
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 35 卷 第 4 號 1998年 11月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 35, No. 4, November 1998

선박조종성능 추정을 위한 근사적 기법에 관한 연구

이호영*, 신상성*

Approximate Technique for Ship's Manoeuvrability Prediction

by

Ho-Young Lee* and Sang-Sung Shin*

요 약

본 논문은 선박의 조종성능을 추정하기 위하여 선체에 작용되는 유체력과 선체-프로펠라-타 상호 간섭 계수들에 대해 실험 및 반경험적 방법을 사용한 유사선 개념[1,2]을 도입하였다. 유사선 개념은 새로운 선박과 가장 유사한 선박의 기 실험된 데이터를 기본으로 채택한다. 유사선 개념을 적용하기 위해 기 실험된 선박에 대한 실험데이터가 존재해야 하며, 선체력의 변화를 평가하기 위한 반경험적방법이 채택되어야 하고, 기 실험된 선박의 데이터를 수정할 방법이 반드시 존재해야 된다. 유사선 개념을 근간으로, 만재흘수 상태의 실험결과를 이용하여 경하 및 하기만재흘수 상태에서의 선박조종성능을 추정하였고, 또한 유사선으로 기 실험된 선박을 선택하여 새로운 선박의 조종성능을 추정하였다. 본 논문의 계산 방법이 초기 설계단계에서 선박의 조종성능을 정확하게 추정할 수 있음을 확인하였다.

Abstract

In this paper, we studied the Similar Ship(SS) concept[1,2] as a method to an experimental and semi-empirical approach for the estimation of hull hydrodynamic forces and hull-propeller-rudder interaction coefficients and used these methods to predict ship's manoeuvrability. The SS concept is adopted to use experimental data of prototype ships for manoeuvrability prediction of a new ship. The SS concept is composed of the key components as follows: existence of experimental data about prototype ship, availability of semi-empirical method for estimating the changes of hull force, a method to correct the prototype ship data.

접수일자 : 1998년 2월 26일, 재접수일자 : 1998년 8월 5일

*정회원, 현대중공업(주) 선박해양연구소

On the basis of these concepts, we attempted to simulate manoeuvrability at ballast and scantling draft conditions by making use of experimental data at full load draft condition and to simulate manoeuvrability of new ships by making use of experimental data for prototype. From present calculation, it was found that the present method can predict the ship's manoeuvrability accurately at early design stage.

1. 서론

IMO는 선박의 항해 안정성을 향상시키기 위해 조종성 잠정 기준안(IMO A.751)[3]을 채택하였다. 조종성 기준의 발효에 대비하기 위해 각 조선소들은 초기 설계단계에서 선박조종성능의 정확한 추정이 매우 중요하게 되었다. 그러나 초기 설계 단계에서 선박의 조종성능을 정확하게 추정할 수 있는 방법이 국내외에서 아직 많지 않는 상황이다.

조종성능의 추정을 위해 수조시험이 가장 정확한 해를 주는 것으로 알려져 있지만 이는 초기설계 단계에서 시간과 비용이 제한되므로, 설계자들은 이 단계에서 조종시험을 의뢰하지 않는 실정이다.

Kijima[4], Lee[5]는 수조시험 데이터의 해석에 의해 재래선형(closed stern)에 대하여 초기 설계 단계에서 조종성능을 추정할 수 있는 경험식을 제안하였다. 그러나 Kijima의 연구는 대상 선박의 선미 벌브형 선박에 대한 조종성능 해석에 직접적으로 적용될 수 없다. 이러한 상황에서 저자는 본 연구소의 수조시험 데이터[6][7]와 Kijima의 연구 결과를 조합하여 초기 설계단계에서 선박의 조종성능을 해석할 수 있는 방법을 개발하였다. 새로운 선박과 수조시험을 행한 가장 유사한 선박이 선택되면, Kijima 식에서 민감도를 계산하여 새로운 선박의 유체력 미계수를 수정함으로써 새로운 선박의 조종성능을 추정할 수 있다. 본 논문은 유사선 개념을 이용한 추정법을 사용하여 3척의 선박에 대해 조종성능 해석을 수행하였고, 그 결과를 Kijima 추정법[4]과 서로 비교하였다. 그 결과 본 논문의 추정법이 불안정한 선박의 조종성능을 Kijima 추정법보다 정확하게 추정할 수 있었다.

2. 해석방법

2.1 수학적모형

횡동요를 무시한 3자유도 조종운동 방정식은 식(1)과 같다[8].

$$\begin{aligned} (m' + m'_x)\dot{u}' - (m' + m'_y)v'r' &= X' \\ &= X_H' + X_P' + X_R' \\ (m' + m'_y)\dot{v}' + (m' + m'_x)u'r' &= Y' \\ &= Y_H' + Y_P' + Y_R' \\ (I'_{zz} + J'_{zz})\dot{r}' &= N' = N_H' + N_P' + N_R' \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)에서 아래 첨자 H, P 및 R은 선체, 프로펠러 및 타에 의한 힘과 모멘트를 나타내며, 위 첨자 '는 무차원 계수를 나타내며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m', m'_x, m'_y &= m, m_x, m_y / \frac{1}{2} \rho L^2 d \\ I'_{zz}, J'_{zz} &= I_{zz}, J_{zz} / \frac{1}{2} \rho L^4 d \\ X', Y' &= X, Y / \frac{1}{2} \rho L U^2 d \\ N' &= N / \frac{1}{2} \rho L^2 U^2 d \\ u', v', r' &= u, v / U, r' = r \frac{L}{U} \end{aligned} \quad (2)$$

선체에 작용하는 무차원화된 힘과 모멘트는 2차와 3차 다항식을 혼합한 Kijima 표현[4]에 따라 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_H' &= X'_{\beta r'} \sin \beta + X'_{\omega} \cos^2 \beta \\ Y_H' &= Y'_{\beta} \beta + Y'_{r'} r' + Y'_{\beta\beta} |\beta| + Y'_{r'r'} |r'| \\ &\quad + (Y'_{\beta r'} \beta + Y'_{r r'} r') \beta r' \\ N_H' &= N'_{\beta} \beta + N'_{r'} r' + N'_{\beta\beta} |\beta| + N'_{r'r'} |r'| \\ &\quad + (N'_{\beta r'} \beta + N'_{r r'} r') \beta r' \end{aligned} \quad (3)$$

프로펠러에 의해 발생된 힘은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} X'_P &= (1-t)n^2 D_P^4 K_T(J) / \frac{1}{2} \rho L U^2 d \\ K_T(J) &= C_1 + C_2 J + C_3 J^2 \\ J &= u(1-w_p) / (nD_P) \end{aligned} \quad (4)$$

$$w_p = w_{p0} \exp[-4.0(\beta - x'_{pr'})^2]$$

일반적으로 타의 작동에 기인된 유체력은 δ , t_R , a_H , x_H 및 F_N 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} X_R &= -(1 - t_R)F_N \sin \delta \\ Y_R &= -(1 + a_H)F_N \cos \delta \\ N_R &= -(x_R + a_H x_H)F_N \cos \delta \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{A_R}{Ld} f_a U_R^2 \sin \alpha_R \\ \alpha_R &= \delta + \delta_0 - \gamma(\beta - l_R r') \\ \delta_0 &= -(\pi s_0 / 90), s_0 = 1 - u(1 - w_p) / nP \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_R = \epsilon u_P \sqrt{\eta_H \left(1 + x \left(\sqrt{1 + \frac{8K_T}{\pi J_P^2}} - 1 \right) \right)^2} + (1 - \eta_H)$$

$$x = \frac{0.6}{\epsilon} \text{ where } \eta_H = D_P / H$$

2.2 유사선의 유체력 추정 방법

유사선 개념은 전자의 실험에서 축적된 데이터로부터 선종, 기본제원, 기하학적 데이터 및 조종 유체력 미계수가 판단의 기준으로 선택된다. 새로운 선박이 설계되면 기존의 수조에서 실험된 가장 유사한 선박을 모선으로 선택하여, 새로운 선박의 유체력 미계수는 다음과 같이 모선의 유체력 미계수를 수정함으로써 계산이 된다[1,2].

$$\begin{aligned} H(X_{NS}) &= H(X_{PS}) + \delta H(X_{NS}, X_{PS}) \\ \delta H &= H(X_{NS})^{(K)} - H(X_{PS})^{(K)} \end{aligned} \quad (7)$$

H ; Hydrodynamic data

δH ; Estimation correction between the prototype and new ship

X_{NS}, X_{PS} ; hull form description of new and prototype ship

$H(X_{NS})^{(K)}, H(X_{PS})^{(K)}$; hydrodynamic data estimated through the Kijima procedure

유사선 개념은 새로운 선박과 유사선이 선미선형 형태, 선종 및 기본제원에서 유사한 경우에 유체력 미계수의 적절한 변화가 기대된다.

새로운 선박의 조종 유체력 미계수의 계산을 위해 부록의 Kijima 식으로 부터 다음과 같은 기하

학적 파라메타, $X(=k, C_b B/L, d(1 - C_b)/B, dC_b/B)$ 등이 선정된다. 선형 유체력미계수에 대해 두 선박의 유체력 미계수 차이는 다음과 같이 가정될 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta Y'_\beta &= \frac{\partial Y'_\beta}{\partial k} \delta k + \frac{\partial Y'_\beta}{\partial C_b B/L} \delta(C_b B/L) \\ \delta(Y'_r - m' - m'_x) &= \frac{\partial(Y'_r - m' - m'_x)}{\partial C_b B/L} \delta(C_b B/L) \\ \delta N'_\beta &= \frac{\partial N'_\beta}{\partial k} \delta k \\ \delta N'_r &= \frac{\partial N'_r}{\partial k} \delta k \end{aligned} \quad (8)$$

새로운 선박의 유체력 미계수는 부록에 제시된 식을 이용하여 (8)식의 미분치를 계산하고, (8)식으로부터 계산된 값을 (7)식에 대입하면 계산된다.

3. 계산결과 및 고찰

본 계산에 사용된 선박의 기본제원은 Table 1에 나타나 있다. 유사선으로 선택된 A로부터 새로운 선박 A1과 A2의 유체력 미계수가 추정되고, 유사선 B로부터 새로운 선박 B1과 B2의 유체력 미계수가 마찬가지로 추정된다.

Table 1 Principal characteristics of ships

Hull and Rudder	Proto type Ship A	Proto type Ship B	New Ship A1	New Ship A2	New Ship B1	New Ship B2
L/B	5.6	6.378	5.404	5.734	6.378	6.378
B/d	2.885	2.441	2.639	2.653	3.544	2.289
L/d	16.15	15.566	14.26	15.21	22.603	14.602
C_b	0.7855	0.8288	0.7935	0.7863	0.7922	0.8359
R_A/Ld	1.84	1.81	1.85	1.99	2.63	1.70
Rudder Aspect Ratio	1.525	1.55	1.42	1.689	1.55	1.55

Table 2의 유사선 A에서 PMM 시험값과 Kijima 식을 비교해 보면 선형유체력 미계수에서 Y'_β 값은 -60%의 차이가 나고 N'_r 값은 -58%의 차이가 나지만, $Y'_r - (m' + m'_x)$ 및 N'_β 는 거의 차이가 없다. 전반적으로 비선형 계수는 Kijima

방법의 값과 차이가 많은 것을 알 수 있으며, 선체-프로펠라-타 간섭 계수들($\epsilon, \gamma, a_H, x'_H$)은 PMM 시험에서의 값이 큰 것을 알 수 있다. f_a 값은 본 논문에서는 horn type 타인 경우이고 Kijima의 방법에서는 일반타이므로 약간의 차이가 보인다. New ship A1에서 본 추정법과 Kijima식을 비교해 보면 PMM 시험 해석과 Kijima식의 비교와 비슷한 경향을 가진다.

Table 2 Comparison of PMM test, Kijima's method and present prediction for the ship's hydrodynamic coefficient

Type Ship	Prototype A		New Ship A1	
	PMM	Kijima	Prediction	Kijima
Y'_{β}	0.24429	0.39085	0.27932	0.42588
Y'_{r-} ($m' + m'_y$)	-0.21069	-0.21039	-0.22058	-0.22029
$Y'_{\beta\beta}$	0.36327	0.68593	0.37287	0.69550
Y'_{rr}	-0.04995	0.02340	-0.04022	0.03313
$Y'_{\beta\beta\beta}$	0.42725	0.44251	0.45010	0.46529
$Y'_{\beta r}$	0.29247	-0.24156	0.31532	-0.19898
N'_{β}	0.13881	0.12381	0.15523	0.14023
N'_{r}	-0.03261	-0.05153	-0.03715	-0.05606
$N'_{\beta\beta}$	0.01843	-0.00540	0.01474	-0.00907
N'_{rr}	-0.04311	-0.01987	-0.03981	-0.01657
$N'_{\beta\beta\beta}$	-0.31045	-0.08615	-0.29742	-0.10034
$N'_{\beta r}$	-0.00505	-0.15040	-0.01923	-0.13793
$m' + m'_y$ + X'_{β}	0.33786	0.55280	0.37425	0.58886
ϵ	1.3185	1.0019	1.2971	0.9805
γ_1	0.414	0.246	0.372	0.204
γ_2	0.581	0.246	0.539	0.204
a_H	0.150	0.381	0.156	0.388
x'_H	-0.760	-0.479	-0.761	-0.479
f_a	2.068	2.476	2.092	2.5000

Table 3은 유사선 A로부터 추정된 A2 선박에 대하여 PMM 시험값, Kijima 식과 본 논문의 추정값을 서로 비교하고 있다. 선형유체력 미계수 $Y'_{r-}(m' + m'_y)$, N'_{β} 는 서로 잘 일치하고 있으나, Y'_{β} 값은 본논문의 추정값과 PMM 결과가

서로 일치하며 N'_{r} 값은 서로 차이가 보인다. 전반적으로 유체력 미계수와 선체-프로펠라-타 상호 간섭계수들은 본 추정값이 Kijima 식의 결과보다 PMM 시험값과 잘 일치된다.

Table 3 Comparison of PMM test, Kijima's method and present prediction for the ship's hydrodynamic coefficient

Type Ship	New Ship A2		
	PMM	Kijima	Prediction
Y'_{β}	0.27224	0.39852	0.25196
Y'_{r-} ($m' + m'_y$)	-0.23817	-0.20569	-0.20598
$Y'_{\beta\beta}$	0.34229	0.70139	0.37877
Y'_{rr}	-0.10544	0.03167	-0.04168
$Y'_{\beta\beta\beta}$	0.19281	0.47932	0.46343
$Y'_{\beta r}$	0.45823	-0.20536	0.32936
N'_{β}	0.15234	0.13149	0.14649
N'_{r}	-0.04849	-0.05371	-0.03480
$N'_{\beta\beta}$	0.08467	-0.01134	0.01247
N'_{rr}	-0.08121	-0.02144	-0.04468
$N'_{\beta\beta\beta}$	-0.5112	-0.09821	-0.31814
$N'_{\beta r}$	0.08504	-0.15080	-0.0171
$m' + m'_y$ + X'_{β}	0.54956	0.55840	0.34332
ϵ	1.2538	1.0073	1.324
γ_1	0.428	0.265	0.433
γ_2	0.645	0.265	0.600
a_H	0.279	0.382	0.151
x'_H	-0.478	-0.479	-0.76
f_a	1.777	2.476	2.167

Table 4으로 부터 유사선 B에서 PMM 시험값과 Kijima 식을 비교해 보면 선형유체력 미계수에서 Y'_{β} 값은 -47.8%의 차이가 나고, N'_{r} 값은 -63.9%의 차이가 나지만, $Y'_{r-}(m' + m'_y)$ 및 N'_{β} 는 거의 차이가 없다. 비선형 계수와 선체-프로펠라-타 관련 계수는 Table 2와 같은 경향을 가진다.

Fig. 1~4은 선회, 지그재그 및 나선형 시험에 대해 선미 선형이 선미벌브형인 유사선의 PMM

Table 4 Comparison of PMM test, Kijima's method and present prediction for the ship's hydrodynamic coefficient

Type Ship	Prototype B (Full)		New Ship B1 (Ballast)		New Ship B2 (Scantling)	
	PMM	Kijima	Pred.	Kijima	Pred.	Kijima
Y'_{β}	0.25958	0.38374	0.18872	0.37152	0.27447	0.39863
$Y'_{r} - (m' + m'_y)$	-0.19431	-0.19491	-0.18572	-0.15828	-0.19599	-0.19659
$Y'_{\beta\beta}$	0.36439	0.67540	0.33560	0.37249	0.36819	0.67919
Y'_{rr}	-0.00901	0.04648	-0.04881	0.00300	-0.00025	0.05524
$Y'_{\beta\dot{\alpha}}$	0.37690	0.41745	0.20284	0.37533	0.41521	0.42649
$Y'_{\beta r}$	0.37424	-0.14063	0.30669	-0.09055	0.38327	-0.10232
N'_{β}	0.13661	0.12849	0.09661	0.06909	0.14509	0.13697
N'_{r}	-0.03226	-0.05287	-0.01934	-0.04716	-0.03459	-0.05520
$N'_{\beta\beta}$	0.00576	-0.00135	0.01672	0.00630	0.00430	-0.00281
N'_{rr}	-0.04234	-0.02503	-0.04521	-0.02101	-0.04178	-0.02447
$N'_{\beta\dot{\alpha}}$	-0.30942	-0.11979	-0.33111	-0.13380	-0.30562	-0.13256
$N'_{\beta r}$	-0.03965	-0.17995	0.01837	-0.17394	-0.05242	-0.17616
$(m' + m'_y) + X'_{\dot{\alpha}}$	0.48315	0.52543	0.41783	0.46039	0.49612	0.53834
ϵ	1.3183	1.0082	1.3074	0.9973	1.3192	1.0091
γ_1	0.456	0.308	0.488	0.340	0.4495	0.301
γ_2	0.543	0.308	0.575	0.340	0.5365	0.301
a_H	0.242	0.417	0.212	0.387	0.248	0.423
x'_H	-0.7218	-0.483	-0.7181	-0.479	-0.7225	-0.484
f_{α}	2.085	2.372	2.085	2.372	2.085	2.372

시험[6] 결과를 이용하여 추정된 결과와 Kijima 식에 의한 추정법 결과를 비교하였다.

Fig. 2~4에서 Kijima 추정법은 재래선형인 관계로 방향안정성이 우수한 것으로 판단되지만, 본 추정법은 방향 안정성면에서 매우 불안정하게 계산되었다.

Fig.5~8은 A2 선박의 선회, 지그재그 및 나선형 시험에 대해 PMM 시험[6], 본논문의 추정법 및 Kijima 식에 의한 추정법 결과를 서로 비교하였다. 그럼으로 부터 본 추정법과 PMM 시험 결과는 선미선형이 선미벌브 형태를 갖기 때문에 서로 일치하고 있고, Kijima 식에 의한 결과는 재래선형에 대한 식인 관계로 아주 다르게 추정되었다.

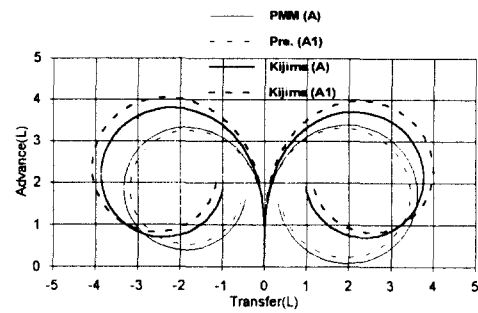


Fig. 1 Comparison of turning trajectories by present method, Kijima's method and PMM test

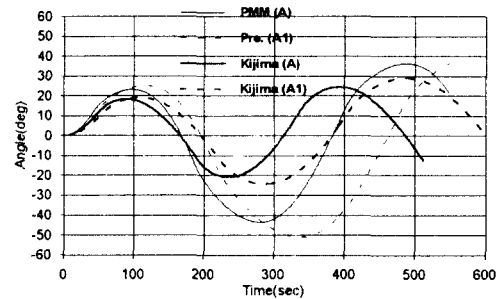


Fig. 2 Comparison of 10°/10° zig-zag manoeuvre by present method, Kijima's method and PMM test

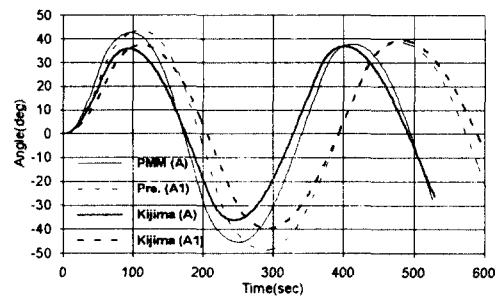


Fig. 3 Comparison of 20°/20° zig-zag manoeuvre by present method, Kijima's method and PMM test

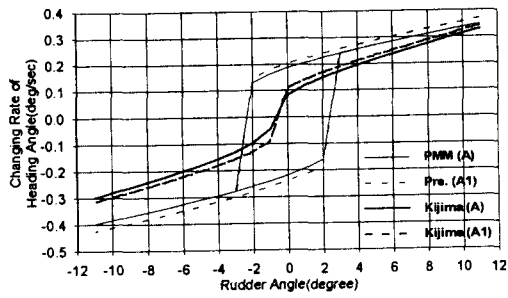


Fig. 4 Comparison of spiral manoeuvre by present method, Kijima's method, and PMM test

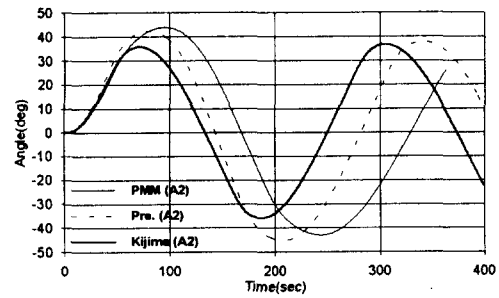


Fig. 7 Comparison of 20°/20° zig-zag manoeuvre by present method, Kijima's method and PMM test

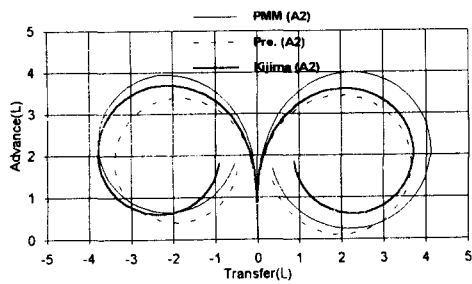


Fig. 5 Comparison of turning trajectories by present method, Kijima's method and PMM test

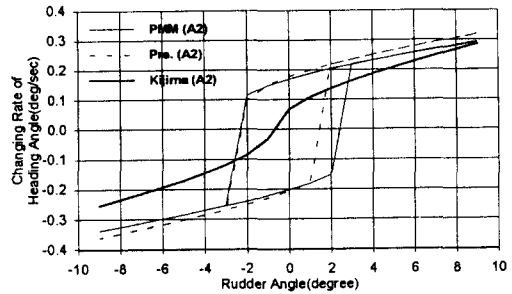


Fig. 8 Comparison of spiral manoeuvre by present method, Kijima's method, and PMM test

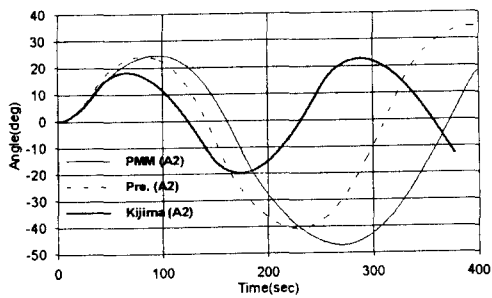


Fig. 6 Comparison of 10°/10° zig-zag manoeuvre by present method, Kijima's method and PMM test

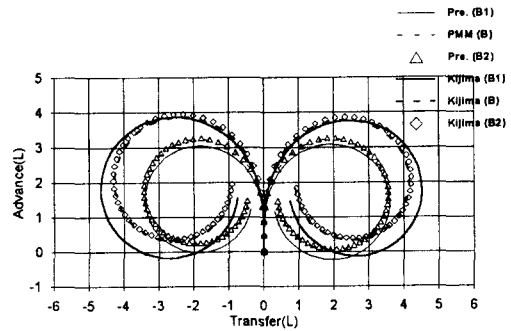


Fig. 9 Comparison of turning trajectories by present method, Kijima's method and PMM test

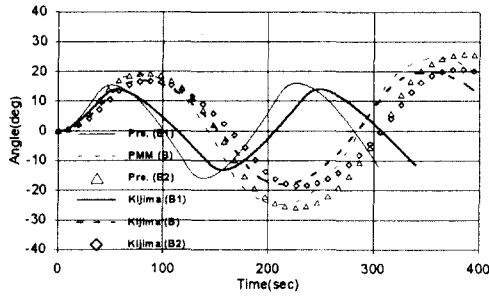


Fig. 10 Comparison of 10°/10° zig-zag manoeuvre by present method, Kijima's method and PMM test

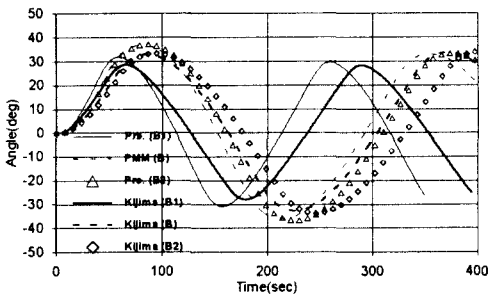


Fig. 11 Comparison of 20°/20° zig-zag manoeuvre by present method, Kijima's method and PMM test

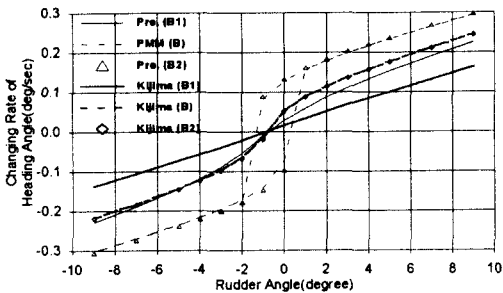


Fig. 12 Comparison of spiral manoeuvre by present method, Kijima's method, and PMM test

Fig.9 ~12은 하중상태(ballast, full 및 scantling)에 따른 선회성능, 지그재그 및 나선형성능을 보여주고 있다. 하중 상태에 따른 조종성능 해석 결과는 Kijima의 계산[4]과 경향이 일치하며, 본 추정법의 결과가 Kijima 식에 의한 추정법보다 방향 안정성면에서 약간 불안정하게 추정되었다. 침로 안정성면에서 두해석법의 결과가 비슷한 것은 설계자가 조종성능을 향상시키기 위해 선미 선형을 재래선형으로 수정하였기 때문이라 사료된다

4. 결론

본 논문은 초기 설계단계에서 선미벌브형 선박의 조종성능을 추정하기 위해 유사선 개념을 도입하고, 유체력 미계수의 추정을 위해 수조 실험 데이터와 Kijima 식을 조합하는 방법을 개발하였다.

1) 초기설계단계에서 불안정한 선박에 대한 조종성능을 추정하는 프로그램을 개발하였다.

2) 데이터 베이스에 의한 반 경험식[9]에 의한 조종성능 추정법과 더불어 본 방법이 초기설계 단계에서 실용적으로 사용될 수 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] Kose K., et al., "A Systematic Procedure for Predicting Maneuvering Performance", MARSIM'93, 1993.
- [2] Kose K., et al., "Systematic Approach for Ship Manoeuvrability Prediction", MARSIM'96, 1996.
- [3] IMO A 18/Res. 751, 22 November, 1993
- [4] Kijima K., et al., "On a Prediction Method of Ship Manoeuvring Characteristics", MARSIM 93, 1993.
- [5] 이승건, 김수정, "초기설계시 선박의 조종성능 추정에 관한 연구", 대한조선학회논문집, Vol. 32, 제4호, 1995.
- [6] 이호영, 염덕준, 신상성, 이태일, "PMM 모형시험에 의한 조종성능 추정 -수학 모델 따른 비교연구", 대한조선학회논문집, Vol. 34, 제2호, 1997.
- [7] 이호영, 염덕준, "컨테이너선의 조종성능에 대한

- 선미 부가물과 선미형상의 효과에 관한 실험적 연구”, 대한조선학회논문집, Vol. 35, 제3호, 1998.
- [8] 손경호, et al., “타의 스펠길이에 따른 면적 변화가 침로안정성에 미치는 영향에 관한 연구”, 대한조선학회논문집, Vol. 33, 제4호, 1996.
- [9] 이호영, 신상성, 엄덕준, “초기설계단계에서 선박 조종성능 추정에 대한 정도향상 연구”, 대한조선학회논문집, Vol. 35, 제1호, 1998.
- [10] Hasegawa K., “On a Performance Criterion of Auto Pilot Navigation”, Journal of Kansai Society of Naval Architects, Japen, 1980.
- [11] Ishiguro S., et al., “A Study on the Accuracy of the Recent Prediction Technique of Ship's Manoeuvrability at Early Design Stage”, MARSIM'96, 1996.

부록 : 유체력 미계수 및 선체-프로펠라-타 상호 간섭 계수

Kijima의 추정식에 따라 선체에 작용하는 유체력 미계수는 다음과 같다[4].

$$Y'_{\beta} = \frac{1}{2} \pi k + 1.4C_b B/L$$

$$Y'_{r} - (m' + m'_x) = -1.5C_b B/L$$

$$Y'_{\beta\beta} = 2.5d(1 - C_b)/B + 0.5$$

$$Y'_{\pi} = 0.343dC_b/B - 0.07$$

$$Y'_{\beta r} = 5.95d(1 - C_b)/B$$

$$Y'_{\beta\beta} = 1.5dC_b/B - 0.65$$

$$N'_{\beta} = k$$

$$N'_{r} = -0.5k + k^2$$

$$N'_{\beta\beta} = -0.96d(1 - C_b)/B + 0.066$$

$$N'_{\pi} = 0.5C_b B/L - 0.09$$

$$N'_{\beta r} = -(0.5dC_b/B - 0.05)$$

$$N'_{\beta\beta} = -[57.5(C_b B/L)^2 - 18.4C_b B/L + 1.6]$$

여기에서 $k=2d/L$ 이다.

X'_{β} 은 문헌[10]의 경험식으로 부터 다음과 같이 얻어진다.

$$X'_{\beta} = (-1.66C_b + 1.5)m'_y$$

타에 의해 발생된 힘을 표현하는 t_R, a_H 및 x_H 는 다음과 같다.

$$1 - t_R = 0.28C_b + 0.55$$

$$a_H = 0.679 - 1.51C_b + 1.44C_b^2$$

$$x_H = -(0.4 + 0.1C_b)L$$

본문 식(6)에서 ϵ 는 프로펠라와 타사이의 반류비를 나타내고, γ 는 타정류계수를 나타내며 다음과 같이 표현된다[11].

$$\epsilon = -156.2(C_b B/L)^2 + 41.6(C_b B/L) - 1.76$$

$$\gamma = -22.2(C_b B/L)^2 + 0.02(C_b B/L) + 0.68$$