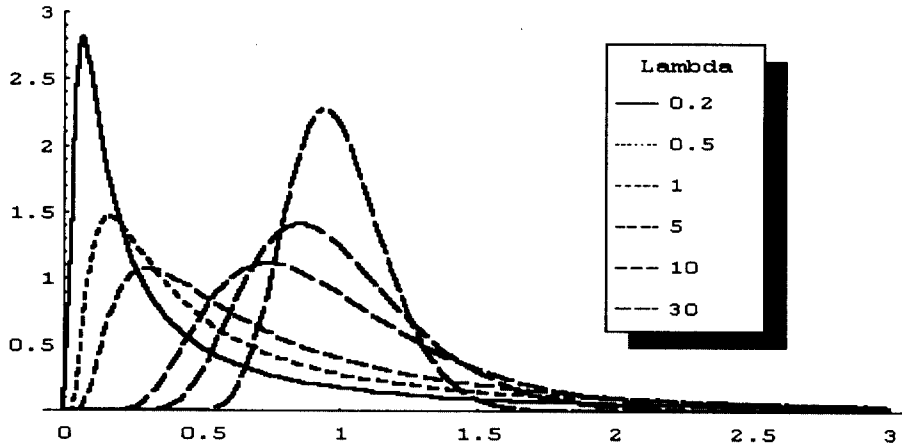
$Z = \sqrt{\lambda}(Y-\mu)/\mu\sqrt{Y}$ 라고 두면 분포함수 $F(y)$ 는 다음과 같이 $G(z)$ 로 일대일로 변환될 수 있고, z 의 확률밀도함수 $g(z)$ 는 $G(z)$ 를 일차미분하므로써 다음과 같이 구해진다.

$$G(z) = \Phi(z) + e^{2\lambda/\mu}\Phi\left[-\sqrt{z^2 + \frac{4\lambda}{\mu}}\right], \quad -\infty < z < \infty$$

$$g(z) = \left(1 - \frac{z}{\sqrt{4\lambda/\mu + z^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$$

Z 와 Y 는 일대일 변환이므로 $F(y) = G(z)$ 는 명백하다[Chhikara Folks, 1974].

IG 분포의 확률밀도함수를 도시하면 <그림 2>와 같다.



< 그림 2 > $\mu=1$ 일 경우에 λ 값에 따른 IG 분포의 형태

2.2 수명분포로서 Inverse Gaussian 분포

수명시험 분야에서 고장시간분포의 선택은 흔히 고장 메카니즘을 기초로 하여 이루어진다. 그러나 잘못된 시스템 설계로 인한 기술적인 결함, 부적절한 사용, 순간적인 결함 등과 같은 다양한 원인들에 기인하여 고장이 발생할 수 있으므로 고장시간 모형을 선택하기 위하여 어떤 분포에 데이터를 적합시키는 것보다는 오히려 고장 현상의 물리적인 특성을 고려하는 것이 더 적절하다[Lawless, 1982]. 이러한 관점에서 IG 분포는 제품의 물리적 특성을 나타내는 모수들의 값에 따라 <그림 2>에서와 같이 다양한 형태의 분포로 나타날 수 있으므로 광범위한 수명분포로 활용될 수 있다.

수명분포에서 제품의 고장이나 수리의 조기 발생의 가능성이 클 때, 그것의 고장률은 처음에는 증가하다가 일정 시점 이후에는 감소하고 수명시간이 길어짐에 따라 일정한 값으로 수렴하는 비단조적(nonmonotonic)인 특성을 가진다. 이러한 상황에서 여러 가지 수명분포들 중에서 대수정규분포도 역시 적절한 선택이 될 수 있지만 대수정규분포 대신 IG 분포를 선택하는 것이 더 큰 잇점을 가진다. 먼저, IG 분포를 사용함으로써 폭넓은 유형의 수명 분포를 다룰 수 있다. 예를 들어 IG 분포는 약간 편기(skewed)되어 있을 때 거의 언제나 고장률 증가형 분포이다. 따라서 조기 고장이 중요하지 않은 수명분포를 설명하기 위해서도 적절하다. 두 번째로, 고장률은 IG 분포에서 시간이 경과함에 따라 0이 아닌 어떤 일정한 값을 가진다. 그러나 대수정규분포에서는 시간이 경과함에 따라 고장률은 0으로 수렴할 수 있다. 어느 정도 시간이 경과한 후에 거의 일정한 고장률은 고장이 랜덤하게 발생하고 과거의 수명과는 독립적이라는 것을 의미하며 신뢰성 연구에서 광범위하게 사용되어지고 있는 지수 고장률의 특성이다. 이에 반해 거의 0에 가까운 고장률은 어떠한 고장도 발생하지 않을 것이라

는 것을 의미하며 실제 수명 형태로는 적절하지 않다. 따라서 IG 분포가 조기고장이 중요한 경우나 조기고장이 중요하지 않은 경우에도 수명분포로서 유용하게 사용될 수 있음을 알 수 있다.

또한, Suzuki et al.(1993)은 열화 고장 메카니즘을 따르는 수정발전기(水晶發振器)의 발전주파수의 저하정도를 열화량으로 취하고 스트레스와 열화량과의 관계가 아레니우스 법칙(Arrhenius rule)을 따른다는 가정하에서 가속 상황하의 몇가지 열화모형을 제시하고 브라운 운동과 변량효과 모형에 대해서 각각 대수평균수명의 추정치 및 정도(precision)를 구하여 두 모형간에 차이가 없음을 입증하고 있다.

3. Inverse Gaussian 분포를 이용한 최적 가속 수명시험의 설계

3.1 기본 가정

최적가속수명시험의 설계를 위한 기본 가정들은 다음과 같다.

- ① 모든 스트레스하에서 시험단위의 열화량은 브라운 운동을 따라 누적된다.
- ② 시험 스트레스는 두 수준으로 저, 고 스트레스(즉, s_l 과 s_h)이며 시험시간동안 일정하게 가해진다.
- ③ 각 스트레스에서의 시험단위들(즉, n_1 과 n_2)은 동시에 시험되고 고장시 교체되지 않는다($n = n_1 + n_2$).
- ④ 시험은 정해진 시간 y_c 까지 수행된다. 즉, 정시종결이 적용된다.
- ⑤ 열화과정의 유동량 η 의 대수는 다음과 같이 스트레스에 관한 선형함수이다.

$$\ln \eta(s) = \beta_0' + \beta_1' s$$

- ⑥ 열화과정의 확산 파라미터는 일정한 값 δ^2 을 가진다.

확산 파라미터 δ^2 이 스트레스의 수준과 관련없이 일정할 경우에 열화 속도를 결정하는 파라미터는 η 가 된다. $\eta > 0$ 일 때 η 값이 증가하면 열화속도가 빠르게 증가하게 된다. 따라서 IG 분포의 평균이 유동량의 역수에 비례한다는 것을 이용하여 임계치 ω 를 η 에 흡수시켜 스트레스와 수명과의 관계를 식 (1)과 같이 평균의 역수로 설정할 수 있으므로 변환하면 s 의 선형함수가 된다.

$$\mu_s^{-1} = \frac{\eta}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{\beta_0' + \beta_1' s} = e^{\beta_0 + \beta_1 s} \quad (1)$$

3.2 최우추정량

스트레스 s 에서 정시종결 하의 관측치 y_i 의 우도함수를 구하기 위하여 먼저 y_c 에 관한 지시함수(indicator function) $I(y_i)$ 를 정의하면 식 (2)와 같다.

$$I(y_i) = \begin{cases} 1, & y_i \leq y_c \\ 0, & y_i > y_c \end{cases} \quad (2)$$

상기의 지시함수에 따라 관찰치 y_i 의 대수우도함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} L_i &= I(y_i) \ln f(y_i) + [1 - I(y_i)] \ln [1 - F(y_c)] \\ &= I(y_i) \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\lambda^{-1}) - \frac{3}{2} \ln y_i - \frac{\lambda}{2} y_i^{-1} (y_i e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1)^2 \right] \\ &\quad + [1 - I(y_i)] \ln [1 - F(y_c)] \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 n 개의 독립 관측치들의 표본 대수우도함수는 다음과 같다.

$$L_0 = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad (4)$$

최우추정량(ML estimator) $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\lambda}$ 는 위의 대수우도함수 L_0 를 최대화하는 값으로서 다음과 같이 대수우도방정식을 각 모형 모수들에 관하여 1차 편미분하여 모든 시험단위들에 관해서 합하여 그것을 0으로 놓고 해를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial L_i}{\partial \beta_0} = I(y_i) \lambda (-y_i e^{2\beta_0 + 2\beta_1 s} + e^{\beta_0 + \beta_1 s}) - [1 - I(y_i)] \frac{\sqrt{\lambda y_c} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s}}{1 - F(y_c)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial \beta_1} &= I(y_i) \lambda s (-y_i e^{2\beta_0 + 2\beta_1 s} + e^{\beta_0 + \beta_1 s}) - [1 - I(y_i)] \frac{s \sqrt{\lambda y_c} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s}}{1 - F(y_c)} \\ &= s \frac{\partial L_i}{\partial \beta_0} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda} = I(y_i) \left[\frac{\lambda^{-1}}{2} - \frac{y_i^{-1}}{2} (y_i e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1)^2 \right] - [1 - I(y_i)] \frac{g(z_c)}{1 - F(y_c)} \times \frac{y_c e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1}{2\sqrt{\lambda y_c}} \quad (7)$$

$$\text{단, } z_c = \sqrt{\lambda}(y_c - \mu) / \mu \sqrt{y_c}$$

최우추정량을 구하는 절차를 예증하기 위해 Nelson(1981)이 제시한 온도 스트레스 하에서의 절연체의 전기적 파괴강도 데이터(kV)의 일부를 이용하여 ML 추정치를 구하였다. 사용스트레스를 150℃, 저스트레스 180℃, 고스트레스 250℃, 누적열화량의 임계치 20kV로 설정하여 각 스트레스에서 8번 측정(1, 2, 4, 8, 16, 32, 48, 64주)하고 스트레스와 측정시점의 모든 조합에서 4개의 시료에 대한 전기적 파괴강도 데이터, 즉 64개의 데이터를 열화량으로 취하였다. <표 1>에 수치해석적 방법을 이용하여(즉, 식 (4)를 최소화하거나 식 (5)-(7)의 비선형연립방정식의 해를 구한다) 구한 사용스트레스에서의 열화량과 수명 분포의 분위수 및 모수들의 ML 추정치가 주어져 있다.

< 표 1 > 사용스트레스(150℃)의 열화량과 수명의 ML 추정치

분위수	64주의 열화량 (kV)	수명 (week)
0.001	0.54396	7.468
0.01	2.01326	11.685
0.1	4.02290	25.266
0.5	6.48792	90.713
0.9	8.95295	419.290
0.99	10.96258	1260.925
$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\sigma}^2$
-2.28894 (0.73773*)	1.16633 (0.79808)	3.69973 (0.65403)

* 추정치의 표준편차

3.3 Fisher 정보량 행렬

Fisher 정보량 행렬의 각 요소를 찾기 위해서 대수우도방정식을 모형의 모수들에 관하여 2차 편미분하여, $E\left[\frac{\partial L_i}{\partial \beta_0}\right] = E\left[\frac{\partial L_i}{\partial \beta_1}\right] = E\left[\frac{\partial L_i}{\partial \lambda}\right] = 0$ 를 이용하면 Fisher 정보량 행렬의 각 요소가 되는 2차 편미분함수의 음의 기대값들을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0^2}\right] = \lambda F(y_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} - \sqrt{\lambda y_c} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} + \lambda y_c g(z_c) e^{2\beta_0 + \beta_1 s} + \frac{\lambda y_c [g(z_c)]^2 e^{2\beta_0 + 2\beta_1 s}}{1 - F(y_c)} \quad (8)$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right] = \lambda s F(y_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} - s \sqrt{\lambda y_c} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} + \lambda s y_c g(z_c) e^{2\beta_0 + \beta_1 s} + \frac{\lambda s y_c [g(z_c)]^2 e^{2\beta_0 + 2\beta_1 s}}{1 - F(y_c)} = s E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0^2}\right] \quad (9)$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_1^2}\right] = \lambda s^2 F(y_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} - s^2 \sqrt{\lambda y_c} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} + \lambda s^2 y_c g(z_c) e^{2\beta_0 + \beta_1 s} \\ + \frac{\lambda s^2 y_c [g(z_c)]^2 e^{2\beta_0 + 2\beta_1 s}}{1 - F(y_c)} = s^2 E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0^2}\right] \quad (10)$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \lambda}\right] = -\frac{\sqrt{y_c}}{2\sqrt{\lambda}} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} \\ + \frac{1}{2} e^{\beta_0 + \beta_1 s} (y_c e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1) \left[g'(z_c) + \frac{[g(z_c)]^2}{1 - F(y_c)} \right] \quad (11)$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_1 \partial \lambda}\right] = -\frac{s}{2} \frac{\sqrt{y_c}}{\sqrt{\lambda}} g(z_c) e^{\beta_0 + \beta_1 s} \\ + \frac{s}{2} e^{\beta_0 + \beta_1 s} (y_c e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1) \left[g'(z_c) + \frac{[g(z_c)]^2}{1 - F(y_c)} \right] \quad (12) \\ = s E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \lambda}\right]$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \lambda^2}\right] = \frac{\lambda^{-2}}{2} F(y_c) - \frac{g(z_c)}{4\sqrt{\lambda^3 y_c}} (y_c e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1) \\ + \frac{(y_c e^{\beta_0 + \beta_1 s} - 1)^2}{4\lambda y_c} \left[g'(z_c) + \frac{[g(z_c)]^2}{1 - F(y_c)} \right] \quad (13)$$

모든 항이 단지 $\beta_0, \beta_1, \lambda, y_c, s$ 의 함수이므로 $E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0^2}\right] = A(s), E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \lambda}\right] = B(s), E\left[-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \lambda^2}\right] = C(s)$ 라고 두면, 스트레스 s 에서의 특정 시험단위의 Fisher 정보량 F_s 는 식 (14)와 같다.

$$F_s = \begin{bmatrix} A(s) & sA(s) & B(s) \\ sA(s) & s^2 A(s) & sB(s) \\ B(s) & sB(s) & C(s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

따라서 두스트레스 수준하에서의 Fisher 정보량 행렬은 저스트레스 표본할당비율을 α 라고 할 때 식 (15)가 된다.

$$\mathbf{F} = n\alpha\mathbf{F}_{s_i} + n(1-\alpha)\mathbf{F}_{s_u} \quad (15)$$

ML 추정량 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\lambda}$ 의 점근적 공분산 행렬 Σ 는 대응하는 Fisher 정보량 행렬의 역행렬 \mathbf{F}^{-1} 로 구할 수 있다.

3.4 최적 계획

사용 스트레스 s_u 에서의 $100P$ 백분위수의 ML 추정량 $\hat{y}_P(s_u)$, 점근적 분산 $Avar(\hat{y}_P(s_u))$, 표준화된 점근적 분산 V_0 는 식 (16), (17)과 같다.

$$\hat{y}_P(s_u) = \hat{\mu}_0 + \frac{\hat{\mu}_0^2 z_P^2}{2\hat{\lambda}} - \frac{\hat{\mu}_0^2}{2\hat{\lambda}} \sqrt{\frac{4\hat{\lambda} z_P^2}{\hat{\mu}_0} + z_P^4} \quad (16)$$

$$V_0 = n \cdot Avar(\hat{y}_P(s_u)) = \left[\frac{\partial y_P}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial y_P}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial y_P}{\partial \lambda} \right] \Sigma \left[\frac{\partial y_P}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial y_P}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial y_P}{\partial \lambda} \right]' \quad (17)$$

단, z_P 는 Inverse Gaussian분포의 $100P$ 백분위수

$$\hat{\mu}_0 = \exp(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 s_u)$$

저, 고스트레스하에서 위의 사용스트레스에서의 $100P$ 백분위수의 점근적 분산 즉 식 (17)을 최소로 하는 최적계획은 저스트레스 수준 s_i^* 와 저스트레스 표본할당비율 α^* 를 찾으므로서 수립된다. 그러나 위의 점근적 분산식은 모수 $\beta_0, \beta_1, \lambda$ 에 매우 종속적이므로 이러한 모수들의 적절한 사전 추정없이 최적 저스트레스 수준과 할당 비율을 구할 수 없으므로 구해진 최적계획은 주어진 모수하에서만 최적일 수 있는 준최적설계(locally optimal design)가 된다.

따라서 본 연구에서는 먼저 스트레스 수준을 $s_u=0, s_h=1$ 로 표준화하였으며, 상기 모수들을 사전추정하기 위하여 시험종료시까지 사용스트레스와 고스트레스에서 고장날 확률 P_u, P_h 및 사용스트레스에서의 평균 수명 ($\mu_0 = e^{-\beta_0}$)의 추측이 가능한 경우에 $y_c = y_c/\mu_0, \lambda' = \lambda/\mu_0, \mu_s = \mu_s/\mu_0$ 라고 두면 IG 분포의 누적분포함수로부터 유도될 수 있는 식 (18)과 (19)를 동시에 만족하는 β_1 과 λ' 를 μ_0 에 불변(invariant)하게 추정할 수 있다. 그러나 식 (18)과 (19)의 비선형연립방정식의 해를 구하기 위해서는 수치해석적인 방법을 이용하여야 한다.

$$P_u = \Phi(z_u) + e^{2\lambda'} \Phi(-\sqrt{z_u^2 + 4\lambda'}) \quad (18)$$

$$P_h = \Phi(z_h) + e^{2\lambda e^{\beta_1}} \Phi(-\sqrt{z_h^2 + 4\lambda e^{\beta_1}}) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \text{단, } z_u &= \sqrt{\lambda/y_c}(y_c - 1) \\ z_h &= \sqrt{\lambda/y_c}(y_c e^{\beta_1} - 1) \end{aligned}$$

이렇게 두 모수를 사전추정하여 식 (17)을 최소로 하는 최적 일정스트레스 가속수명시험을 Powell(1964)의 conjugate direction method에 의하여 설계하였으며 식 (17)의 점근적분산을 구하기 위해서는 μ_0 의 사전 추정값도 필요하다.

< 표 2(a) > $q=0.001$, $\mu_0=100$ 일 경우의 최적 일정스트레스 계획

P_u	P_h	$y_c/\mu_0=1/10$			$y_c/\mu_0=1/50$		
		s_i^*	α^*	V_0	s_i^*	α^*	V_0
0.0001	0.99	0.7385	0.3488	262.328	0.8278	0.1165	14.895
	0.9	0.7659	0.4074	308.131	0.8501	0.1400	17.296
	0.7	0.7814	0.4526	415.116	0.8630	0.1564	23.972
	0.5	0.7867	0.4808	584.614	0.8677	0.1644	35.712
	0.2	0.7778	0.5206	1337.474	0.8613	0.1687	99.059
0.001	0.99	0.7028	0.2867	163.342	0.8019	0.0919	7.933
	0.9	0.7280	0.3334	187.509	0.8232	0.1096	9.187
	0.7	0.7377	0.3675	254.055	0.8319	0.1219	12.744
	0.5	0.7338	0.3869	358.281	0.8289	0.1275	19.065
	0.2	0.6773	0.4150	829.407	0.7729	0.1360	54.110

< 표 2(b) > $q=0.01$, $\mu_0=100$ 일 경우의 최적 일정스트레스 계획

P_u	P_h	$y_c/\mu_0=1/10$			$y_c/\mu_0=1/50$		
		s_i^*	α^*	V_0	s_i^*	α^*	V_0
0.0001	0.99	0.7332	0.5068	498.112	0.8266	0.1841	36.748
	0.9	0.7580	0.5868	599.217	0.8486	0.2210	42.824
	0.7	0.7703	0.6524	806.667	0.8611	0.2478	58.884
	0.5	0.7730	0.7008	1112.074	0.8658	0.2627	86.306
	0.2	0.7603	0.7916	1333.939	0.8591	0.2778	226.020
0.001	0.99	0.6979	0.4293	329.317	0.8010	0.1466	19.982
	0.9	0.7208	0.4976	385.150	0.8214	0.1746	23.169
	0.7	0.7280	0.5541	506.647	0.8298	0.1948	31.854
	0.5	0.7218	0.5968	685.701	0.8271	0.2059	46.875
	0.2	0.6615	0.7027	1338.016	0.7715	0.2267	125.019

< 표 2(c) > $q=0.1$, $\mu_0=100$ 일 경우의 최적 일정스트레스 계획

P_u	P_h	$y_c/\mu_0=1/10$			$y_c/\mu_0=1/50$		
		s_i^*	α^*	V_0	s_i^*	α^*	V_0
0.0001	0.99	0.7369	0.7580	1663.004	0.8222	0.4069	176.608
	0.9	0.7698	0.7607	2631.773	0.8420	0.4825	210.489
	0.7	0.7926	0.7474	4563.156	0.8524	0.5461	285.083
	0.5	0.8063	0.7270	7746.126	0.8555	0.5932	399.059
	0.2	0.8238	0.6642	25688.870	0.8460	0.6938	864.905
0.001	0.99	0.6907	0.7564	1076.778	0.7968	0.3329	101.299
	0.9	0.7201	0.7886	1495.684	0.8159	0.3953	118.422
	0.7	0.7428	0.7889	2364.989	0.8227	0.4476	158.448
	0.5	0.7580	0.7706	3829.799	0.8189	0.4878	220.365
	0.2	0.7787	0.6944	12519.365	0.7631	0.6109	461.830

P_u , P_h , μ_0 의 다양한 값들에 대해서 s_i^* 와 α^* 를 도출해 보고 그때의 점근적 분산 V_0 를 구해 보았으며 그 중 일부를 <표 2(a)-(c)>에 정리하였다. 도출된 최적계획을 검토하면 시험종료시간과 사용스트레스에서의 평균수명과의 비 y_c/μ_0 가 작아질수록 s_i^* 의 값은 증가하고, α^* 와 V_0 의 값은 감소하는 경향이 있는 것을 알 수 있었다. V_0 가 감소하는 이유는 사용스트레스에서의 평균이 고정되어 있으므로 시험종료시간이 감소하면 수명분포의 모수 λ 의 사전추정치가 작아져서 Fisher 정보량값이 줄어들기 때문이다. 또한, 고스트레스에서 시험종료시까지 고장날 확률 P_h 가 증가할수록 거의 대부분의 경우에 α^* 와 V_0 는 감소하는 경향을, s_i^* 는 증가하다가 감소하는 경향을 나타내고 있었고, 사용스트레스에서 시험종료시까지 고장날 확률 P_u 가 증가할수록 s_i^* , α^* , V_0 는 감소하는 경향을 나타내고 있었다. 마지막으로 설계모수와 Fisher 정보량 행렬이 μ_0 에 불변하게 구해질 수 있으므로 최적계획의 이러한 경향은 μ_0 에는 거의 영향을 받지 않게 된다.

본 연구에서 제시한 최적계획은 P_u , P_h 를 미리 알고 있다는 가정하에서 도출한 준최적계획이기 때문에 실제로 P_u , P_h 를 오추정(\hat{P}_u , \hat{P}_h)하여 모수들의 추정에 오차가 발생할 경우에 실제 적용한 계획이 최적이지 아닐 수도 있다. 따라서 모수가 오추정되었을 때의 위험도를 알아보기 위하여 민감도 분석을 실시하였다.

민감도 분석을 수행한 결과 중 일부가 <표 3>에 주어져 있으며, 여기서의 민감도는 P_u , P_h 를 각각 0.001과 0.9로 오추정하였을 때 P_u 의 참값이 0.0003~0.005, P_h 의 참값이 0.7~0.99 범위내에 있을 때의 점근적분산비(오추정분산/참값분산)를 나타낸다. 분석결과는 P_u , P_h 를 오추정하더라도 P_u , P_h 의 참값이 각각 약 500%과 20% 범위내에 있을 때 분산의 변화는 최대 9% 정도로 큰 영향이 없음을 알 수 있다. 따라서

실제 사전추정값이 어느 정도 오추정되더라도 본 연구의 시험계획을 적용할 수 있음을 파악할 수 있으며 다른 경우도 이와 유사한 결과를 보여주고 있다.

<표 3> $\hat{P}_u=0.001$, $\hat{P}_h=0.90$, $y_c/\mu_0=1/10$, $q=0.01$ 일 경우의 V_0 에 대한 감도 분석

$P_u \backslash P_h$	0.7	0.8	0.9	0.95	0.996
0.0003	1.09098	1.05871	1.02378	1.00659	1.00255
0.0005	1.04901	1.02803	1.00764	1.00054	1.00906
0.001	1.01377	1.00488	1	1.00336	1.02376
0.003	1.00486	1.00729	1.01701	1.02950	1.05709
0.005	1.01803	1.02245	1.03486	1.04858	1.07499

3.5 수치예

어떤 절연체 제품이 사용(150°C :표준화 스트레스 수준=0) 및 고스트레스(250°C :표준화 수준=1)하에서 시험종료 시점인 $y_c=10$ (weeks)까지 임계 열화량 ω 에 도달할 확률이 각각 0.001과 0.9, 사용스트레스하에서 평균수명 $\mu_0=100$ (weeks)으로 추정된다. 따라서 사용스트레스하에서 관심있는 분위수가 0.01일 때 최적계획은 표 2(b)에서 $s_i^*=0.7208$, $\alpha^*=0.4976$, $Avar(\hat{y}_{0.01}(s_u))=3.85$ 가 되므로 100단위의 제품을 시험할 경우에 222°C 의 저스트레스에서 50단위, 250°C 의 고스트레스에서 50단위를 시험하면 된다.

4. 결론

한정된 사용기간동안 거의 고장나지 않는 고신뢰성 제품의 수명특성을 관찰하기 위하여 가속화 시험을 적용할 경우에 일반적으로 고장시간을 관측하는 가속수명시험 보다는 열화량을 관측하는 가속열화시험이 더 신뢰성있는 정보를 제공하게 된다. 그러나 적절한 열화모형의 부족과 추정오차 및 소요비용등의 관점에서 가속열화시험의 실시는 용이하지 않다.

따라서 본연구는 열화현상을 가속시험에 반영하는 중간단계로서 누적열화현상이 브라운 운동을 따를 경우에 특정 열화까지의 도달시간이 Inverse Gaussian 분포를 따른다는 점을 이용하여 먼저 Inverse Gaussian 분포의 수명분포로서의 유용성을 검토한 후에 시험종료시까지 사용스트레스와 고스트레스에서 고장날 확률(P_u 와 P_h)들을 다양하게 변화시켜가며 고신뢰성 제품에 적용할 수 있는 최적 일정스트레스 가속수명시

험을 설계하여 시험자가 이를 활용할 수 있도록 적용가능한 범위의 시험계획을 제공하였다. 또한 사전추정치에 대한 민감도 분석을 실시하여 제시된 계획이 설계 모수의 오추정에도 둔감함을 파악하였다.

마지막으로 본 연구에서는 3가지 모수를 모두 사전추정하여 최적계획을 수립하였지만, Weibull과 대수정규분포의 경우와 같이 두 가지 모수의 비 또는 이의 대용치만을 사전추정하여[Meecker and Hahn, 1985] 가속수명시험계획을 도출하는 방법과 유동량과 스트레스의 선형관계에 대한 적합성을 파악할 수 있도록 세 스트레스 이상에서 시험되는 절충형 시험계획에 대한 추가 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] Bhattacharyya, G.K. and Fries, A.(1981), "Inverse Gaussian Regression and Accelerated Life Test," *Technical Report, Dept. of Statistics, University of Wisconsin.*
- [2] Fries, A. and Bhattacharyya, G.K.(1983), "Analysis of Two-Factor Experiments under an Inverse Gaussian Model," *J. Amer. Statist. Ass.*, Vol. 78, pp. 820-826.
- [3] Doksum, K.A. and Hoyland, A.(1992), "Models for Variable-Stress Accelerated Life Testing Experiments Based on Wiener Processes and the Inverse Gaussian Distribution," *Technometrics*, Vol. 34, pp. 74-82.
- [4] Chhikara, R.S. and Folks, J.L.(1989), *The Inverse Gaussian Distributions: Theory, Methodology, and Application*, Marcel Dekker, N.Y.
- [5] Chhikara, R.S. and Folks, J.L.(1974), "Estimation of the Inverse Gaussian Distribution Function," *J. Amer. Statist. Ass.*, Vol. 69, pp. 250-254.
- [6] Lawless, J.F.(1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley, N.Y.
- [7] Meeker, W.Q. and Hahn, G.J.(1985), "How to Plan an Accelerated Life Test-Some Practical Guidelines," *ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques*, Vol. 10.
- [8] Meeker, W.Q. and Hamada, M.(1995), "Statistical Tools for the Rapid Development & Evaluation of High-Reliability Products," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-44, pp. 187-198.
- [9] Nelson, W.(1990), *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, Wiley, N.Y.
- [10] Nelson, W.(1981), "Analysis of Performance-Degradation Data from Accelerated Tests," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-30, pp. 149-155.

- [11] Powell, M.J.D.(1964), "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives," *Computer Journal*, pp. 155-167.
- [12] Suzuki, K., Maki, K. and Yokogawa, S.(1993), "劣化量データを用いた壽命 特性推定法に関する一考察 : 擴散の故障メカズムに基づく場合," *日本信賴性工學會誌*, Vol. 15(2), pp. 6-13.