

## 공정능력지수에 대한 깁스샘플링 추정

김평구

충청전문대학 품질관리과

김희철

동국대학교 통계학과

## Some Process Capability Indices Using Gibbs Sampling

Pyong-Koo Kim

Dept. of Quality Control, Chung Cheong Junior College

Hee-Cheul Kim

Dept. of Statistics, Dongguk University, Seoul

### Abstract

Process capability indices are used to determine whether a production process is capable of producing items within a specified tolerance. Using conditional distribution, we study some process capability indices  $\hat{C}_{Gp}$ ,  $\hat{C}_{Gpk}$ ,  $\hat{C}_{Gpm}$  under conjugate prior distribution. We consider some process capability indices with Gibbs sampling method. Also, we examine some small sample properties related to these estimators by some simulations

### 1. 서론

어떤 제품을 생산하는 제조공정에서 제품의 품질변동에 이상이 발생되었는데도 불구하고 어떠한 조치를 취하지 않는 경우 그 제품은 품질이 크게 떨어질 것이다. 따라서 제조현장에서 공정능력을 분석 및 평가하고 조치를 취하는 일은 매우 중요한 일이다. 이러한 공정을 평가하기 위한 측도로 여러 공정능력지수들이 사용되고 있다. 대표적인 지수들로는  $C_p = (USL - LSL)/6\sigma$ ,  $C_{pk} = \text{Min}\{(USL - \mu)/3\sigma, (\mu - LSL)/3\sigma\}$

그리고  $C_{pm} = (USL - LSL)/6\tau$  (단,  $USL$ 와  $LSL$ 은 규격상한과 규격하한이고,  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 는 공정평균과 공정분산,  $\tau^2 = E(X - T)^2$ , ( $T$ 는 목표치)) 등으로 이들은 특히 공정의 능력에 대한 정보로서 제품의 품질향상에 중요한 역할을 해왔다. 그런데 이들 공정능력지수들 중에서  $C_p$ 는 공정평균  $\mu$ 와 무관한 지수로 공정의 산포만을 반영하고 있으며,  $C_{pk}$ 는 공정평균  $\mu$ 와 공정의 산포는 고려되고 있지만, 목표치  $T$ 를 반영하지 못하는 결점이 있다. 이로부터 Chan 등(1988)은 공정분산  $\sigma^2$  대신  $\tau^2$  을 고려한 공정능력지수  $C_{pm}$ 을 제안한 바 있다. 여기서 공정능력지수들의 관계는  $C_{pk} = (1 - k)C_p$ , (여기서  $k = 2|m - \mu| / (USL - LSL)$ ,  $m = (USL + LSL)/2$ )이 되며  $\mu = m$ 일 때  $C_{pk} = C_p$ 가 된다.

정규분포를 하는 어떤 공정으로부터 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 주어지고 표본평균과 표본분산이 각각  $\bar{X} = \sum X_i / n$ 와  $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ 라 할 때 모수  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 을 모르는 경우 위에서 정의된 공정능력지수들에 대한 일반적인 추정은 다음과 같다.

$$\hat{C}_p = d/3S$$

$$\hat{C}_{pk} = (1 - \hat{k}) \hat{C}_p$$

$$\hat{C}_{pm} = d / (3\sqrt{S^2 + (\bar{X} - T)^2})$$

단,  $\hat{k} = 2|m - \bar{x}| / (USL - LSL)$ ,  $d = (USL - LSL)/2$

한편, 생산현장에서는 시간과 비용이 많이 소요되어 공정으로부터 많은 표본을 추출하기가 어려운 경우, 일반적인 제조공정에서 주변밀도를 이용하여 통계적 특징을 유도하고자 하는 경우, 공정분포의 평균이나 산포에 대한 어느 정도의 사전정보를 알고 있는 경우가 있다. 이 경우 반복표본추출법의 하나인 깃스추출법을 적용할 수 있다. 이러한 추출법은 Gelfand 등(1990)에 의해서 본격적으로 연구되었고 점차 적용이 확대되어 가고 있다.

이 논문에서는 여러 공정능력지수들 중  $C_p, C_{pk}, C_{pm}$  등에 대해, 이러한 깃스추출법을 이용한 공정능력지수를 제안하고, 모의실험을 통해 모수추정을 하여, 깃스추출법을 이용한 측도와 일반적인 측도를 비교하고 그 특징을 연구할 것이다.

이 논문에서 2절은 사후모수추정을 위하여 사용되는 깃스추출법에 대하여 살펴보고, 3절에서는 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\sigma^2$ 인 정규분포를 하는 공정으로부터 추출된 제품의 특성치들을 기초로 공정능력지수에 대한 깃스샘플링에 대하여 제안하였고, 4절에

서는 모의실험 결과 및 기존의 일반적인 측도와의 비교를 시행하였고, 5절에서는 결론을 서술하였다.

## 2. 깃스추출법의 배경

다음에 주어진 (2.1)의 결합밀도함수  $f(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$ 로부터 주변밀도를 이용하여 평균이나 분산과 같은 통계적 특징을 유도하고자 한다.

$$f(x) = \int \dots \int f(x, y_1, y_2, \dots, y_p) d_{y_1} \dots d_{y_p} \quad (2.1)$$

위의  $f(x)$ 를 계산하여 필요한 정보를 찾아내는 경우에 있어서 (2.1)은 분석적이나 해석적인 계산이 어려운 경우가 있다. 이러한 경우 깃스추출법은  $f(x)$ 의 값을 유도하는 대안적 방법을 제공해 준다.  $f(x)$ 를 직접 계산하거나, 혹은 점근적으로 계산하는 것보다 오히려 깃스추출법을 이용하여 표본  $X_1, X_2, \dots, X_m \sim f(x)$ 를 발생시키면 효과적이다. 충분히 큰 표본을 모의실험을 통해  $X$ 의 평균이나 분산, 기타의 특징을 유도하면 정도가 높은 값을 계산할 수 있다. 사실 모의실험 접근을 이용할 때는 모수의 값과 같아지도록 시행하는 것이 중요하다. 예를 들면  $X$ 의 평균을 계산하기 위해서는  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ 를 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = E(X) \quad (2.2)$$

따라서  $m$ 이 충분히 크고 그 자체의 밀도를 가지고 있으면 어떤 모집단의 특징도 정도 높게 유도할 수 있다.

깃스추출법을 고찰하기 위해 2변수의 경우 즉, 확률 변수  $(X, Y)$ 를 고려하여 보자. 깃스추출법을 사용해  $f(x)$ 로부터 표본을 발생하기 위해 조건부분포  $f_1(x|y)$ 과  $f_2(y|x)$ 를 사용한다. 이 분포는 통계적 모형으로 잘 알려진 분포이고, 확률변수의 깃스 열(sequence)을 다음과 같이 발생시킴으로써 시행할 수 있다. 이러한 방법을 깃스추출법이라 한다.

$$Y_0, X_0, Y_1, X_1, \dots, Y_k, X_k \quad (2.3)$$

여기서 초기값은  $Y_0 = y_0$ 로 구체화되고, (2.3)의 나머지들은 다음과 같은 식을 이용하여 발생시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} X_j &\sim f_1(x \mid Y_j = y_j) \\ Y_{j+1} &\sim f_2(y \mid X_j = x_j) \end{aligned} \quad (2.4)$$

위의  $X_k$ 는 적당한 일반적 조건하에서  $k \rightarrow \infty$ 감에 따라  $f(x)$ 로 수렴( $X$ 의 진의(true) 주변밀도)한다는 사실이 판명되었다. 따라서  $k$ 가 충분히 크면 (2.3)의 마지막 관찰치  $X_k = x_k$ 는  $f(x)$ 로부터 발생시킨 효과적인 표본점으로 간주된다. 깃스 열인 (2.3)의 수렴(분포)은  $f(x)$ 로부터 근접 표본을 얻기 위해서 다양한 방법들을 이용할 수 있다. 예를 들어, Gelfand 등(1990)은  $k$ 개의 구간에서  $m$ 개의 독립적인 깃스 열을 발생시키는 방법을 제시하였다. 이 방법에서 각 열로부터  $X_k$ 의 마지막 값을 사용하였다.  $k$ 가 충분히 크면  $f(x)$ 로부터 iid를 가지는 근접 표본을 얻을 수 있다. 이점에 관해 Tanner과 Wong(1984)은 다음과 같은 정리를 제시하였다.

GG1(수렴성)

어떠한  $u_1^{(0)}, \dots, u_v^{(0)}$ 에 대해서도  $u_s^{(j)} \rightarrow u_s \sim f(u_s) (s=1, \dots, v)$ 가 된다.

GG2(비율)

$\sup |f(u_1^{(i)}, \dots, u_v^{(i)}) - f(u_1, \dots, u_v)| \rightarrow 0$ ,  $i$ 에 대해 기하학적으로.

GG3(ergodic theorem)

어떤 측도 가능 함수  $T$ 에 대해 다음과 같은 결과가 성립한다.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^j T(u_1^{(i)}, \dots, u_k^{(i)})}{j} \rightarrow E(T(u_1, \dots, u_k))$$

### 3. 공정능력지수에 대한 깃스샘플링

평균이  $\mu$ 이고 분산  $\sigma^2$ 인 정규분포에서 추출된  $n$ 개의 독립 관찰치(제품특성치)가 있다고 가정하자. 즉  $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 그리고 평균과 분산에 대한 정보가 공액(conjugate)사전정보를 가지고 있다고 가정하자. 깃스샘플링을 시행하기 위한 조건부 분포를 구하기 위하여 베이스 정리를 사용하면 다음과 같은 우도함수와 결합사후분포를 각각 구할 수 있다.

$$l(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) \propto \sigma^{-n} \exp(-1/2\sigma^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2), \quad (3.1)$$

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{x}) \propto l(\mu, \sigma | \mathbf{x}) \cdot \pi(\mu, \sigma), \quad -\infty < \mu < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty. \quad (3.2)$$

$\mu$ 와  $\sigma^2$ 는 독립이고 (3.1)에서  $\sigma^2$ 가 장애(nuisance)모수이고  $\mu$ 에 대한 사전분포가  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 를 가진다고 하면 다음과 같다.

$$\pi(\mu) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} (\mu - \mu_0)^2\right) \quad (3.3)$$

따라서  $\mu$ 에 대한 조건부 사후분포 (3.2)는 (3.1)과 (3.3)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(\mu | \sigma^2, \mathbf{x}) &\propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} (\mu - \bar{x})^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} (\mu - \mu_0)^2\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} (\mu - \bar{\mu})^2 + \frac{\frac{n}{\sigma^2} (\bar{x} - \mu_0)^2}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\bar{\sigma}^2} (\mu - \bar{\mu})^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{여기서, } \bar{\mu} = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$$

$$\mu | \sigma^2, \mathbf{x} \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2) \quad (3.4)$$

또, (3.2)에서  $\mu$ 가 장애모수이고  $1/\sigma^2 = \lambda$ 에 대한 사전분포가  $\text{Gamma}(a, b)$ 를 가진다고 하면

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \cdot e^{-b\lambda}$$

이 된다. 위와 동일한 방법으로  $\lambda$ 에 대한 조건부 사후분포를 구하면 다음과 같다.

$$p(\lambda | \mu, \mathbf{x}) \propto e^{-\lambda \left( b + \frac{1}{2} \sum (x_i - \mu)^2 \right)} \lambda^{n/2 + a - 1}$$

$$\lambda | \mu, \mathbf{x} \sim \text{Gamma} \left( \frac{n}{2} + a, b + \frac{1}{2} \sum (x_i - \mu)^2 \right) \quad (3.5)$$

위 조건부분포를 이용한 깃스 알고리즘은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(0단계)

초기분포  $N(\mu, \sigma^2)$ 와  $\text{Gamma}(a, b)$ 의 분포에서 데이터를 각각 랜덤하게 발생시켜 초기값  $(\mu^{(0)}, \lambda^{(0)})$ ,  $(a^{(0)}, b^{(0)})$ 를 정한다.

(1-1단계)

$\lambda = \lambda^{(0)}$ 로 고정시켰을 경우에  $\mu$ 의 조건부 분포 (3.4)에 대입하여 생성된 랜덤포본 하나를  $\mu^{(1)}$ 이라 한다. 즉

$$\mu^{(1)} \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

위와 동일한 방법에 의해 다음(1-2단계)을 얻는다.

(1-2단계)

$$\lambda^{(1)} \sim \text{Gamma} \left( n/2 + a^{(0)}, b^{(0)} + \frac{1}{2} \sum (x_i - \mu^{(1)})^2 \right)$$

(2단계)

(1-1단계), (1-2단계)로부터 고정시킨  $\mu, \lambda$ 의 값을 가장 최근에 생성된 랜덤포본의 값으로 대체하면서 (1-1단계), (1-2단계)를 충분히 큰수 (본 논문에서는 50번) 만큼 반복 수행한다. 이렇게 하여 얻은 최종 랜덤포본을  $(\mu_1^{(50)}, \lambda_1^{(50)})$ 이라 한다.

(3단계)

(1단계)와 (2단계)를 다시 (2000-1)번 반복 수행하면 총 2000개의 랜덤포본  $(\mu_1^{(50)}, \lambda_1^{(50)}), (\mu_2^{(50)}, \lambda_2^{(50)}), \dots, (\mu_{2000}^{(50)}, \lambda_{2000}^{(50)})$ 이 얻어진다.

(4단계)

최종적인 결과에 의해  $\mu$ 와  $\lambda$ 의 추정은 다음과 같다.

$$\hat{E}(\mu) = \frac{1}{2000} \sum_{k=1}^{2000} \mu_k^{(50)}, \quad \hat{E}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = \hat{E}(\lambda) = \frac{1}{2000} \sum_{k=1}^{2000} \lambda_k^{(50)} \quad (3.6)$$

이상의 깃스 알고리즘을 이용하여 다음과 같은 공정능력지수를 제시한다.

$$\hat{C}_{Gp} = \frac{d}{3\sqrt{\hat{E}(\sigma^2)}} \quad (3.7-1)$$

$$\hat{C}_{Gpk} = (1 - \hat{k}) \hat{C}_{Gp} \quad (3.7-2)$$

$$\hat{C}_{Gpm} = \frac{d}{3\hat{\tau}} \quad (3.7-3)$$

단,  $\hat{k} = 2 | m - \hat{E}(\mu) | / (USL - LSL)$ ,  $m = (USL + LSL)/2$ ,

$$d = (USL - LSL)/2, \quad \hat{\tau}^2 = \hat{E}(\sigma^2) + (\hat{E}(\mu) - T)^2$$

#### 4. 모의실험 결과

공정능력지수 추정량의 성질에 관한 모의실험을 위해 다음을 가정한다. 먼저 제품특성치의 분포는 상태변화에 따른 추정량의 성질을 알아보기 위하여 정규분포로 하며, 제품특성치의 평균과 분산은  $\mu = 50$ ,  $\sigma^2 = 2^2$ 로 하고, 규격상한, 규격하한 및 목표치는 각각  $USL = 61, LSL = 40, T = 49$ 로 한다. 이 경우 공정능력지수의 참값은  $C_p = 1.75, C_{pk} = 1.667, C_{pm} = 1.565$ 가 된다.

이 모의실험은 앞에서 가정한 공정조건에서 IMSL RNNOR을 사용하여  $n = 30, n = 60, n = 180$ 의 데이터를 생성하여, 표본이 증가함에 따른 추정량의 성질을 살펴본다. 깃스추출법을 이용하기 위하여 초기분포는  $N(50, 0.3)$ 와  $Gamma(50, 0.1)$ 을 사용하고, 사전분포는 각각  $\mu_0 = 0, \sigma_0^2 = 1$ 인 정규분포와  $\mu_0 = 45.5, \sigma_0^2 = 1.5^2$ 인 정규분포로 가정한다. 깃스 알고리즘의 (3.5), (3.6)식을 계산하기 위해 FORTRAN IMSL<sup>1)</sup>를 2000번 적용에 50번을 반복한다. 이로부터 평균과 표준편차의 추정값은 다음 <표 1>과 같이 얻게 된다.

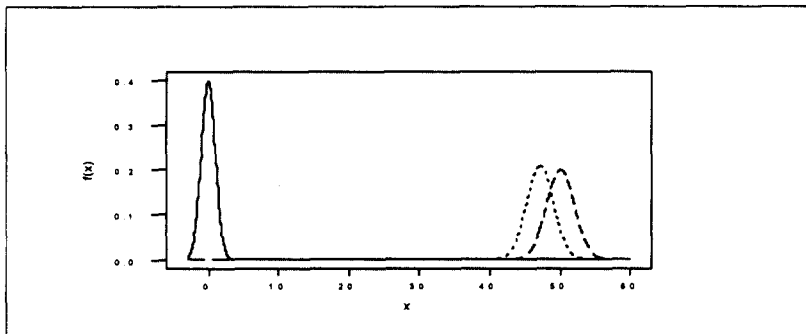
1) MS-FORTRAN IMSL (INTERNATIONAL MATHEMATICAL AND STATISTICAL LIBRARY (PC 버전 4.0))

< 표 1 > 깃스추출방법과 일반적인 방법에 의한 추정값 비교

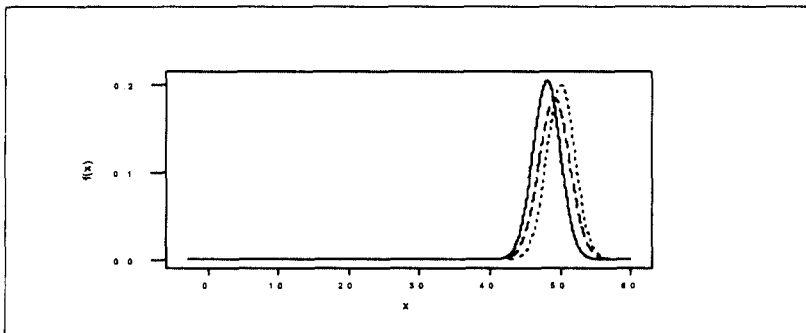
표본의 수( $n$ )	$\hat{\mu}_{GB}$	$\hat{\mu}_{GA}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}_{GA}$	$\hat{\sigma}_{GB}$	$\hat{\sigma}$
30	49.10	50.97	49.87	2.17	2.10	2.30
60	49.23	50.27	50.02	2.08	2.07	2.12
180	49.64	50.10	50.11	1.96	1.97	2.05

위 <표 1>에서  $\hat{\mu}_{GA}, \hat{\sigma}_{GA}$ 와  $\hat{\mu}_{GB}, \hat{\sigma}_{GB}$ 는 각각 사전분포가  $\mu_0=0, \sigma_0^2=1$ 인 정규 분포로부터의 깃스 추정값과  $\mu_0=45.5, \sigma_0^2=1.5^2$ 인 정규분포로부터의 깃스 추정 값을 의미한다.

여기서 일반적인 방법이란  $\mu$ 와  $\sigma$ 의 추정으로  $\hat{\mu} = \sum x_i / n$ 과  $\hat{\sigma} = (\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1))^{1/2}$ 을 의미한다.

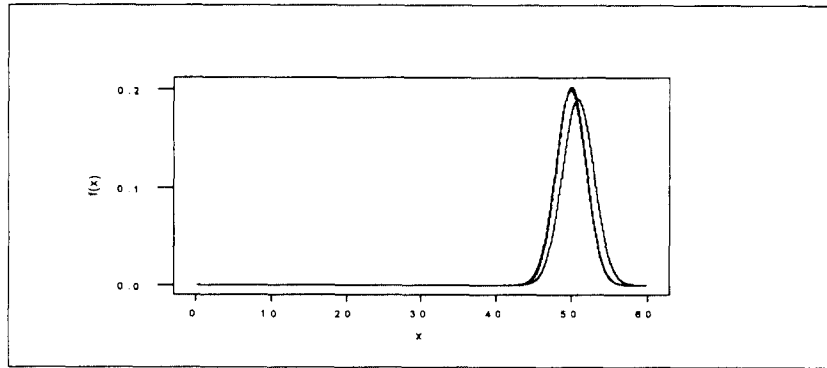


< 그림 1 > 사전분포(—)  $N(0,1^2)$ 와 사후분포(.....), 가정된 분포(-- --)  $N(50,2^2)$



< 그림 2 > 사전분포(—)  $N(45.5,1.5^2)$ 와 사후분포(.....), 가정된 분포(-- --)  $N(50,2^2)$





< 그림 3 > 사전분포가  $N(45.5, 1.5^2)$ 인 경우  $n$ 에 따른 사후분포 비교  
 $n$ 이 30일 경우(---)와  $n$ 이 180일 경우(—), 가정된 분포(....)  $N(50, 2^2)$

한편  $n=180$ 일 경우에 사전분포에 따른 사후분포의 형태는 위의 <그림 1>, <그림 2>에서 보여주고 있다. 이 그림에서는 사전분포가 사후분포에 보다 가까운 사전분포를 알고 있을 때가 더 효율적임을 시사하고 있다. 이 결과를 이용하여  $n=30$ 일 때 다음과 같은 공정능력지수를 추정할 수 있다.

$$\hat{C}_{GpA} = \frac{USL - LSL}{6 \hat{\sigma}_{GA}} = \frac{61 - 40}{6 \times 2.17} = 1.61$$

$$\hat{C}_{GpkA} = (1 - \hat{k}) \hat{C}_{GpA} = \left(1 - \frac{|49.10 - 50.50|}{10.50}\right) \times 1.61 = 1.40$$

$$\hat{C}_{GpmA} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\hat{\sigma}_{GA}^2 + (\hat{\mu}_{GA} - T)^2}} = \frac{61 - 40}{6\sqrt{(2.17)^2 + (49.10 - 49)^2}} = 1.60$$

같은 방법으로  $n=60, 180$ 일 때도 계산되며, 이로부터 다음 <표 2>와 같은 추정값들을 얻게 된다.

< 표 2 > 깃스추출방법과 일반적인 방법에 의한 공정능력지수의 추정값

표본의 수 ( $n$ )	$\hat{C}_{GpA}$	$\hat{C}_{GpB}$	$\hat{C}_p$	$\hat{C}_{GpkA}$	$\hat{C}_{GpkB}$	$\hat{C}_{pk}$	$\hat{C}_{GpmA}$	$\hat{C}_{GpmB}$	$\hat{C}_{pm}$
30	1.61	1.67	1.36	1.40	1.53	1.27	1.60	1.48	1.42
60	1.68	1.69	1.56	1.48	1.64	1.49	1.65	1.49	1.48
180	1.72	1.75	1.71	1.64	1.69	1.65	1.70	1.65	1.60

<표 1>, <표 2>와 <그림 3>에서 알 수 있듯이 편의와 표준편차는 표본의 크기가 증가할수록 작아지고 있다. 즉 깁스추정값과 기존의 일반적인 방법에 의한 추정값이 거의 유사해 감을 볼 수 있다.

## 5. 결론

본 논문은 공정능력지수가 평균의 모수와 표준편차의 모수를, 일반적인 추정방법과 마코브체인 몬테칼로(Markov Chain Monte Carlo; MCMC)기법중 깁스추출법을 통해 분산과 표준편차를 추정하여 구한 지수들을 비교하였다. 앞 절에서 공정의 안정상태에서 공정능력지수에 대한 모수들은 표본이 증가할수록 편의는 작아짐을 알 수 있다. 또, 공정으로부터 제품특성치의 평균과 산포에 대한 사전정보를 아는 경우, 공정능력지수에 대한 베이지안 추정이 더 효율적임을 알 수 있다. 따라서 생산현장에서 공정에 대한 분석에 있어서는 어느 정도의 사전정보를 알고 있는 경우, 깁스 추출법을 이용한 공정능력의 분석은 중요하다 할 수 있다.

끝으로 본 논문에서 제시한 내용을 바탕으로 공정능력지수  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$ 의 여러 지수들에 대한 깁스추출법에 의한 베이지안 연구와  $\hat{C}_{Gp}$ ,  $\hat{C}_{Gpk}$ ,  $\hat{C}_{Gpm}$ 에 대한 극한 분포이론 및 응용에 관한 연구가 기대된다.

## 참고문헌

- [1] 김평구, 조중재(1995), "공정능력지수에 대한 붓스트랩과 모의실험연구," 「품질경영학회지」, 제23권, 제4호, pp. 157-166.
- [2] Carlin, B.P., Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.(1992), "Hierarchical Bayesian analysis of change point problems," *Applied Statistics*, 41, pp. 389-405.
- [3] Carter, C. and Kohn, R.(1994), "On Gibbs sampling for state space models," *Biometrika*, 81, pp. 541-553.
- [4] Casella, G. and George, E.(1992), "Explaining the Gibbs sampler," *the American Statistician*., 46, pp. 167-174.
- [5] Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.(1988), "A New Measure of Process Capability: Cpm," *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, pp. 162-175.
- [6] Chan, L.K., Xiong, Z. and Zhang, D.(1990), "On the Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 19(1), pp. 11-18.
- [7] Escobar, M.D. and West, M.(1994), "Bayesian density estimation and inference using mixtures," *Journal of the American Statistical Association*, (to appear).

- [ 8 ] Gelfand, A.E., Hills, S., Racine-Poon, A. and Smith, A.F.M.(1990), "Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling," *Journal of the American Statistical Association*, 85, pp. 972-985.
- [ 9 ] Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.(1990), "Sampling based approaches to calculating marginal densities," *Journal of the American Statistical Association*, 85, pp. 398-409.
- [10] Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.(1991), "Gibbs sampling for marginal posterior expectations," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 20 (5 and 6), pp. 747-766.
- [11] Gelman, A. and Rubin, D.B.(1992), "Inference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion)," *Statistical Science*, 7, pp. 457-511.
- [12] Kane, V.E.(1986), "Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 41-52.
- [13] Smith, A.F.M. and Roberts, G.O.(1993), "Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov Chain Monte Carlo methods," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 55, pp. 3-23.
- [14] Tanner, M.A. and Wong, W.H.(1987), "The calculation of posterior distributions by data augmentation," *Journal of the American Statistical Association*, 82, pp. 528-540.