응용통계연구 제 11권 2호, 1998년, pp. 303-315

실험불가능한 처리조합이 배제되는 3^{n-p} 일부실시법

최병철[1)] 최승현[2)]

요 약

요인실험에서 어떤 처리조합은 조작상 또는 경제적인 이유로 실험할 수 없는 경우가 있다. 이러한 실험불가능한 처리조합을 포함하고 있는 일부실시법은 불균형적인 처리조합을 구성하게 되어 어떤 요인효과에 대해 추론할 수 없게 된다. 본 논문은 실험불가능한 처리조합을 포함하지 않는 3^{n-p} 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 논한다.

1. 서론

요인실험에서 인자의 수 또는 인자의 수준수가 늘어나면 실험횟수가 급속하게 불어나게 되어 동일한 조건에서 모든 실험을 하기가 곤란해진다. 이런 경우 실험횟수를 적게 하면서 원하는 일부 요인효과에 대해 추론할 수 있는 일부실시법이 효과적이다. 일부실시법에서는 정의대비를 사용하여 모든 처리조합들을 실험의 크기가 같은 몇 개의 블럭으로 나눈 후 그중 한 블럭을 선택하여 그 블럭내의 모든 처리조합에서 실험한다. 이때, 원하는 요인효과를 추론할 수 있는 특정한 블럭을 생성시키기 위해서는 적절한 정의대비를 선택해야 한다. Greenfield(1976)는 2수준계 요인실험에서 최소의 실험횟수로 원하는 요인효과를 추론할 수 있는 2^{n-p} 일부실시법을 위한 정의대비를 찾는 방법을 제안하였다. 또 Franklin과 Bailey(1977)는 Greenfield의 정의대비 탐색방법을 수정하여 이에 대한 표준절차를 제안하였다.

요인실험에서는 몇 가지 원인으로 실험할 수 없는 처리조합들이 포함될 수 있다. 즉, 조작상 실험할 수 없는 처리조합, 조작상 실험할 수는 있으나 경제적으로 많은 비용이 드는 처리조합 등이다. Cheng과 Li(1993)는 2수준계 요인실험에서 이러한 실험불가능한 처리조합(debarred combination)을 배제하면서 원하는 요인효과들을 추론할 수 있는 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제안하였다.

본 논문에서는 Cheng과 Li(1993)의 방법을 3수준계 요인실험으로 확장하여 한 개의 실험불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법에 대하여 논한다. 먼저, 3^{n-1} 일부실시법과 3^{n-2} 일부실시법에서 정의대비의 선택방법을 논한 후 3^{n-p} 일부실시법으로 일반화한다.

1) (561-756) 전북 전주시 덕진구 덕진동 1가 664-14, 전북대학교 통계학과, 교수
2) (561-756) 전북 전주시 덕진구 덕진동 1가 664-14, 전북대학교 전산통계학과, 박사과정

2. 개념과 정의

주어진 요인효과들의 집합에서 어떤 요인효과도 다른 요인효과들의 곱으로 표현되지 않는다면, 그러한 요인효과들의 집합은 독립(independent)이라고 한다. 예를 들어, 3^n 요인실험에서 요인효과들의 집합 $\{AB^2C, ABD, A^2CD\}$는 $AB^2C \times ABD = A^2CD$이므로 독립이 아니다. 3^n 요인실험에서는 임의의 인자 F_i에 대해 $F_i^3 = 1$로 간주하고, 임의의 요인효과 X에 대해 $X^2 = X$로 간주한다. 모든 처리조합을 $3^p(p < n)$개의 블럭으로 나누어 배치하고자 한다면 서로 독립인 p개의 요인효과들을 블럭과 교락(confounding)시켜야 한다. 일반적으로 $D_1, \cdots, D_p$가 블럭과 교락되는 독립인 요인효과들이라 할 때, 이 요인효과들과 그들의 모든 일반화곱(generalized interactions)을 정의대비(defining contrasts)라 부르며 이런 정의관계(defining relation)를 다음과 같이 나타낸다.

$$I = D_1 = D_2 = \cdots = D_p = (D_i\text{들의 모든 일반화곱}).$$

본 논문에서는 앞으로 인자가 $F_1, F_2, \cdots, F_n$인 3^n 요인실험에서 인자의 세 수준을 0, 1, 2로 나타내고, 인자 F_1의 수준 α_1, 인자 F_2의 수준 α_2 등에서의 처리조합을 Cheng과 Li(1993)의 표기대로 $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i = 0, 1, 2,\ i = 1, 2, \cdots, n$으로 나타내기로 한다. 또 3^n 요인실험에서 k개의 인자 $F_1, \cdots, F_k$의 처리조합중

$$f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}, \quad (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k) : \text{고정된 하나의 수준} \tag{2.1}$$

을 실험불가능한 처리조합(debarred combination)이라고 가정한다. 그러면, 이러한 실험불가능한 처리조합은 3^n개의 처리조합중 3^{n-k}개 있으며, 이를

$$f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_j = 0, 1, 2,\ j = k+1, \cdots, n \tag{2.2}$$

으로 나타내자. 예들 들어, 인자가 A, B, C, D, E인 3^{5-3} 일부실시법에서 실험불가능한 처리조합이 $a^1b^0c^2$일 때, 정의대비 AB, BC와 ABC를 사용하여 모든 처리조합을 27개의 블럭으로 나눈다면, 다음과 같이 모든 블럭에 3^{5-3}개의 실험불가능한 처리조합들이 포함될 수 있다.

$$\begin{array}{ccc}
a^1b^0c^2\underline{d^0e^0} & a^1b^0c^2\underline{d^1e^0} & a^1b^0c^2\underline{d^2e^0} \\
a^1b^0c^2\underline{d^0e^1} & a^1b^0c^2\underline{d^1e^1} & a^1b^0c^2\underline{d^2e^1} \\
a^1b^0c^2\underline{d^0e^2} & a^1b^0c^2\underline{d^1e^2} & a^1b^0c^2\underline{d^2e^2}
\end{array}$$

3^{n-p} 일부실시법을 위해 3^p개의 블럭중 하나를 선택하였을 때 그 블럭내에 실험불가능한 처리조합이 포함되어 있다면, 불균형적인 처리조합을 구성하게 되어 어떤 요인효과에 대해 추론할 수 없게 된다. 최악의 경우 그 블럭내의 모든 처리조합이 실험불가능한 처리조합으로 구성되어 실험 자체를 할 수 없을 수도 있을 것이다. 이런 점을 해결하기 위해서는 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭이 생성되도록 정의대비들을 적절히 선택해야 한다. 서로 독립인 p개의 정의대비들의 집합이 어떤 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭을 적어도 하나 생성한다면, 이러한 정의대비들의 집합은 수용 가능(acceptable)하다고 한다. 또,

어떤 요인효과 X에 나타나는 인자들의 집합이 실험불가능한 처리조합 $f_1^{\gamma_1}\cdots f_k^{\gamma_k}$에 나타나는 인자들의 집합 $F_1,\cdots,F_k$의 부분집합이면, $f_1^{\gamma_1}\cdots f_k^{\gamma_k}$ 과 X는 양립한다(compatible)고 한다. 앞의 예에서, 실험불가능한 처리조합 $a^1b^0c^2$은 요인효과 AB^2이나 ABC와는 양립하지만 $ACDE$와는 양립하지 않는다. 이와 같은 정의대비의 수용 가능성과 양립성은 본 논문에서 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭을 생성시키기 위한 중요한 기준이 된다.

3. 3^{n-1} 일부실시법의 경우

인자들이 $F_1,F_2,\cdots,F_n$인 3^{n-1} 일부실시법을 위해서는 정의대비가 한 개 필요하다. 그 정의대비와 선형표현식이 각각 다음과 같다고 하자.

$$\begin{aligned} I &= F_{i_1}^{\beta_1}\cdots F_{i_l}^{\beta_l}, \\ L &= \beta_1 x_{i_1}+\beta_2 x_{i_2}+\cdots\cdots+\beta_l x_{i_l} \pmod 3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

단, $1\le i_1<\cdots<i_l\le n$, $l\le n$이고, x_{i_j} 와 β_j는 각각 정의대비의 j번째 인자의 수준과 j번째 인자에 나타나는 지수이다. 3^n개의 처리조합을 선형표현식의 값에 따라 3개의 블럭으로 나누고 그중 한 블럭을 선택하여 블럭내의 모든 처리조합에서 실험하면 3^{n-1} 일부실시법이 된다. 이와 같은 부분실험의 경우 실험불가능한 처리조합이 블럭내에 포함될 수 있다. 우리는 이런 처리조합이 포함되지 않는 블럭이 적어도 하나 생성되도록 정의대비를 선택하고자 한다. 3^{n-1} 일부실시법에서 실험불가능한 처리조합을 식 (2.1)의 $f_1^{\gamma_1}\cdots f_k^{\gamma_k}$이라고 하자. 그러면, 식 (2.2)처럼 3^n개의 모든 처리조합중 3^{n-k}개의 실험불가능한 처리조합이 생긴다. 이 처리조합들이 어떤 블럭에 나타나는지 알아보기 위해서 이를 두 부분으로 분리하여 고려하자. 이들 두 부분은 각각 하나의 고정된 수준 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$에서의 처리조합인 $f_1^{\gamma_1}\cdots f_k^{\gamma_k}$와 3^{n-k}개의 수준 $(\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\cdots,\alpha_n)$에서의 처리조합인 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}$이다. 또한, 정의대비 (3.1)에 나타나는 요인효과도 $f_1^{\gamma_1}\cdots f_k^{\gamma_k}$에 나타나는 $m(<k)$개 인자들의 요인효과와 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}$에 나타나는 $l-m(<n-k)$개 인자들의 요인효과로 분리하여 표현하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= {F_{u_1}}^{\beta_{u_1}}\cdots {F_{u_m}}^{\beta_{u_m}}, \\ V &= {F_{v_1}}^{\beta_{v_1}}\cdots {F_{v_{l-m}}}^{\beta_{v_{l-m}}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

단, 모든 i,j에 대하여 $u_i\ne v_j$이다.

이제, 선형표현식 (3.1)를 식 (3.2)의 U와 V에 관련된 두 부분으로 분리하면

$$L=\sum_{j=1}^{m}\beta_{u_j}x_{u_j}+\sum_{j=1}^{l-m}\beta_{v_j}x_{v_j} \pmod 3$$

이 된다. 그러면, 식 (2.2)의 실험불가능한 처리조합중 $f_1^{\gamma_1}\cdots f_k^{\gamma_k}$부분은 선형표현식 L에서 하나의 고정된 상수값 $c=\sum_{j=1}^{m}\beta_{u_j}\alpha_{u_j}$를 가지며, $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}$부분은 선형표현식 L에서

$\sum_{j=1}^{l-m} \beta_{v_j}\alpha_{v_j}$의 값을 갖는다. 따라서, 실험불가능한 처리조합의 선형표현식의 값은

$$L = c + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_{v_j}\alpha_{v_j} \pmod 3 \tag{3.3}$$

과 같이 $\sum_{j=1}^{l-m} \beta_{v_j}\alpha_{v_j}$에 의해 결정되며 그 값이 (0, 1 또는 2)에 따라 해당하는 블럭은 실험불가능한 처리조합을 포함하게 된다.

예제 3.1: 인자들이 A, B, C, D인 3^{4-1} 일부실시법을 위해 정의대비 $I = ABC^2D^2$이 이용될 때, 실험불가능한 처리조합을 ab^2c^2이라고 하자. 선택된 정의대비를 실험불가능한 처리조합과 양립하는 부분과 그렇지 않은 부분으로 분리하면 각각 $U = ABC^2$과 $V = D^2$이 된다. 선형표현식은 $L = (x_1 + x_2 + 2x_3) + (2x_4) \pmod 3$이 되며, 이때 $x_1 + x_2 + 2x_3 \pmod 3$은 상수 1이다. 그러면, 실험불가능한 처리조합 $ab^2c^2d^\alpha(\alpha = 0, 1, 2)$은 인자 D의 수준 α에 따라 $L = (1) + (2\alpha) = 0$, 1 그리고 2의 값을 갖는다. 따라서, 실험불가능한 처리조합이 3개의 블럭에 모두 나타난다.

이와 같이, 주어진 정의대비를 실험불가능한 처리조합과 양립하는 부분과 그렇지 않은 부분으로 분리함으로써 어떤 블럭에 실험불가능한 처리조합이 포함되는지를 쉽게 알 수 있다. 실험불가능한 처리조합이 있을 경우, 부분실험을 하기 위해서는 생성된 블럭중에 이런 처리조합이 배제된 블럭이 한 개 이상 존재해야 한다. 정의대비의 선택에 따라 실험불가능한 처리조합이 포함되지 않는 블럭이 한 개 이상 생성되기도 하고, 그렇지 않기도 한다. 다음 정리 3.1은 3^n 요인실험의 3^{n-1} 일부실시법에서, 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭을 적어도 하나 생성하기 위한 정의대비의 선택방법에 관한 것이다.

정리 3.1 3^{n-1} 일부실시법에서 주어진 정의대비와 실험불가능한 처리조합이 양립한다면 그 정의대비는 수용 가능하다.

증명: 실험불가능한 처리조합을 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$이라고 하자. 첫째, 주어진 정의대비가 실험불가능한 처리조합과 양립한다면, 식 (2.2)의 처리조합 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$은 선형표현식의 값이 상수 $c = \sum_{j=1}^{m} \beta_{u_j}\alpha_{u_j} \pmod 3$에 의해서 정해지기 때문에 모두 하나의 블럭에 속한다. 그러므로, 주어진 정의대비는 수용 가능하다. 둘째, 주어진 정의대비가 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는다고 하자. 그러면, 정의대비를 식 (3.2)처럼 분리했을 때 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$과 관련된 한 개 이상의 인자들이 요인효과 V에 나타난다. 그런데, 선형표현식 L의 값은 식 (3.3)에 의해 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$부분에 대한 값 $\sum_{j=1}^{l-m} \beta_{v_j}\alpha_{v_j}$에 의해 결정되므로, 인자들이 $F_{k+1}, \cdots, F_n$인 3^{n-k} 요인실험에서 모든 처리조합 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$을 정의대비 V에 의하여 3개의 블럭으로 나누는 것과 같다. 그러므로, 선형표현식 L이 0, 1, 2의 값을 모두 갖게 되므로 실험불가능한 처리조합이 모든 블럭에 나타나서 주어진 정의대비는 수용 불가능하다. □

예제 3.2: 인자들이 A, B, C, D인 3^{4-1} 일부실시법에서, 실험불가능한 처리조합이 abc^2이라고 하자. 정의대비를 AB^2이나 AB^2C를 사용한다면 이 두 정의대비는 모두 실험불가능

한 처리조합과 양립하기 때문에 수용 가능하다. 따라서, 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭이 생성된다. 그러나, 정의대비 ABD^2은 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않기 때문에 수용 가능하지 않다. 이를 확인하기 위하여 주어진 정의대비를 각각의 선형표현식으로 나타내면

$$L_1 = (x_1 + 2x_2) \pmod 3,$$
$$L_2 = (x_1 + 2x_2 + x_3) \pmod 3,$$
$$L_3 = (x_1 + x_2) + (2x_4) \pmod 3$$

이 되며, 실험불가능한 처리조합 $abc^2d^\alpha(\alpha = 0, 1, 2)$의 선형표현식의 값을 구하면 각각

$$L_1 = \{(1 \times 1) + (2 \times 1)\} = 0,$$
$$L_2 = \{(1 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times 2)\} = 2,$$
$$L_3 = \{(1 \times 1) + (1 \times 1)\} + (2 \times \alpha) = 2(1 + \alpha)$$

로, L_3은 0, 1, 2의 모든 값을 갖는다. 따라서, 정의대비 $I = AB^2$ 또는 $I = AB^2C$를 사용했을 때는 선형표현식의 값이 각각 0 또는 2인 블럭에만 실험불가능한 처리조합이 나타나지만, 정의대비 $I = ABD^2$을 사용했을 때는 실험불가능한 처리조합이 모든 블럭에 나타난다.

4. 3^{n-2} 일부실시법의 경우

인자들이 $F_1, F_2, \cdots, F_n$인 3^n 요인실험의 3^{n-2} 일부실시법을 위해 필요한 두 정의대비와 선형표현식이 각각 다음과 같다고 하자.

$$I = F_{i_{11}}^{\beta_{11}} \cdots F_{i_{1l_1}}^{\beta_{1l_1}} = F_{i_{21}}^{\beta_{21}} \cdots F_{i_{2l_2}}^{\beta_{2l_2}},$$
$$L_1 = \beta_{11}x_{i_{11}} + \beta_{12}x_{i_{12}} + \cdots\cdots + \beta_{1l_1}x_{i_{1l_1}} \pmod 3,$$
$$L_2 = \beta_{21}x_{i_{21}} + \beta_{22}x_{i_{22}} + \cdots\cdots + \beta_{2l_2}x_{i_{2l_2}} \pmod 3.$$

여기서, $1 \le i_{11} < \cdots < i_{1l_1} \le n,\ \ 1 \le i_{21} < \cdots < i_{2l_2} \le n,\ \ l_1 < n, l_2 < n$이고, $x_{i_{1j}}$와 $x_{i_{2j}}$는 두 정의대비의 j번째 인자의 수준이며, β_{1j}와 β_{2j}는 두 정의대비의 j번째 인자에 나타나는 지수이다. 두 정의대비에 의해 3^n개의 모든 처리조합을 3^2개의 블럭으로 나누고 그중 한 블럭을 선택하여 그 블럭내의 모든 처리조합에서 실험하면 3^{n-2} 일부실시법이 된다.

3^{n-2} 일부실시법에서도 실험불가능한 처리조합을 식 (2.1)처럼 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$이라고 하자. 3절과 마찬가지로, 식 (2.2)의 실험불가능한 처리조합 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$을 두 부분으로 분리하자. 즉, 하나의 고정된 처리조합인 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$와 3^{n-k}개의 처리조합인 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$이다. 주어진 두 정의대비도 처리조합 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$과 각각 양립하는 부분인 $m_1(< k), m_2(< k)$개 인자들의 요인효과들 U_1, U_2와, 그렇지 않은 부분인 $l_1 - m_1(< n - k)$, $l_2 - m_2(< n - k)$개 인자들의 각 요인효과들 V_1, V_2로 분리하여 표현하면 각각 다음과 같다.

$$U_1 = F_{u_{11}}^{\beta_{u_{11}}} \cdots F_{u_{1m_1}}^{\beta_{u_{1m_1}}}, \quad V_1 = F_{v_{11}}^{\beta_{v_{11}}} \cdots F_{v_{1(l_1-m_1)}}^{\beta_{v_{1(l_1-m_1)}}},$$
$$U_2 = F_{u_{21}}^{\beta_{u_{21}}} \cdots F_{u_{2m_2}}^{\beta_{u_{2m_2}}}, \quad V_2 = F_{v_{21}}^{\beta_{v_{21}}} \cdots F_{v_{2(l_2-m_2)}}^{\beta_{v_{2(l_2-m_2)}}}. \tag{4.1}$$

단, 모든 i_1, j_1, i_2, j_2에 대하여 $u_{1i_1} \neq v_{1j_1}, u_{2i_2} \neq v_{2j_2}$이다. 또한, 두 선형표현식도 각각 U_1과 V_1 그리고 U_2와 V_2에 관련된 두 부분으로 분리하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L_1 = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{u_{1j}} x_{u_{1j}} + \sum_{j=1}^{l_1-m_1} \beta_{v_{1j}} x_{v_{1j}} \pmod 3,$$
$$L_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{u_{2j}} x_{u_{2j}} + \sum_{j=1}^{l_2-m_2} \beta_{v_{2j}} x_{v_{2j}} \pmod 3.$$

그러면, 식 (2.2)의 실험불가능한 처리조합에서 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$ 부분은 두 선형표현식에서 각각 하나의 고정된 상수값 $c_1 = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{u_{1j}} \alpha_{u_{1j}}$과 $c_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{u_{2j}} \alpha_{u_{2j}}$를 가지며, $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$ 부분은 각각 $\sum_{j=1}^{l_1-m_1} \beta_{v_{1j}} \alpha_{v_{1j}}$과 $\sum_{j=1}^{l_2-m_2} \beta_{v_{2j}} \alpha_{v_{2j}}$의 값을 갖는다. 이것을 다시 쓰면

$$L_1 = c_1 + \sum_{j=1}^{l_1-m_1} \beta_{v_{1j}} \alpha_{v_{1j}} \pmod 3,$$
$$L_2 = c_2 + \sum_{j=1}^{l_2-m_2} \beta_{v_{2j}} \alpha_{v_{2j}} \pmod 3 \tag{4.2}$$

과 같고, 두 선형표현식값의 순서쌍 (L_1, L_2)로 나타나는 블럭이 실험불가능한 처리조합을 포함하게 된다. 3^{n-1} 일부실시법에서는 선택한 정의대비가 실험불가능한 처리조합과 양립해야만 그 처리조합을 포함하지 않는 블럭이 생성될 수 있지만, 3^{n-2} 일부실시법에서는 선택한 두 정의대비가 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않아도 다음 정리 4.1에 따라 몇 가지 조건에 따라 실험불가능한 처리조합을 포함하지 않는 블럭이 생성될 수 있다.

정리 4.1 3^{n-2} 일부실시법에서 서로 독립인 두 정의대비가 수용 가능할 조건은
(1) 두 정의대비중 적어도 하나가 실험불가능한 처리조합과 양립하거나,
(2) 각각의 정의대비에서 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는 부분인 두 요인효과 V_1과 V_2에 대하여 ① $V_1 = V_2$이거나 ② $V_1 = V_2^2$이다.

증명: 실험불가능한 처리조합이 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$이라고 하자. 첫째, 두 정의대비가 모두 실험불가능한 처리조합과 양립한다고 하자. 그러면, 식 (2.2)의 실험불가능한 처리조합 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$ $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$은 상수인 두 선형표현식의 값 $L_1 = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{u_{1j}} \alpha_{u_{1j}} \pmod 3$과 $L_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{u_{2j}} \alpha_{u_{2j}}$ (mod 3)의 하나의 순서쌍에 의해서만 정해지기 때문에 모두 하나의 블럭에 속한다. 그러므로, 주어진 두 정의대비는 수용 가능하다. 둘째, 두 정의대비중 하나만 실험불가능한 처리조합과 양립한다고 하자. 그러면, 이 처리조합과 양립하는 정의대비에 대해서는, 그 선형표현식의 값이 하나의 상수가 된다. 그러나, 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는 정의대비에 대해서는, 선형표현식이 0, 1, 2의 모든 값을 갖는다. 그러므로 실험불가능한 처리조합이 9개의 블럭중 3개의 블럭에만 나타나서 주어진 두 정의대비는 수용 가능하다. 셋째, 두 정의대비가 모두 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는다고 하자. 그러면, 두 정의대비를 식 (4.1)처럼 분리했을 때 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$에 관련된 인자들의 일부가 두 요인효과 V_1과 V_2에

나타난다. 그런데, 두 선형표현식의 값은 식 (4.2)에 따라

$$L_1 = c_1 + \sum_{j=1}^{l_1-m_1} \beta_{v_{1j}}\alpha_{v_{1j}} \pmod 3,$$
$$L_2 = c_2 + \sum_{j=1}^{l_2-m_2} \beta_{v_{2j}}\alpha_{v_{2j}} \pmod 3$$

에 의해 결정되므로, 인자들이 $F_{k+1},\cdots,F_n$인 3^{n-k} 요인실험에서 3^{n-k}개의 처리조합 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}$을 두 정의대비 V_1과 V_2에 의하여 3^2개의 블럭으로 나누는 것과 같다. 그런데, $V_1 = V_2$일 때는 관련된 선형표현식 L_1과 L_2에서 $\sum_{j=1}^{l_1-m_1} \beta_{v_{1j}}\alpha_{v_{1j}}$와 $\sum_{j=1}^{l_2-m_2} \beta_{v_{2j}}\alpha_{v_{2j}}$이 동일한 값 0, 1 그리고 2를 갖기 때문에 3개의 블럭으로 나누는 것이 되고, 또한 $V_1 = V_2^2$일 때에도 $V_2^2 = V_2$로 간주되므로 $V_1 = V_2$일 경우와 같이 처리조합을 3개의 블럭으로 나누는 것이 된다. 그러므로, $V_1 = V_2$이거나 $V_1 = V_2^2$일 때는 실험불가능한 처리조합이 3개의 블럭에 나타나서 두 정의대비가 수용 가능하다. □

예제 4.1: 인자들이 A,B,C,D,E인 3^5 요인실험의 3^{5-2} 일부실시법에서 실험불가능한 처리조합을 abc^2이라 하자. 그러면, 다음과 같이 주어진 정의대비는 모두 수용 가능하다.

① $I = AB^2 = BC^2$,
② $I = AB^2 = CDE$,
③ $I = BDE = AD^2E^2 = AB$.

왜냐하면, 정의대비 ①과 ②는 정리 4.1의 (1)의 조건을 만족시키고, 정의대비 ③은 정리 4.1의 (2)②의 조건을 만족시키기 때문이다.

다음의 보조정리 4.1은 정리 4.1에 의해 자명하다.

보조정리 4.1 서로 독립인 두 정의대비가 실험불가능한 처리조합과 양립하면 수용 가능하다.

이제 수용 가능한 정의대비를 생성하는 방법을 고려해보자. 그림 4.1은 예제 4.1과 같이 인자들이 A,B,C,D,E이고, 실험불가능한 처리조합이 abc^2일 경우 어떤 두 정의대비에서 실험불가능한 처리조합과 양립하는 부분에 V_1과 V_2가 추가될 때 두 정의대비가 수용 가능한지 또는 수용 불가능한지를 보여주고 있다. 두 정의대비의 V_1과 V_2 부분에 나타날 수 있는 요인효과는 $\{I,\ D,\ D^2,\ E,\ DE,\ D^2E,\ E^2,\ DE^2,\ D^2E^2\}$이므로 정리 4.1과 보조정리 4.1을 이용하면 두 정의대비가 수용 가능하기 위해서는 그림 4.1에서 ○로 표시된 V_1과 V_2가 정의대비에 나타나야 한다. ×로 표시된 V_1과 V_2가 정의대비에 나타나면 그 정의대비는 수용 불가능하다.

V_1	V_2								
	I	D	D^2	E	DE	D^2E	E^2	DE^2	D^2E^2
I	○	○	○	○	○	○	○	○	○
D		○	○	×	×	×	×	×	×
D^2			○	×	×	×	×	×	×
E				○	×	×	○	×	×
DE					○	×	×	×	○
D^2E		대칭				○	×	○	×
E^2							○	×	×
DE^2								○	×
D^2E^2									○

그림 4.1: 두 정의대비가 수용 가능하기 위한 V_1과 V_2의 조건

5. 3^{n-p} 일부실시법의 경우

주어진 인자들이 $F_1, F_2, \cdots, F_n$인 3^{n-p} 일부실시법을 위해서는 서로 독립인 p개의 정의대비가 필요하다. 그 정의대비와 해당 선형표현식이 각각 다음과 같다고 하자.

$$\begin{aligned} I &= F_{i_{11}}{}^{\beta_{11}} \cdots F_{i_{1l_1}}{}^{\beta_{1l_1}} = \cdots\cdots = F_{i_{p1}}{}^{\beta_{p1}} \cdots F_{i_{pl_p}}{}^{\beta_{pl_p}}, \\ L_w &= \beta_{w1} x_{i_{w1}} + \beta_{w2} x_{i_{w2}} + \cdots\cdots + \beta_{wl_w} x_{i_{wl_w}} \quad (\text{mod } 3), \\ w &= 1, 2, \cdots, p. \end{aligned}$$

단, $1 \leq i_{w1} < \cdots < i_{wl_w} \leq n$, $l_w \leq n$이고, $x_{i_{wj}}$와 β_{wj}는 각각 w번째 정의대비의 j번째 인자의 수준과 j번째 인자에 나타나는 지수이다. 서로 독립인 p개의 정의대비에 의해 3^n개의 모든 처리조합을 3^p개의 블럭으로 나누고 그중 한 블럭을 선택하여 그 블럭내의 모든 처리조합에서 실험하면 3^{n-p} 일부실시법이 된다.

3^{n-1} 일부실시법과 3^{n-2} 일부실시법처럼, 실험불가능한 처리조합을 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$이라고 하고, 3^{n-k}개의 모든 실험불가능한 처리조합을 식 (2.2)처럼 놓자. 앞 절에서와 같은 방법으로 w번째 정의대비를 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$과 양립하는 부분인 $m_w(\leq k)$개 인자들의 요인효과와 그렇지 않은 부분인 $l_w - m_w(\leq n-k)$개 인자들의 요인효과로 분리하여 표현하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_w &= F_{u_{w1}}{}^{\beta_{u_{w1}}} \cdots F_{u_{wm_w}}{}^{\beta_{u_{wm_w}}}, \\ V_w &= F_{v_{w1}}{}^{\beta_{v_{w1}}} \cdots F_{v_{w(l_w-m_w)}}{}^{\beta_{v_{w(l_w-m_w)}}}, \\ w &= 1, 2, \cdots, p. \end{aligned} \tag{5.1}$$

단, 모든 i_w, j_w에 대하여 $u_{wi_w} \neq v_{wj_w}$이다. 또한, w번째 선형표현식도 U_w와 V_w에 연관된 두

부분으로 나누어 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$L_w = \sum_{j=1}^{m_w} \beta_{u_{wj}} x_{u_{wj}} + \sum_{j=1}^{l_w - m_w} \beta_{v_{wj}} x_{v_{wj}} \pmod 3,$$
$$w = 1, 2, \cdots, p.$$

그러면, 식 (2.2)의 실험불가능한 처리조합은 선형표현식의 값이 앞 절과 같은 방법으로

$$L_w = c_w + \sum_{j=1}^{l_w - m_w} \beta_{v_{wj}} \alpha_{v_{wj}} \pmod 3, \tag{5.2}$$
$$c_w = \sum_{j=1}^{m_w} \beta_{u_{wj}} \alpha_{u_{wj}} \ (\text{상수}),$$
$$w = 1, 2, \cdots, p,$$

와 같고, p개의 선형표현식값의 순서쌍 $(L_1, L_2, \cdots, L_p)$로 나타나는 블럭이 실험불가능한 처리조합을 포함하게 된다. 다음 정리 5.1은 일반적인 3^{n-p} 일부실시법에서, 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭을 적어도 하나 이상 생성하기 위한 정의대비의 선택방법에 관한 것이다.

정리 5.1 3^{n-p} 일부실시법에서 서로 독립인 p개의 정의대비가 수용 가능할 조건은
(1) p개의 정의대비중 적어도 하나가 실험불가능한 처리조합과 양립하거나,
(2) 식 (5.1)의 $V_1, V_2, \cdots, V_p$에 대하여 $V_i = (I, V_1, \cdots, V_{i-1}, V_{i+1}, \cdots, V_p$의 모든 일반화곱중 하나)가 한 개 이상 성립한다.

증명: 실험불가능한 처리조합을 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$이라고 하자. 첫째, 독립인 p개의 정의대비가 모두 실험불가능한 처리조합과 양립한다고 하자. 그러면, 실험불가능한 처리조합 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$은 선형표현식의 값이 상수($p$개)가 되므로 모두 하나의 블럭에 속한다. 그러므로, 주어진 p개의 정의대비는 수용 가능하다. 둘째, p개의 정의대비중 $r(r < p)$개가 실험불가능한 처리조합과 양립한다고 하자. 그러면, 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는 $p-r$개의 정의대비들에 따라서 선형표현식의 값이 결정되므로, 인자들이 $F_{k+1}, \cdots, F_n$인 3^{n-k} 요인실험에서 모든 처리조합 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$을 $p-r$개의 요인효과들에 의해 3^{p-r}개의 블럭으로 나누는 것과 같다. 즉, 실험불가능한 처리조합은 많아야 3^{p-r}개의 블럭에 포함된다. 그러므로 주어진 정의대비는 수용 가능하다. 셋째, 서로 독립인 p개의 정의대비가 모두 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는다고 하자. 그러면, p개의 정의대비들을 식 (5.1)처럼 분리했을 때 처리조합 $f_1^{\gamma_1} \cdots f_k^{\gamma_k}$과 양립하지 않는 p개의 요인효과들 $V_1, V_2, \cdots .V_p$가 존재한다. 그런데, 선형표현식의 값은 식 (5.2)로부터 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$에 대한 값 $\sum_{j=1}^{l_w - m_w} \beta_{v_{wj}} \alpha_{v_{wj}} \pmod 3$에 의해 결정되므로, 인자들이 $F_{k+1}, \cdots, F_n$인 3^{n-k} 요인실험에서 모든 처리조합 $f_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots f_n^{\alpha_n}$을 p개의 정의대비들 $V_1, V_2, \cdots, V_p$에 의해 3^p개의 블럭으로 나누는 것과 같다. 특히, 어떤 $i = 1, 2, \cdots, p$에 대해서, 하나의 요인효과 V_i가 I와 나머지 $p-1$개의 $V_1, \cdots, V_{i-1}, V_{i+1}, \cdots, V_p$의

모든 일반화곱 중의 하나로 표현 가능하다고 하면, 이것은 곧 p개의 $V_1, V_2, \cdots, V_p$가 서로 독립이 아님을 말한다. 만약, 서로 독립이 되는 V_i들의 집합 중에서 최대원소의 개수가 q라면, 실험불가능한 처리조합이 3^{p-q}개의 블럭에 나타나기 때문에 주어진 p개의 정의대비는 수용 가능하다. □

예제 5.1: 인자들이 A, B, C, D, E인 3^{5-3} 일부실시법에서, 실험불가능한 처리조합이 ab^2라면, 다음과 같이 주어진 정의대비는 모두 수용 가능하다.

$$① \ I = AB^2 = ABC = BDE^2,$$
$$② \ I = ABC^2 = ADE = BC^2DE.$$

왜냐하면, 정의대비 ①은 정리 5.1의 (1)의 조건을 만족시키고, 정의대비 ② 는 정리 5.1의 (2)의 조건을 만족시키기 때문이다. 즉, 정의대비 ② 에서 $V_1 = C^2$, $V_2 = DE$ 그리고 $V_3 = C^2DE$이므로 $V_3 = C^2 \times DE = V_1 \times V_2$의 조건을 만족한다. 위와 같이 주어진 정의대비를 이용하여 27개의 블럭을 생성하면 실험불가능한 처리조합이 배제된 블럭이 9개 만들어진다.

이제 수용 가능한 정의대비를 생성하는 방법을 고려해보자. 그림 5.1는 인자들이 A, B, C, D, E이고, 실험불가능한 처리조합이 ab^2일 경우, 어떤 세 정의대비가 수용 가능하기 위한 V_1, V_2, V_3의 조건들이다. 그림의 각 칸은 선택된 V_1과 V_2에 따라 V_3를 어떻게 선택해야 정의대비가 수용 가능한지를 보여주고 있다. 세 정의대비의 V_1, V_2, V_3 부분에 나타날 수 있는 요인효과는 { I, C, C^2, D, CD, C^2D, D^2, CD^2, C^2D^2, E, CE, C^2E, DE, CDE, C^2DE, D^2E, CD^2E, C^2D^2E, E^2, CE^2, C^2E^2, DE^2, CDE^2, C^2DE^2, D^2E^2, CD^2E^2, $C^2D^2E^2$ }이므로 정리 5.1을 이용하면, 그림 5.1에서 ○로 표시된 V_1, V_2에 대해서는 V_3의 선택에 관계없이 정의대비가 수용 가능하게 되고, ⊗로 표시된 V_1, V_2에 대해서는 V_3가 I, V_1, V_2의 모든 일반화곱중 하나가 되어야 정의대비가 수용 가능하게 된다. 이런 조건을 만족시키지 않는 V_3에서는 정의대비가 수용 불가능하다. 예를 들어, 어떤 3개의 정의대비에서 $V_1 = C^2$, $V_2 = D$일 때, V_3가 I, C^2, D의 모든 일반화곱인 C^2, D, C, D^2, C^2D, C^2D^2, CD, CD^2중 하나이면 정의대비는 수용 가능하다. 그러나, V_3가 I, C^2, D의 모든 일반화곱이 아닌 요인효과들 E, C^2E, DE, CE, D^2E, C^2DE, C^2D^2E, CDE, CD^2E중 하나이면 정의대비는 수용 불가능하다.

보조정리 5.1 3^{n-p} 일부실시법에서 서로 독립인 p개의 정의대비와 k개의 인자로된 실험불가능한 처리조합에 대해, $p > n-k$이면 정의대비는 실험불가능한 처리조합과의 양립성에 무관하게 수용 가능하다.

증명: 모든 처리조합들이 배치되는 블럭의 수는 3^p개다. 그러나, 실험불가능한 전체처리조합의 수는 3^{n-k}개다. 그러므로, 3^p개의 블럭중 실험불가능한 처리조합이 배치되지 않는 블럭이 존재한다. □

V_1	V_2											
	I	C	C^2	D	CD	C^2D	D^2	CD^2	C^2D^2	E	$\cdots$	$C^2D^2E^2$
I	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	$\cdots$	○
C		○	○	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	$\cdots$	⊗
C^2			○	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	$\cdots$	⊗
D				○	⊗	⊗	○	⊗	⊗	⊗	$\cdots$	⊗
CD					○	⊗	⊗	⊗	○	⊗	$\cdots$	⊗
C^2D						○	⊗	○	⊗	⊗	$\cdots$	⊗
D^2							○	⊗	⊗	⊗	$\cdots$	⊗
CD^2								○	⊗	⊗	$\cdots$	⊗
C^2D^2				대칭					○	⊗	$\cdots$	⊗
E										○	$\cdots$	⊗
$\vdots$											$\ddots$	$\vdots$
$C^2D^2E^2$												○

그림 5.1: 세 정의대비가 수용 가능하기 위한 V_1, V_2, V_3의 조건

예제 5.2: 인자들이 A, B, C, D, E인 3^{5-2} 일부실시법에서, 실험불가능한 처리조합이 a^1 b^0 c^1 d^2 이라고 하자. 정의대비가 $I = ABE = ADE^2$이면 보조정리 5.1의 조건을 만족하므로 실험불가능한 처리조합이 배제되는 블럭이 생성된다.

6. 결론

본 논문에서는 3수준계 요인실험에서 실험불가능한 처리조합이 한 개 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 블럭을 생성하기 위한 정의대비의 선택방법에 대해서 논했다. 첫째, 3^{n-1} 일부실시법에서, 선택한 정의대비가 수용 가능하기 위해서는 정의대비가 실험불가능한 처리조합과 양립해야 한다. 둘째, 3^{n-2} 일부실시법에서는, 두 정의대비중 적어도 하나가 실험불가능한 처리조합과 양립하거나, 그렇지 않을 경우, 각각의 정의대비에서 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는 부분인 두 요인효과에 대하여 이들이 서로 같거나 어떤 하나가 다른 하나의 제곱이라면, 선택한 정의대비는 수용 가능하다. 결론적으로, 일반적인 3^{n-p} 일부실시법에서는, 선택한 p개의 서로 독립인 정의대비가 수용 가능하기 위해서, p개의 정의대비중 적어도 하나가 실험불가능한 처리조합과 양립하거나, 그렇지 않을 경우, p개의 정의대비에서 실험불가능한 처리조합과 양립하지 않는 부분의 요인효과들만 고려할 때, 이들중 적어도 하나가 다른 요인효과들의 모든 일반화곱 중의 하나가 되어야한다. 앞으로 실험불가능한 처리조합이 2개 이상일 경우 이러한 실험불가능한 처리조합들을 포함하지 않는 3^{n-p} 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법에 대해 연구할 계획이다.

참고문헌

[1] 박성현 (1995). ⟨현대실험계획법⟩. 민영사.

[2] Cheng, C. S., Li, C. C. (1993). Constructing Orthogonal Fractional Factorial Designs When Some Factor-Level Combinations Are Debarred. *Technometrics*. Vol. 35. 277-283.

[3] Franklin, M. F., Bailey, R. A. (1977). Selection of Defining Contrasts and Confounded Effects in Two-level Experiments. *Applied Statistics*. Vol. 26. 321-326.

[4] Greenfield, A. A (1976). Selection of Defining Contrasts in Two-level Experiments. *Applied Statistics*. Vol. 25. 64-67.

[1997년 9월 접수, 1998년 3월 최종수정]

3^{n-p} Fractional Factorial Design Excluded A Debarred Combination

Byoung Chul Choi[1] Seung Hyun Choi[2]

ABSTRACT

In a factorial experiment, certain combinations of factor levels may not be ruled out for operational or economical reason. A fractional factorial design that contains such infeasible combinations, called debarred combinations, becomes too unbalanced to estimate the required effects. This thesis presents a method of selecting defining contrasts for constructing regular 3^{n-p} fractional factorial design which does not contain a debarred combination. Consequently, the construction of the design is accomplished by choosing the defining contrasts so that one of defining contrasts is compatible with a debarred combination.

1) Professor, Department of Statistics, Chonbuk National University, Chonju, Chonbuk, 561-756, Korea
2) Ph. D. Candidate, Department of Computer Science and Statistics, Chonbuk National University, Chonju, Chonbuk, 561-756, Korea