
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 35 卷 第 4 號 1998年 11月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 35, No. 4, November 1998

와도를 기저로 한 초기 순간 출발하는 실린더 주위의 점성유동해석

김광수*, 서정천**

Vorticity Based Analysis of the Viscous Flow around an Impulsively Started Cylinder

by

Kwang-Soo Kim* and Jung-Chun Suh**

요 약

본 논문에서는 비압축성 Newtonian 점성유동에서 초기에 순간 출발하는 2차원 실린더 주위의 유동을 해석하기 위해서, 와도를 기저로 한 수치해석기법을 제안하고 있다. Helmholtz 분리 형태로 표현된 Navier-Stokes 방정식에서 유도되는 와도전달방정식과 압력방정식, 그리고 벡터등식에서 유도되는 속도-와도 관계식을 이 문제의 지배방정식으로 택하고, 경계조건으로는 물체표면에서 와도와 압력의 연성관계와 힘의 평형을 고려한 동적와도경계조건과 동적압력조건이 제시된다. 이 지배방정식과 경계조건을 수치적으로 처리하기 위하여, 와도와 압력이 연성되어 있는 경계조건은 Wu등(1994)이 제안한 대로, 연성관계를 유지한 채로 식을 분리하는 방법을 이용하였고, 와도전달 방정식은 유한체적법으로 계산하였으며, 그 식에 포함된 대류항을 처리하는 방법으로 TVD 방법을 이용하였다. 속도는 Biot-Savart 적분항이 포함된 벡터등식에서 panel 방법으로 구하고, 압력방정식은 형태가 Poisson 방정식이므로 역시 panel 방법을 이용하였다. 계산에 사용된 격자로 정규격자를 이용하고, 결과를 다른 수치적, 해석적 결과와 비교하여 그 타당성을 검증하였다.

Abstract

This paper presents a vorticity-based numerical method for analyzing an incompressible Newtonian viscous flow around an impulsively started cylinder. The Navier-Stokes equations have a natural Helmholtz decomposition. The vorticity transport equation and the pressure equation are derived from this decoupled form. The associated boundary conditions are dynamic for the vorticity and pressure variables representing the coupling relation between

접수일자: 1997년 11월 29일, 재접수일자: 1998년 8월 31일

*학생회원, 서울대학교 조선해양공학과

**정회원, 서울대학교 조선해양공학과

them and the force balance on the wall. The various numerical treatments for solving the governing equations are introduced. According to Wu et al.(1994), the boundary conditions are decoupled, keeping the dynamic relation between vorticity and pressure. The vorticity transport equation is formulated by FVM and TVD(Total Variation Diminishing) scheme is used for the convection term. An integral approach similar to the panel method is used to obtain the velocity field for a given vorticity field and the pressure field, instead of the conventional differential approaches. In the numerical process, the structured grid is generated. The results are compared to existing numerical and analytic results for the validity of the present method.

1. 서론

전산유체역학분야에서, 점성유동의 운동량 보존 식인 Navier-Stokes 방정식을 푸는 방법으로 가장 널리 알려진 것은 속도와 압력변수, 즉 primitive 변수를 이용하는 방법이 있다. 그런데, Wu와 Wu[1], Lighthill[2], Batchelor[3] 등의 오랜 연구에 의하면, 유체와 고체면 사이의 동력학적 관계를 해석하는데 있어서, 이러한 primitive 변수를 쓰는 것보다 와도를 쓰는 것이 더 편리하다고 알려져 있다[4].

와도를 기저로 하는 해석법의 몇 가지 두드러지는 장점은, 와도가 속도의 구배로 표현되므로 한 지점에서뿐만 아니라 인접한 지점에서의 유체 운동에 대한 포괄적인 정보가 와도에 담겨 있고, 유체는 고체와는 달리 전단현상을 이길 수 없는데, 이러한 전단현상의 동력학적 과정이 속도보다 더욱 더 직접적으로 와도에 반영되어 있다는 점이다. 수치적 처리의 관점에서 보자면, 관성좌표계에서의 와도방정식을 풀기 위한 수치처리과정이, 식의 변화가 거의 없이 단지 경계조건을 적절히 조정함으로써, 비관성좌표계에서의 와도방정식에 그대로 적용할 수 있다. 또, 와도는 물체 표면에서 주로 분포하므로 계산영역을 줄일 수 있고, 와도값에 점성계수를 곱하기만 하면 표면의 응력이 쉽게 구해질 수 있으며, Baldwin-Lomax 에서는 난류모델이 와도로 직접 표현되는 경우도 있어 난류점성유동해석에도 유리한 점이 있다.

그러나, '와도는 어떤 경계조건도 존재하지 않는다.' 라는 Gresho[5]의 주장대로, 지금까지 와도에

대한 경계조건은 뚜렷하게 제시된 것은 없다. 실린더 주위의 점성유동을 해석하는 문제에 있어서, 유동장에 물체가 있을 경우 물체의 표면에서 많은 양의 와도가 발생하게 된다. 이러한 점에서, 본 논문에서는 물체의 표면에서 힘의 평형을 고려할 때 와도 플럭스와 접선방향의 압력구배의 연성관계를 보여주는 동적와도경계조건과 동적압력경계조건, 그리고 물체 표면에서의 고착조건을 위 문제의 주요 경계조건으로 제시한다. 지배 방정식으로는, Helmholtz 분리 형태로 표현된 Navier-Stokes 방정식에서 유도되는 와도방정식과 압력방정식, 그리고 벡터등식에서 유도되는 속도-와도 관계식을 사용한다.

본 논문에서는 와도방정식을 유한체적법으로, 압력방정식과 속도-와도 관계식을 적분방정식으로 변환하여 경계적분법(Boundary Integral method)과 혼용하는 방법을 설명한다. 정규격자를 이용하여 실린더 주위의 점성유동해석 결과를 다른 수치적 결과와 해석적 결과와 비교, 고찰하여 와도를 기저로 한 점성유동해석법의 타당성을 검토하고자 한다.

2. 정식화

점성유동해석을 위한 기본 가정으로, 비압축성 Newtonian 동질 유체에 대해, 연속방정식과, 스칼라 포텐셜의 압력항과 벡터 포텐셜의 와도항으로 분리된 Helmholtz 분리 형태의 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rho(f - \mathbf{a}) = \nabla p + \nabla \times \mu \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도, p 는 압력, f 는 물체력 항, \mathbf{a} 는 Lagrangian 가속도, $\boldsymbol{\omega}$ 는 와도, t 는 시간, ρ 는 밀도, ν 는 동점성계수, μ 는 점성계수이다. 식(1)을 다르게 표현한다면,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = f + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \times \nu \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

식(2)에 curl을 취하게 되면 압력항이 소거되고, 물체력에 대해서 $\nabla \times f = 0$ 을 만족한다고 가정하면, 와도변수로 이루어진 와도 방정식이 유도되게 된다. 2차원 유동에서의 보존형태로 표현된 와도 방정식은 다음과 같다. 여기서 ω 는 2차원 유동에서의 와도벡터의 스칼라 성분이다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) = \nu \nabla^2 \omega \quad (3)$$

식(2)에 divergence를 취하고 물체력에 대해서 $\nabla \cdot f = 0$ 을 만족한다고 가정하면, Poisson 방정식 형태의 압력방정식이 유도된다. 2차원 유동에서의 보존형태로 표현된 식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{p}{\rho} \right) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (4)$$

2차원 Laplace 방정식의 기본해(fundamental solution)를 2차원 Green 함수로 정의하면, $G = -\frac{1}{2\pi} \ln r$ 이 되고, 2차원 벡터등식에서 $\mathbf{v} = \nabla G$ 라고 두면, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ 을 자동으로 만족한다. 따라서 다음과 같은 속도-와도 관계식이 유도된다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \oint_c [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \nabla G + (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}) \times \nabla G] dl + \int_s \boldsymbol{\omega} \times \nabla G ds \quad (5)$$

여기서 오른쪽 두 번째 면적분항은 Biot-Savart 적분이라고 한다. 위 식은 운동학적인 식으로서 비압축성 유동에 대하여 성립한다.

점성유동에서 물체표면에서의 속도에 대한 경계조건인 고착조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad (6)$$

물체표면에서 힘의 평형을 고려한 경계조건을 구하기 위해, 힘의 평형을 나타내는 식(1)에서 접선방향의 힘과 법선 방향의 힘의 평형을 분리해서 생각할 때, 식(1)에 $\mathbf{n} \times$ 를 취하여 접선방향과, 식(1)에 $\mathbf{n} \cdot$ 을 취하여 법선 방향의 힘의 평형을 생각하여 식을 정리하면,

$$\mu \frac{\partial \boldsymbol{\omega} \mathbf{k}}{\partial n} = \mathbf{n} \times \rho \mathbf{a}_B + \mathbf{n} \times \nabla p \quad (7)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}_B + (\nabla \times \mu \boldsymbol{\omega} \mathbf{k})] \quad (8)$$

여기서 \mathbf{a}_B 는 고착조건에 의해 주어지는 물체 표면에서의 물체의 가속도이다. 식(7)과 식(8)에 의하면, 경계면에서 와도와 압력이 서로 연성이 되어 있음을 알 수 있다.

3. 수치적 처리

수치적 처리를 위해, 속도, 와도, 압력은 무한 원방에서의 유입속도와 압력으로써, 특성장 L 은 실린더의 지름으로써 무차원화 되었고, Re 는 레이놀즈 수이며, 다음부터 표기되는 모든 수식은 무차원화 된 식이다.

3.1 정규격자생성

본 계산을 위한 격자는 C형 격자 생성이 바람직하나, 본 연구에서는 수치해석을 확인하는데 주된 목적을 두고 있기 때문에 O형의 정규격자로서 간단히 생성하였다. 와도는 물체표면 근처에서 주로 분포하므로 물체표면 근처의 값이 매우 중요하다. 따라서 물체표면 근처로 격자모음을 실시했는

데, 그 방법으로 다음과 같은 cosine spacing에 의해 j 번째 격자의 반경좌표를 정하였다.

$$r_j = 1 + (R-1) \times (1 - \cos[(j-1) \times \frac{\pi}{n}])$$

여기서 R 은 계산영역의 바깥경계의 반경좌표이고, n 은 반경방향의 격자수이다.

3.2 유한체적법

문제의 지배방정식 중 와도방정식을 풀기 위해서 유한체적법의 셀중심방법 (cell centered-scheme)을 이용하였다. 와도 방정식을 하나의 셀에 대하여 적분형태로 나타내면,

$$\int_s \frac{\partial \omega}{\partial t} dA + \int_s \nabla \cdot (\underline{u}\omega - \frac{1}{Re} \nabla \omega) dA = 0$$

셀 하나에 대해서는 Δt 의 시간변화동안 와도가 평균적인 개념으로 변한다고 보고, 두 번째 항에 대해서 Gauss정리를 적용하면,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_s \omega dA + \oint_c \underline{n} \cdot (\underline{u}\omega - \frac{1}{Re} \nabla \omega) dl = 0 \quad (9)$$

식(9)에서 대류항만 따로 쓰면,

$$\int_s \nabla \cdot (\underline{u}\omega) ds = \oint_c \underline{n} \cdot (\underline{u}\omega) dl$$

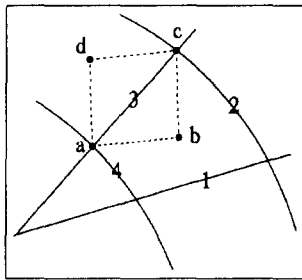


Fig.1 Stencil notation of an edge of a cell for calculation of the convection term

하나의 셀에서, 네 방향의 셀경계면의 속도플럭스는 Fig.1에서 보인 바와 같이, 4개의 인접한 속도값의 평균을 취한다.

$$u_3 = \frac{1}{4} (u_a + u_b + u_c + u_d)$$

셀의 나머지 방향에 대해서도 마찬가지로 구할 수 있다. 그런데, 연속방정식이 유체 전영역에 대해서 만족할 때, 셀 하나에 대해서도 만족한다고 보면,

$$\int_s \nabla \cdot \underline{u} ds = \oint_c \underline{n} \cdot \underline{u} dl = 0$$

위 식은 각 경계면에서 평균을 취해서 구한 속도 플럭스의 제한조건으로 수치오차가 생기는 것을 수정하여 정확도를 올리게 된다. 그런데, 와도에 대해서는 각 셀에 대해서 위와 같은 제한조건이 없을 뿐만 아니라, 인접 셀의 값으로 근사할 때, 속도 플럭스에 따라서 민감하게 반응할 수 있다. 따라서, 와도에 대해서는 TVD(Total Variation Diminishing)방법을 적용하여 식(9)의 대류항을 이산화하면, 각 셀의 네방향으로 나가는 대류플럭스의 합으로 나타나고, 셀 한쪽에서 나가는 대류플럭스는 다음과 같다(Fig.2 참조).

$$\oint_c \underline{n} \cdot (\underline{u}\omega) dl = \sum_{p=1}^4 \frac{1}{2} f_p (\omega_i + \omega_{i+1} + \phi)$$

여기서,

$$f_p = \underline{u}_p \cdot \underline{n}_p \Delta l$$

$$\phi = [G_i (|f_p| - \frac{\Delta t}{\Delta A} f_p^2 - |f_p|)] \Delta \omega_p$$

$$G_i = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$$

$$r = \frac{\omega_{i+1-\sigma} - \omega_{i-\sigma}}{\Delta \omega_p}$$

$$\sigma = \text{sign}(f_p), \Delta \omega_p = \omega_{i+1} - \omega_i$$

Δl 은 계산하고자 하는 셀의 경계면의 길이이

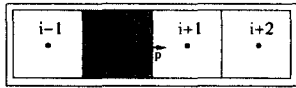


Fig.2 Stencil cells for TVD scheme

고, \mathbf{n}_p 는 그 셀의 p지점에서의 법선벡터이다. $sign(f_p)$ 는 f_p 의 부호에 따라 1 또는 -1을 주는 함수이고, ϕ 는 플럭스 제어함수로서, 대류플럭스를 수정하는 역할을 하게 된다[6].

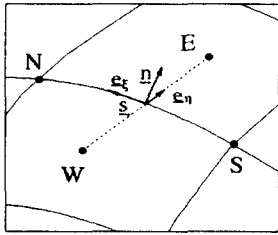


Fig.3 Notation for expressing diffusion term

식(9)의 확산항은 와도구배로 표현되는 바, fig.3에서 보인 바와 같이 셀 경계면에서의 와도구배는 \mathbf{e}_ξ 와 \mathbf{e}_η 방향으로 나타내질 수 있다. 이 때, \mathbf{e}_ξ 와 \mathbf{e}_η 는 반드시 직교일 필요는 없다. 동시에, 셀경계면에 접하는 접선 벡터(\mathbf{s})와 수직인 법선벡터(\mathbf{n})의 조합으로 나타낼 수 있다. 따라서 와도 구배는 두 직교좌표에서 제각기 표현가능하며, 이를 등치시키면,

$$\frac{\omega^N - \omega^S}{\Delta\xi} \mathbf{e}_\xi + \frac{\omega^E - \omega^W}{\Delta\eta} \mathbf{e}_\eta = \frac{\partial\omega}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial\omega}{\partial t} \mathbf{s}$$

여기서 $\Delta\xi$ 는 인접한 셀의 중심까지의 거리이며, $\Delta\eta$ 는 경계면의 변의 길이이다. 위첨자(N, S, E, W)는 각각 인접 셀의 방향을 의미한다. 위 관계식을 정리하면 확산 플럭스에 대한 이산화된 식

을 구할 수 있다.

$$\mathbf{n} \cdot \frac{1}{Re} \nabla \omega = \frac{1}{Re} \frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{1}{Re} \frac{1}{\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{n}} \left(\frac{\omega^N - \omega^S}{\Delta\xi} - \frac{\omega^E - \omega^W}{\Delta\eta} \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{s} \right)$$

3.3 속도-와도 관계식

2차원 속도-와도 관계식은 식(5)로 유도되었다. 이 식을 수치적 처리를 하는 방법은 포텐셜유동에서 panel방법을 이용하는 것과 유사하게 구할 수 있다.

초기 순간 출발하는 원통의 중심을 좌표계의 원점으로 잡고 본 관계식을 사용하는 경우 식(5)의 첫번째 적분항은, 물체 경계면에서는 고착조건으로 인해 $\mathbf{u}_B = 0$ 이고, 무한원방에서는 교란속도가 0이 되므로 유입류의 속도 \mathbf{u}_∞ 가 된다.

따라서, 식(5)는 아래와 같이 무한원방에서의 속도와 Biot-Savart 적분항을 포함하는 식으로 간단해진다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty - \frac{1}{2\pi} \int \omega \mathbf{k} \times \nabla \ln r ds$$

계산영역을 여러 셀 요소로 나누고, 각 셀에서 와도가 일정하다고 가정하면, 위 식은 이산화된 식으로 표현된다.

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_\infty - \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_j \omega \mathbf{k} \times \nabla \ln r ds_j$$

위 식의 Biot-Savart 적분항에 대한 자세한 적분 과정은 문헌[7]에서 잘 설명되고 있다.

3.4 압력방정식

식(4)와 식(8)은 각각 2차원 압력방정식과 동적 압력경계조건이다. 계산의 편의를 위해 전체압력 $H (= \frac{1}{2} \rho u^2 + p)$ 로 나타내고, 식(4)와 식(8)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\nabla^2 H = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \omega \mathbf{k}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \omega \mathbf{k}) - \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \omega \mathbf{k}) \quad (11)$$

2차원에 대한 Green스칼라등식과 2차원 Green함수를 이용하면 방정식,

$$H(\mathbf{x}) = \oint_c [H \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial H}{\partial n} G] dl_y + \int_s (\nabla^2 H) G ds_y$$

이 유도되며, 식(10)과 식(11)을 대입하면,

$$H = \oint_c H \mathbf{n} \cdot \nabla G dl - \oint_c \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \omega \mathbf{k}) G dl + \oint_c \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \omega \mathbf{k}) G dl + \int_s \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \omega \mathbf{k}) G ds$$

이 된다.

초기 순간 출발하는 원통의 중심을 좌표계의 원점으로 잡고 본 관계식을 사용하는 경우, 속도-와도 관계식의 경우와 마찬가지로 위 식의 두 번째 적분항은 경계면에서 고착조건과 무한원방에 대한 조건에 의해 소거된다. 경계면을 여러 panel로 나누고, 각 panel에서는 H가 일정하다고 가정하면, 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$H_i = \sum_j [H_j \oint_{c_j} \mathbf{n} \cdot \nabla G dl + \oint_{c_j} \frac{1}{Re} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \omega \mathbf{k}) G dl] + \sum_k \int_{s_k} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \omega \mathbf{k}) G ds$$

각 panel에서 접선방향의 와도 변화가 일정하다고 가정하면, 두 번째 적분항에서 접선방향의 와도 변화를 쏘스의 세기로 나타내고, 포텐셜 유동에서 사용되어 왔던 panel방법과 유사한 방법으로 첫번째와 두번째항을 계산할 수 있고, 계산영역에서 와도와 속도분포가 주어진다면, H는 간단히 구해진다.

3.5 수치해석과정

동적와도경계조건을 다시 보면,

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega \mathbf{k}}{\partial n} = \mathbf{n} \times \left(-\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p \right)$$

경계면에서 와도플럭스를 구해야만 와도방정식을 풀 수 있고, 그 와도 분포로써 속도-와도 관계식에 의해 속도 분포를 구하며, 그 와도와 속도로써 압력방정식을 풀게 되는데, 위 와도경계조건에 의하면 압력이 다시 와도와 연성이 되어 있으므로, 본 논문에서는 반복(iteration)계산하는 방법을 취한다. Wu등[8]은 이러한 와도와 압력의 연성관계를 기본적으로 깨뜨리지 않으면서, 압력항을 분리하여 수치적으로 와도플럭스를 구할 수 있는 방법을 제안한 바 있다. 주어진 와도 분포에 대해서 속도-와도 관계식으로 경계면에서의 속도를 구할 때, 그 속도와 실제 물체의 속도는 서로 일치해야 물리적으로 타당하다. 그런데, 경계면에서 계산된 속도와 물체 속도와의 차이가 생기게 되는 경우, 가상의(spurious) slip속도에 해당하는 vortex sheet가 발생한다고 생각할 수 있다.

이러한 생각을 와도경계조건과 결부시켜 생각하면, 다음과 같이 시간간격 Δt 사이에 생성되는 평균적인 와도플럭스($\bar{\sigma}$)와 평균적인 접선방향 압력구배(\bar{p}_t)로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{\sigma} \sim \frac{u_s}{\Delta t} + \frac{\bar{p}_t}{\rho}$$

그런데, 와도 방정식을 풀 때, \bar{p}_t 는 알 수 없으므로, Δt 만큼 계산하는 동안에는 무시한다. 이 가상의 slip속도를 Δt 로 나눈 값을 평균적인 와도 플럭스로 계산한 다음 속도-와도 관계식을 풀어서 나온 경계면에서의 속도가 고착조건을 만족하는지 검사한다. 그렇지 않으면, 그 slip속도만큼 발생하는 와도플럭스를 더하고, 다시 와도-속도 관계식을 푸는 반복계산을 수행한다. 일단 고착조건이 만족된다면, 그때 구해지는 와도플럭스와 압력값으로써 동적와도경계조건이 만족될 때까지 압력방정식을 반복계산한 후, 다음 Δt 단계를 계산하게 된다. 이렇게 Δt 구간에서 반복계산을 통해서 고착조건과 동적와도경계조건을 만족시키는 과

정을 거치게 되므로, 전 유체영역에서 와도와 압력의 연성관계를 유지한다고 볼 수 있다. 와도플럭스의 초기값으로는 포텐셜유동으로 가정하여 계산되는 물체경계면에서의 속도를 slip 속도로 하고, 같이 구해지는 압력 값도 함께 고려하여 와도플럭스를 계산한다(Fig.4 참조).

Δt 구간에서 와도방정식을 풀 때, 와도방정식은 explicit형태이므로, 안정적인 해를 구하기 위해서 다음과 같은 안정성 제한 조건으로 구해지는 δt 로 Δt 구간을 나누어서 와도방정식을 계산한다[9].

$$\delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4 \frac{1}{Re} + \sqrt{2} |u| \Delta x}$$

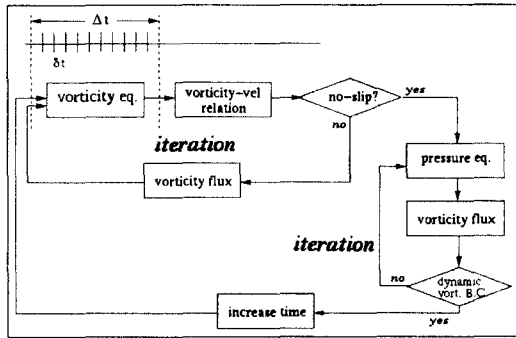


Fig.4 Flow-chart of the present numerical method

4. 유동 해석 결과

이상과 같은 수치적 방법을 통해 실린더 주위의 유동해석을 실시하였다. 비교의 편의를 위해 Reynolds수를 9500으로 하고, 격자를 원주방향으로 1000개, 반경 방향으로 40개로 나누었다. 또, 모든 물리량은 실린더 지름, 무한원방에서의 속도와 압력으로 무차원화 되었다. 컴퓨터 사용환경은 C언어로 Cray J-90 계열 슈퍼컴퓨터에서 수행되었다.

Fig.5에서는 실린더 주위의 유선을 시간이 흘러감에 따라 나타내고 있다. 시간이 진행될수록 보텍스형성을 뚜렷하게 확인할 수 있고, 특히

Bouard와 Coutanceau[10]의 실험 논문에서 언급했듯이, 얇은 wake가 박리점 근처에서 생겨나서 시간이 지나면 두 부분으로 갈라져서 결국 안정된 하나의 큰 보텍스로 합쳐지는 β -현상($t=1.0$)과 안정된 주요 보텍스 위쪽에 다시 작은 2차보텍스가 생기는 α -현상($t=2.0$)을 확인할 수 있다.

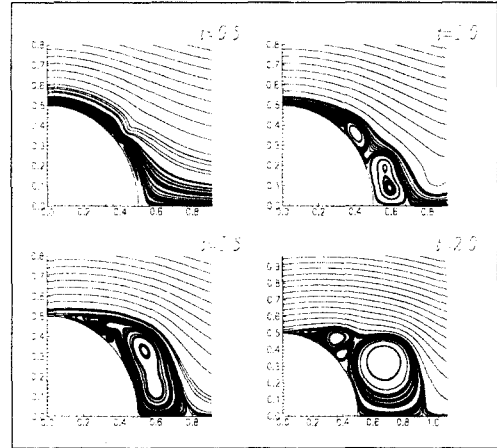


Fig.5 Streamline pattern around the cylinder at various instants

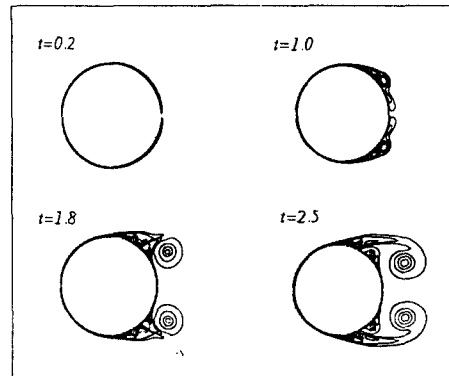


Fig.6 Vorticity contour around the cylinder at various instants

Fig.6은 와도contour를 나타낸 그림이다. 시간이 흐름에 따라 와도가 점점 발달하는 모습을 확인할 수 있고, Koumoutsakos등[11]에 의해 vortex방법으로 계산된 와도contour와 비교할 때, contour의 형상이 거의 유사함을 알 수 있다. 여기서

Koumoutsakos의 결과는 시간 t 가 반지름으로 무차원화 되었고, 본 기법은 지름으로 무차원화 되었으므로 $t=2.0$ 의 결과는 본 수치해석 결과에서 $t=1.0$ 에 해당하고, $t=5.0$ 의 결과는 본 기법의 $t=2.5$ 의 결과에 해당된다.

Fig.7에서는 실린더 주위의 압력contour를 나타내고 있다. 시간이 흐를수록 실린더 뒤쪽의 유동이 vortex의 생성으로 인해 복잡하게 되고, 그 wake의 중심에서 압력이 상대적으로 매우 낮은 구간을 확인할 수 있다.

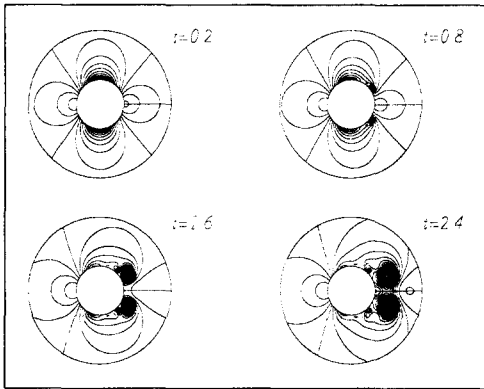


Fig.7 Pressure contour at various instants

Fig.8을 본 수치기법으로 항력을 계산한 결과를 나타내고 있다. Koumoutsakos등[11]의 vortex method로 항력을 계산한 결과와 서로 비교해 보면, 초기시간에 대해서는 비슷한 경향을 보이고 있지만, $t>1$ 인 구간에서는 조금씩 다른 경향을 보이고 있는데, 이 부분에 대해서는 생성된 vortex들 간의 상호간섭효과를 고려하는 정도가 여러 수치해석 방법마다 결과가 각각 서로 다르므로 아직 뚜렷하게 검증된 바 없다. 여기서 Koumoutsakos의 $t=1.0$ 은 본 결과에서 $t=0.5$ 에 해당된다.

Fig.9에서는, 초기시간($t<0.3$)에서 Bar-Lev와 Yang[12]에 의해 구해진 바 있는 항력계수와 비교한 것을 나타내는 것으로, 이 구간에서는 해석해와 거의 일치함을 확인할 수 있다.

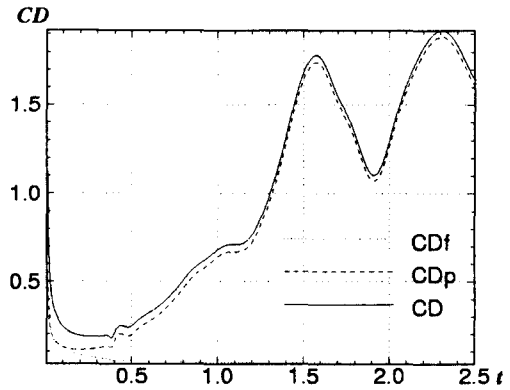


Fig. 8 Drag coefficients versus time (present scheme)

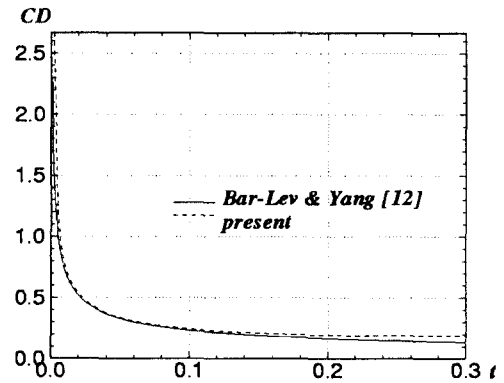


Fig.9 Comparison of drag between present results and analytic solution

Fig.10은 실린더 표면에서의 와도값에 대하여 Bar-Lev와 Yang[12]에 의해 구해진 해석해와 본 수치기법을 통하여 구해진 값과 비교한 그림이다. 이 결과 역시 해석해와 거의 일치되는 경향을 나타내고 있다. 여기서 x 축의 값은 실린더의 뒤쪽에서 반시계 방향으로 증가하는 각도 값이다.

5. 결론

점성유동을 해석하기 위해서 Navier-Stokes 방정식을 수치적으로 풀기 위한 여러 가지 방법 중, 와도와 속도 이외에 압력까지 모두 고려하면서 물

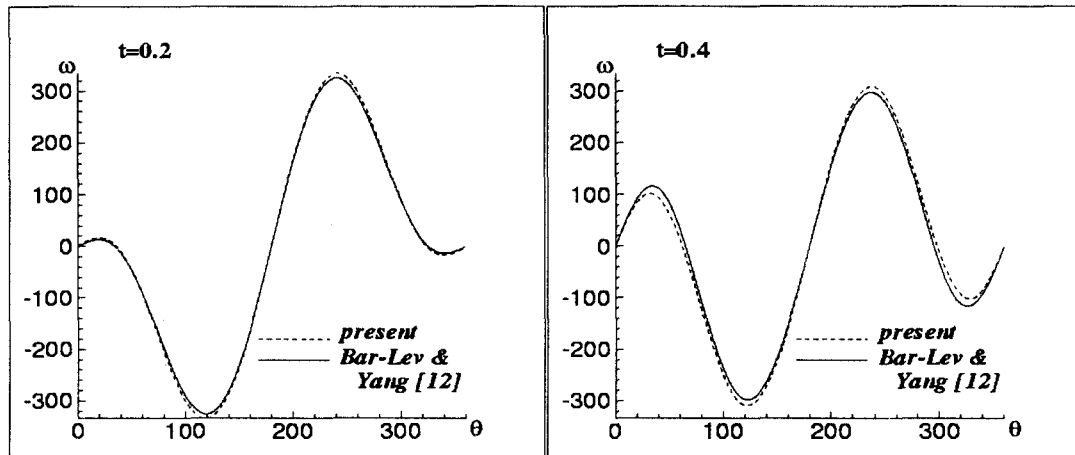


Fig.10 Vorticity comparison with the analytic solution

체 경계면에서 힘의 평형을 이룰 수 있도록 하는 와도를 기저로 하는 방법이 소개되었다. 그리고, 경계면에서 와도와 압력의 연성을 반복계산을 통해 수치적으로 해결하는 방법도 소개되었다.

이러한 방법으로 원형단면 주위의 점성 유동을 해석한 결과, 기존의 수치해석기법으로 계산된 결과와 실험 결과(실린더 주위의 유선)와도 비교적 일치하는 경향을 보였다. 그런데, 시간이 좀 지난 후($t > 1$)의 항력계수는 다른 수치해석 결과와 좀 다른 경향을 나타내는데, 이 부분은 생성된 보텍스로 서로 다른 매우 복잡한 유동장이 형성되기 때문이다. 이러한 유동장에 대한 항력계수는 여러 수치해석 결과마다 서로 다른 결과를 보이고 있고, 아직 뚜렷하게 검증된 바가 없다. 매우 초기 시간 ($t < 0.3$)에 대해서 항력계수와 와도값에 대한 해석해가 존재하는데, 그 결과와도 만족스런 일치성을 보였다.

따라서, 와도와 압력의 연성을 고려하고, 미분방정식 대신 적분방정식으로 변환하여 경계적분법(Boundary Integral Method)과 혼용하는 본 수치해석의 타당성을 확인할 수 있었다. 본 방법을 이용하여 2차원 날개 단면에 대한 계산과 더불어 자세한 추가 계산결과가 문헌[7]에 수록되어 있다.

후 기

본 연구는 학술진흥재단에서 지원한 1997년도 지원연구 과제의 일환으로 수행되었다.

참 고 문 헌

- [1] Wu, J. Z, Wu, J. M., "Interactions between a solid surface and a viscous compressible flow fluid," J. F. M., vol. 254, pp 183-211, 1993.
- [2] Lighthill, M. J., "Introduction, boundary layer theory," Laminar boundary layers, edited by Rosenhead, Oxford Univ. Press, NewYork, 1963.
- [3] Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. press, 1967.
- [4] Speziale, C. G., "On the Advantages of the Vorticity-Velocity Formulation of the Equation of Fluid Dynamics," Journal of Computational Physics, vol. 73, pp 476-480, 1987.
- [5] Gresho, P. M., "Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues," Annu. Rev. Fluid Mech., pp 413-453, 1991.
- [6] Hoffman, K. A. & Chiang, S. T., Computational fluid dynamics for engineers, Engineering Education System, 1993.

- [7] 김광수, "와도를 기저로 한 2차원 날개 주위의 점성유동 해석," 서울대학교 조선해양공학과 석사 학위 논문, 1998.
- [8] Wu, J. Z., Wu, J. M., Ma, H. Y. & Wu, X. H., "Dynamic vorticity condition: theoretical analysis and numerical implementation," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 19, pp 905-938, 1994.
- [9] Peyret, R & Taylor, T. D., *Computational methods for fluid flow*, Springer-Verlag, New York, pp 65-66, 1983.
- [10] Bouard, R. & Coutanceau, M., "The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 10^4$," *J. F. M.*, vol. 101, pp 583-607, 1980.
- [11] Koumoutsakos, P. & Leonard, A., "High resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods," *J. F. M.*, vol. 296, pp 1-38, 1995.
- [12] Bar-Lev, M. & Yang, H. T., "Initial flow field over an impulsively started circular cylinder," *J. F. M.*, vol. 72, pp 625-647, 1975.