

니켈계 초합금 CMSX 6 단결정 주조조직의 석출물구조 분석

安成郁 · V. Larionov · I. Grafas · 金秀哲 · 林玉童 ·
金承鎬* · 秦永薰* · 崔宗壽** · 李在薰*** · 李相浚**** · 徐東二***** · 李泰勳***** · 許武榮*

한국과학기술연구원 금속연구부, *고려대학교 금속공학과

한전기공주식회사, *한국타이어 중앙연구소

****국립기술품질원 기계금속부, *****미시간대학교 재료공학과, *****Ace Vacuum Co.

Structural analysis of Precipitates in a Nickel based Cast Single Crystal of CMSX 6

Seong-Uk An, V. Larionov, I. Grafas, Soo-Chul Kim, Ok-Dong Lim,

Seong-Ho Kim*, Young-Hoon Jin*, Jong-Soo Choe**, Jae-Hoon Lee***,

Sang-Joon Lee****, Dong-Yi Seo*****, Tae-Hoon Lee***** and Moo-Young Huh*

Division of Metals, Korea Institute of Science and Technology, Seoul 136-791

*Dept. of Metallurgical Engineering, Korea University, Seoul 136-701

**Gas Turbine Service Center, Korea Plant Service & Engineering Co., Incheon 404-170

***R & D Center, Hankook Tire Co. Ltd. Taejon 305-343

****Metallurgy Lab, National Institute of Technology and Quality, Kwacheon

*****Dept. of Materials & Mechanics Engineering, Michigan State University

*****Ace Vacuum Co., Anyang 430-017

(1998년 8월 31일 받음, 1998년 11월 3일 최종수정본 받음)

초 록 제1세대 니켈계 단결정 초합금인 CMSX 6를 사용하여 셀렉타법으로 진공 정밀주조하여 단결정을 제작하였다. 주형은 도 약 1500℃, 주입온도 약 1630℃와 용탕 주입 직후 주형을 2.5mm/분 속도로 하강시켜 단결정을 성장시켰다. 단결정 주조조직에서 기지와 공정조직은 γ' 석출물 ($\text{Ni}_3(\text{Al,Ti})$) 모양과 크기에 따라 각각 모두 두영역으로 구분되었으며, 공정조직의 Ti함량은 기지보다 높았다. 즉, EPMA 및 CBED 분석 등으로 γ' 석출물을 분석한 결과, 기지내의 γ' 은 크기가 0.5~0.7 μm 이하이며 화학조성상 Ni_3Al 에 가까웠으며 격자구조도 $L1_2$ 를 나타내었다. 반면에 공정조직에 가까울수록 γ' 크기는 1.0 μm 보다 컸으며, 모양도 판상형의 거대한 모양으로 바뀌었다. 화학조성 또한 Ni_3Ti 에 가까웠으며 격자구조도 DO_{24} 를 나타내었으므로 수지상과 공정조직의 γ' 석출물은 화학조성 및 격자구조가 상이함을 알 수 있었다.

Abstract A single crystal cast blade was manufactured by CMSX 6, one of the first generation nickel based single crystal superalloys by the selector method in a vacuum furnace. The single crystal has been grown with cooling rate of 2.5 mm/min, after pouring the molten alloy of 1630℃ to the mold heated to 1500℃. The cast structure could be classified into matrix (dendrite) and eutectic regions in γ' shape and size. The eutectic region showed higher Ti content. As the additional results of γ' precipitates by EPMA and CBED analysis the γ' size was less than 0.5~0.7 μm , showing the chemical composition close to Ni_3Al of $L1_2$ lattice structure. But γ' size has increased to bigger than 1.0 μm , being near to eutectic region, changing its shape to bar or huge block types. These showed the chemical structure near to Ni_3Ti of DO_{24} lattice structure. Therefore, γ' morphology of dendrite and eutectic regions depends absolutely on its chemical composition and lattice structure.

1. 서 론

열병합 발전 및 항공기용 가스터빈 기술은 국가 지지기반 기술로서 일부 선진국에서만 보유하고 있다. 여기서 주조 블레이드 기술은 또한 가스터빈 핵심기술로서 사용온도를 높이는 것이 지속적인 연구목표다. 즉, 고온강도를 향상시키는 것이 가스터빈의 핵심기술이라 할수 있으며, 주로 석출물(γ') 모양, 크기 및 부피분율에 따라 고온강도가 결정되는 것으로 알려져 있다.¹⁾ γ' 에는 석출물크기에 따라 제1차 및 제2차가 있으며 크기가 각각 > 0.5 μm 및 < 50 nm이다.²⁾ 일반적으로 단결정 블레이드의 주 응력방향이

[001]인 경우 체심입방정의 원자충진율이 가장 적어 열피로에 강하고, 또한 전위의 주 슬립면이 아니므로, 가장 우수한 기계적특성을 가진다고 알려져 있다.^{3~7)}

주조조직은 대개 기지와 공정조직으로 분류하며 γ' 은 그 모양과 크기가 거의 균질하게 분포된 것으로 알려져 있다. 그러나, 최근 각종 니켈계 초합금에서 주조조직은 더욱 세분되는 것으로 보고되고 있다.⁸⁾ 이를테면 기지는 γ' 의 모양과 크기에 따른 세영역으로 분류되며, 공정조직 또한 두영역으로 세분되었다.⁹⁾ 즉, γ' 은 기지 중앙에서 공정조직으로 접근함에 따라 γ' 크기가 점차적으로 커지며 이에 따라 γ' 의 화학조성도 Ni_3Al 에서 Ni_3Ti 로 바뀌어간다고

보고하고 있다. 그러나 이러한 화학조성변화에 따른 γ' 구조에 대한 연구결과가 없다.

따라서 본 연구에서는 전형적인 단결정 주조합금인 CMSX 6를 사용하여 [001] 방향으로 단결정을 성장시키는 주조공정으로 시편을 제작하고 결정성장에 따른 석출물의 모양, 크기 및 화학조성 등을 자세히 관찰하여 화학조성에 따른 γ' 모양과 크기 및 구조 등의 상관관계를 이해하고자 하였다. 화학조성은 EPMA (Electron Probe Micro Analysis) 의 WDS (Wavelength Dispersive Spectroscopy) 로, Morphology에 따른 γ' 격자구조는 STEM (Scanning Transmission Electron Microscopy) 에서 CBED (Convergent Beam Electron Diffraction) 법으로 분석하였다.

2. 실험 방법

니켈계 단결정 초합금인 CMSX 6를 셀렉타법으로 진공 정밀주조하여 단결정 주조를 수행하였다. 주형온도는 약 1500°C, 합금용탕 주입온도는 약 1630°C의 조건에서 주조하였으며, 주조 직후 주형을 2.5 mm/분 속도로 하강시켜 단결정을 성장시켰다. CMSX 6는 Cannon Muskegon사의 제1세대 단결정으로서 그 화학조성은 표 1과 같다.

세라믹 주형은 colloidal silica와 알루미늄 flour를 약 1:3.5의 비로 혼합하여 계면활성제 및 소포제를 첨가한 slurry를 준비하여 기 조립된 왁스모형을 slurry에 담근후 알루미늄 분말을 stucco재로 사용하여 12회 코팅한 후 항온, 항습 조건에서 건조시켰다. 건조된 주형은 autoclave에서 약 7 kgf/cm² 압력으로 20분간 탈락스한 후 1100°C의 전기로에서 잔류왁스 제거 및 소성하여 세라믹 주형의 고온강도를 갖도록 하였다.

주조 블레이드의 표면조직을 관찰하기 위해 블레이드 표면을 샌드 블라스팅한 후, HCl+H₂O₂ 용액으로 매크로 에칭하여 결정립계 및 아결정립의 존재 유무를 조사하였다. 수지상과 공정조직을 광학현미경으로 관찰하였으며 시편표면은 FeCl₃(10.4g)+HCl(50ml)+HNO₃(154ml)로 에칭하였다. 주조 조직내의 석출물 γ' 의 크기 및 분포 그리고 각 위치별 성분분석을 위해 광학현미경, 주사전자현미경, 투과전자현미경, EPMA로 관찰하였다. 이때 HNO₃(13ml)+CH₃OH(87ml) 용액을 사용하여 10°C, 20V 조건에서 전해에칭하여 γ' 을 관찰하였고 기지(γ) 관찰을 위해서는 같은 용액으로 10°C에서 화학에칭하여 γ' 을 용해시켰다. 전해에칭은 기지(γ)를 녹히며, 화학에칭은 γ' 석출물을 녹인다. (S)TEM 시편은 표준시편으로 연마한 후 Acetic acid와 Perchloric acid를 9:1로 혼합한 용액을 -20°C 이하의 온도를 유지하여 Jet polishing하였다.

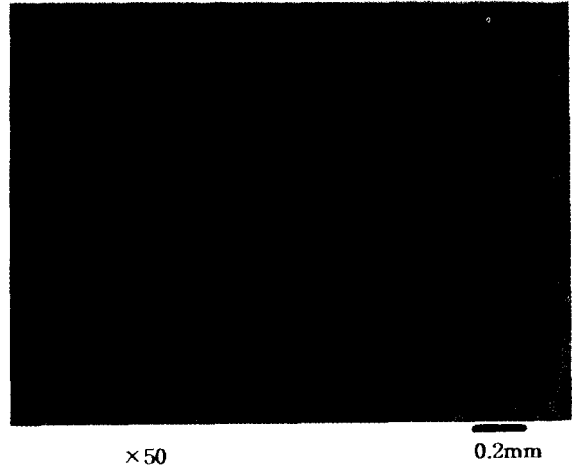


Fig. 1. Optical microscope image showing the dendrite and eutectic.

3. 실험 결과 및 고찰

3.1. 광학현미경 관찰

그림 1은 단결정 주조 블레이드를 광학현미경으로 관찰한 결과이다. 본 연구에서 시 제작한 단결정 블레이드는 전 시편에 걸쳐 수지상과 공정조직이 균질하게 발달하였으며, 수지상 간격 (dendrite arm spacing, DAS)도 매우 균일하였다.

3.2. 주사전자현미경 관찰과 EPMA분석

단결정 블레이드의 미세조직을 체계적으로 관찰하고 분석하기 위하여 γ' 석출물을 SEM으로 관찰하여 그림 2에 나타내었다. morphology적으로 수지상 (dendrite, D) 및 공정 (eutectic, E or EU) 그리고 수지상-공정의 천이 (transition, T or DE) 영역 등으로 구분되었다.¹⁰⁾ 그림 2에 의하면 D 영역 (DC: Dendrite Center)에서 T 영역 (DE: Dendrite Edge)으로 갈수록 γ' 상의 크기는 0.6 μ m에서 0.8 μ m 정도로 증가하였다. 그림 3은 기지내의 γ' 상의 고해상도 조직사진을 나타낸 것인데 0.5 μ m 크기의 제1차 γ' 상 사이의 기지 영역에 50nm 이하 크기의 γ' 이 균질하게 분포되어 있었다. 이러한 작은 제2차 γ' 은 제1차 γ' 에 접해 있는 것으로 보아 Ma 등¹¹⁾의 보고서와 같이 미세한 γ' 은 제1차 γ' 의 조대화에 기여하는 것으로 판단된다. 반면에 EU영역에서는 2차 γ' 이 전혀 관찰되지 않고, lamellar 형태의 γ' 이 존재하며, 외곽으로 갈수록 거대한 판상의 γ' 이 관찰되었다. γ' 석출물 크기와 모양이 위치에 따라 다른 이유는 첫째, D영역에 비해 T영역 그리고 E영역으로 갈수록 γ' 상의 부피분율이 증가하여 조대화 속도가 더 크기 때문인 것으로 판단된다. 이러한 조대화

Table 1. Nominal composition of CMSX 6 ingot(Cannon-Muskegon Co.)

| Element | Ni | Cr | Mo | Al | Co | Ti | Ta | Hf | Zr |
|---------|------|-----|-----|------|-----|------|-----|------|--------|
| wt% | Bal. | 9.8 | 3.0 | 4.82 | 4.9 | 4.71 | 2.0 | 0.06 | <10ppm |

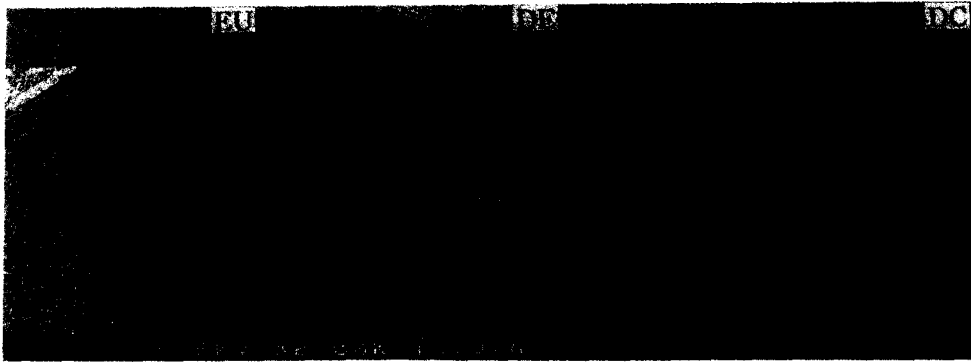


Fig. 2. High resolution FE-SEM image showing the evidence of single crystal, where all γ' directions are same independent on the matrix and eutectic area. EU : Eutectic region, DE : Dendrite edge and DC : Dendrite center(DC).

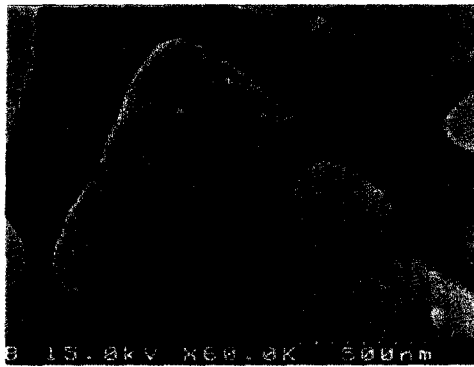


Fig. 3. High resolution FE-SEM image showing the existence of small γ' embedded in the matrix between origin γ' of about 0.5-1.0 μ m.

속도차이는 단결정 주조시 주형 하강속도가 2.5 mm/분으로 느리기 때문에 γ' 석출후 보통의 시효온도 근처에서 약 2시간 유지되어 석출된 γ' 의 조대화에 필요한 충분한 여유를 제공하기 때문인 것으로 사료되며, 둘째 D에서 T 그리고, E 영역으로 갈수록 γ' 은 상호 응집에 의해 모양 그리고, E 영역으로 갈수록 γ' 은 상호 응집에 의해 모양이 변하면서 그 크기도 증가하며, 이러한 현상은 석출물의 화학조성에 따라 크게 좌우될 것으로 사료되었다. 따라서 EPMA에서 WDS 분석한 결과⁹⁾ D영역과 T영역의 화학 조성은 거의 유사하나 그 중 Ti 함량이 T영역에서 증가하였고(표 2참고), E영역에는 Ti, Ta 량은 증가한 반면, Cr,

Mo, Co 함량은 감소하였다. 또한 E영역중 T영역에 가까운 곳에서는 lamellar 형태의 γ' 이 관찰되며 T영역에서 멀어질수록 판상의 γ' 이 형성되었다. Lamellar 형태의 γ' 에 비해 판상의 γ' 영역이 Ti 함량은 증가하고 Cr, Mo량은 감소한 반면, Co, Al, Ta 등은 큰 변화가 없었다. 이러한 영역별 조성차 원인으로는 첫째, E영역에서의 γ' 부피분율이 커서 γ' 형성원소인 Ti, Ta 양이 상대적으로 증가하기 때문이며,¹²⁾ 둘째로는 공정조직이 Ni₃Ti에 가까운 γ' 을 형성하므로 공정조직은 수지상(기지)에 비하여 상대적으로 Ti 함량이 과포화 상태이며 이석출물은 고온에서 안정하다. 따라서, 공정조직에 있던 Cr, Mo 등의 원소들은 수지상(기지)으로 방출되고 이들은 γ' 형성을 방해하므로 수지상의 γ' 부피분율은 공정조직에 비하여 감소하는 것으로 보고하고 있다. 셋째로는 이러한 합금원소들의 확산 속도 차이로 인하여 γ' 조성이 응고 진행순서에 따라 차이가 발생하여 기지는 비교적 균질한 크기와 모양의 γ' 이 Ni₃Al에 가까운 화학조성을 가지며 성장하나, 공정조직 혹은 이에 가까와 질수록 γ' 의 크기가 증가하며 동시에 모양이 판상 등으로 바뀌어 가며, 공정조직에서는 γ' 의 화학조성이 Ni₃Ti에 가까운 막대형 및 거대한 석출물로 발달하는 것으로 보고하고 있다. 이러한 γ' 화학조성에 따른 격자구조를 분석하기 위하여STEM에서 CBED법을 사용하여 다음장에서 나타내었다.

3.3. (주사)투과전자현미경에 의한 관찰

주사전자현미경에서 단결정 주조조직은 모두 γ' 으로 구성되고 있었으며, 공정과 기지의 화학조성차이에 따라 γ' 의 모양과 크기가 상이함을 알 수 있었다. 즉, γ' 의 morphology와 크기에 따라 화학조성의 차이가 있으므로, 이에

Table 2. EPMA results in the cast single crystal blade of CMSX 6.

| Position | Element(wt%) | | | | | | | | |
|----------|--------------|------|------|------|------|------|------|-------|----|
| | Ni | Cr | Mo | Al | Co | Ti | Ta | Zr | Hf |
| D | 70.8 | 8.74 | 2.72 | 5.55 | 4.54 | 4.71 | 2.84 | 0.083 | 0 |
| T | 69.2 | 8.12 | 2.30 | 5.59 | 4.16 | 7.23 | 3.31 | 0.097 | 0 |
| E | 72.6 | 4.66 | 1.46 | 5.85 | 3.72 | 7.87 | 3.75 | 0.084 | 0 |

* D: dendrite, T: transition, E: eutectic region

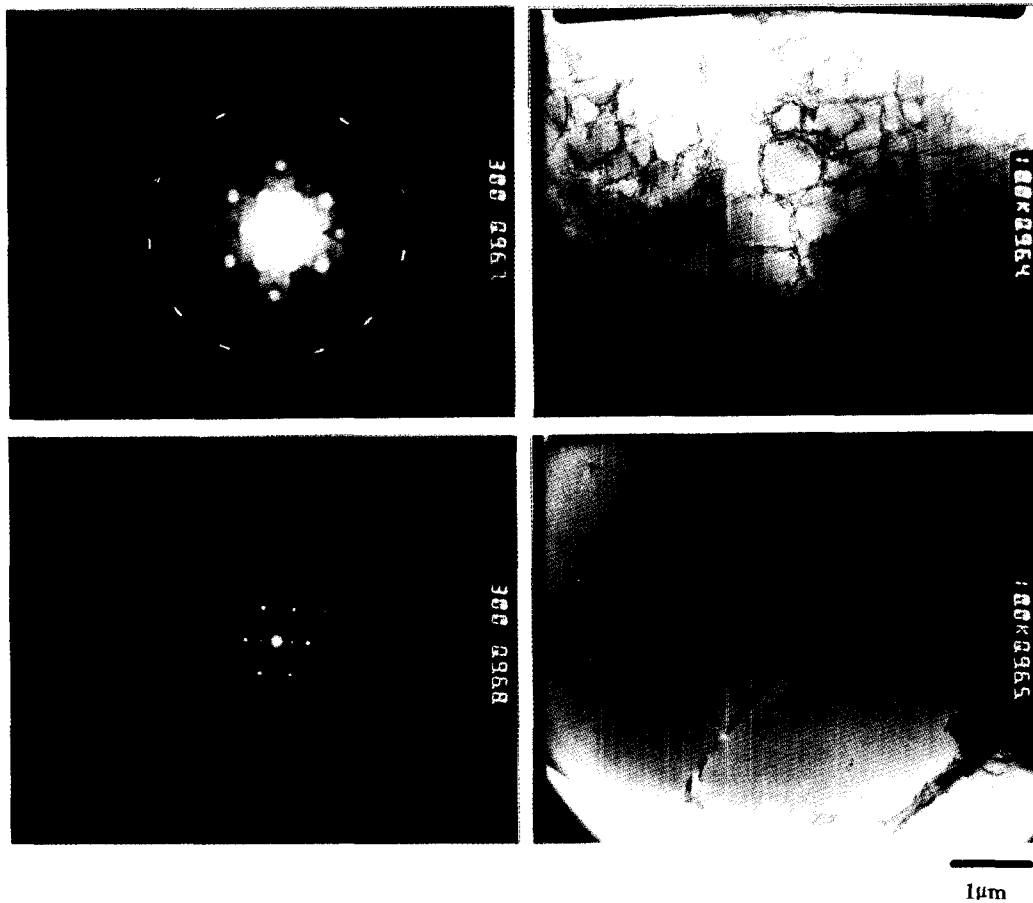


Fig. 4. (S)TEM images(above right) and CBED pattern(above left) and SAD Diffraction pattern(bottom left) in the single crystal cast blade showing the difference in γ' morphology; the (S)TEM image(above right) shows different sizes of γ' , the left area has the bigger γ' . The left and right areas are same as DE and DC in Fig. 4; Dendrite edge(DE), Dendrite center(DC), The bottom right image shows eutectic area.

Table 3. Measured lattice parameters of γ' in different shapes by CBED method on (S)TEM.

| | Morphology | Q(MM) | P ₂₂₀ (mm) | Q/P | a ₀ |
|---|------------|-------|-----------------------|--------|----------------|
| E | cubic | 41.4 | 111.6 | 0.3710 | 3.5660 |
| T | bar | 40.0 | 111.0 | 0.3604 | 3.5727 |
| U | plate | 40.1 | 111.1 | 0.3609 | 3.5723 |

따른 격자구조 및 격자상수의 차이가 예상되었다. 따라서 (S)TEM에서는 공정조직 및 기지의 γ' 모양과 화학조성 및 격자상수의 상관관계를 관찰하였다. 그 결과 투과전자현미경 구조는 그림 4의 우측 사진과 같다. 즉, 우측하단 사진은 공정조직을 나타내며, 우측상단 사진은 기지내의 γ' 구조로서 왼편은 γ' 크기가 약 $0.8\mu\text{m}$ 인 T영역이고, 우편은 γ' 크기가 약 $0.6\mu\text{m}$ 인 D영역이다. 공정과 기지에서 App. 1의 방법에 따라 CBED에서 γ' 격자상수를 측정된 결과를 표 3에 나타내었으며, γ' 격자상수는 기지에서 공정조직으로 옮겨 갈수록 3.566 \AA 에서 3.572 \AA 으로 증가함을 알 수 있었다. 이러한 결과는 이미 EPMA 결과(표 2)에서 언급한 바와 같이 γ' 의 화학조성은 기지에서 공정조직으로 옮겨 갈수록 Ti함량이 증가하고, 일반적으로 원자 크기(최인접원자간 거리)는 $\text{Ti}(2.95\text{ \AA}) > \text{Al}(2.86\text{ \AA}) > \text{Ni}(2.49\text{ \AA})$ 이므로 STEM에서 γ' 격자상수는 기지에서 공정조직으로 옮겨 갈수록 증가하는 것을 입증해 주었

다. 그러나 표 3에서 공정근처에서의 γ' 격자상수는 3.572 \AA 로 동일하였다. 이러한 이유는 공정에 있는 γ' 은 Ti 함량이 상대적으로 높으므로 격자상수가 당연히 크므로 기지(E) 보다는 확실히 크나, 격자구조상 DO_{24} 의 tetragonal구조를 하므로 본연구에서와 같이 시편을 (001) 면을 채취한 후에 결정성장방향과 동일한 z방향으로 전자빔을 입사하면 DO_{24} 와 L1_2 의 투과된 회절빔강도는 동일하게 된다. 이 때문에 표 3에서 T와 U의 γ' 격자상수는 3.572 \AA 로 동일하게 나타나는 것으로 사료된다. 만약 전자빔 입사방향이 z축에 수직할 경우 즉, (010)면이나 (100]면일 경우에는 U의 γ' 격자상수는 3.572 \AA 보다 클 것으로 추정되므로, γ' 은 화학조성에 따라 Ni_3Al 과 Ni_3Ti 는 각각 상이한 격자구조인 L1_2 와 DO_{24} 를 가지며 격자상수도 다를 것으로 예상된다. 여기서 L1_2 는 입방정이므로 격자상수가 동일하나 DO_{24} 는 tetragonal 격자구조 이므로 격자상수가 방향에 따라 상이하다(App. 1참고). 즉, Ti가 증가할수록 격자상수도 상대적으로 증가하나 격자상수 측정시 DO_{24} 격자에서는 CBED 전자입사빔 방향에 따라 격자상수의 차이가 발생함을 유의하여야 한다. 이러한 격자상수와 화학조성의 분석결과는 표 2와 표 3에 나타내었으며, 입방정은 Ni_3Al 에 가까운 γ' 으로서 격자상수 3.566 \AA 에 비하여 DE 및 EU영역에 있는 봉상 및 판상형태의 γ' 은 화학조성상 Ni_3Ti 에 가까운 화학조성을 가지며 격자상수도 3.572 \AA 로서

입방정모양의 γ' 격자상수 보다 컸다(App. 2참고).

따라서 위와 같은 결과들로 볼 때 γ' 의 morphology는 크기 및 화학조성에 영향을 받고, 또한 격자구조 및 격자상수에도 논리적인 상관관계가 존재함을 알 수 있었다.

4. 결 론

니켈계 초합금 CMSX 6를 진공정밀 주조하여 단결정 블레이드를 제작하였으며, γ' 의 화학조성이 γ' 의 모양 및 격자구조에 미치는 영향을 관찰하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 1) 주조조직은 수지상 거리가 약 450 μm 로서 균질한 수지상 및 공정조직을 보였다.
- 2) γ' 의 크기는 수지상영역(0.5~0.7 μm)에서 공정영역(~1.0 μm)으로 갈수록 증가하였고, 공정영역 내부에는 판상의 γ' 이 존재하였다. 또한 기지내의 큰 γ' 사이에는 ~50nm 크기의 γ' 이 존재하였다.
- 3) γ' 의 화학조성은 기지에서 공정조직으로 갈수록 Ni₃Al에서 Ni₃Ti로 바뀌어 갔다.
- 4) CBED법에 의한 격자구조 분석에서도 γ' 은 기지에서 공정영역으로 가까워 질수록 Ni₃Al의 L1₂구조에서 Ni₃Ti의 DO₂₄로 바뀌어 갔다.
- 5) 기지에서 공정조직으로 옮겨가면서 격자상수가 증가하는 경향이 나타났는데 이것은 공정조직으로 갈수록 Ti양이 증가함으로써 생기는 현상으로 사료된다.
- 6) 수지상(기지)과 공정조직의 γ' 의 모양과 크기는 γ' 의 화학조성에 의존하며 이러한 γ' 의 화학 조성 때문에 격자구조도 변화함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. B. Reppich, Acta Metall. **30**, 87(1982)
2. B. Reppich, P. Schepp and G. Wehner, Acta Metall. **30**, 95(1982)
3. G.R. Leverant and B.H. Kear, Metall. Trans. **1A**, 491 (1970)
4. P. Caron and T. Khan, Mater. Sci. Eng. **61**, 173 (1983)
5. M.V. Nathal and L.J. Ebert, Metall. Trans. **16A**, 427(1985)
6. R.A. Mackay and L.J. Ebert, Metall. Trans. **16A**, 1969(1985)
7. C. Carry and J.L. Strudel, Acta Metall. **26**, 859 (1978)
8. 안성욱, 김수철, 임옥동, 서동이, 한국재료학회지 (1996) 제6권 제9호 p. 871-877
9. 안성욱, 진영훈, V. Larionov, I. Grafas, 임옥동, 허무영, 대한금속학회지 (1998) 개재예정
10. Y.F. Han and S.H. Li Mat. Sci. & Eng. **A160**, 271 (1993)
11. D. Ma and P.R. Sahm, Acta Metall. **40**, 251 (1992)
12. C.T. Sims and W.C. Hagel, The Superalloys, John Wiley & Sons, New York (1972)

< Appendix 1 > : App. 1

Lattice parameter calculation by using CBED method
투과원반 중심으로부터 HOLZ 선까지의 거리, Δ 는

$$\Delta = L \left(\frac{g}{2k} - \frac{H}{g} \right)$$

$$L = \frac{P}{\lambda} d_{220} = P \frac{k}{g_{220}}$$

Zone axis <111>에서 HOLZ 도형을 얻어 [971] HOLZ 선을 이용하여 격자상수를 계산하고자 하는 경우,

$$\frac{Q}{3} = \frac{Pk}{g_{220}} \left(\frac{g_{971}}{2k} - \frac{H_{111}}{g_{971}} \right)$$

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2} \sqrt{131}}{\sqrt{3}k} \left(\frac{3\sqrt{131}}{4\sqrt{2}} - \frac{Q}{P} \right)$$

where Δ : 투과원반 중심에서 HOLZ 선까지의 거리

L : Camera length

λ : Electron wavelength (1/k) (0.03348Å at 120 keV)

P : 투과원반 (000)과 {220} 원반간의 거리

Q : {971} HOLZ 선으로 이루어진 정삼각형의 높이

H : Laué 층 간격

참조) 원자크기(최인접원자간 거리)

Ti(2.95Å) > Al(2.86Å) > Ni(2.49Å)

Ni₃Al : L1₂ 구조, a=3.56Å, A=4,

atomic volume=11.279Å³/atom

Ni₃Ti : DO₂₄ 구조, a= 5.10Å, c=8.30Å, A=16,

atomic volume=11.685Å³/atom

< Appendix 2 > : App. 2

Lattice parameter calculation by using CBED method

Miller 지수 (uvw)에 따른 역격자 층의 간격 (H)

| Crystal Class | $ U ^{-1}$ |
|----------------------------|---|
| monoclinic | $[u^2a^2 + v^2b^2 + w^2c^2 + 2uvwac \cos \beta]^{-1/2}$ |
| orthorhombic | $(u^2a^2 + v^2b^2 + w^2c^2)^{-1/2}$ |
| hexagonal and rhombohedral | $[(3a^2/2)(u^2 + v^2 + t^2 + \lambda w^2)]^{-1/2}$ |
| tetragonal | $[a^2(u^2 + v^2) + c^2w^2]^{-1/2}$ |
| cubic | $a^{-1}(u^2 + v^2 + w^2)^{-1/2}$ |

where $\lambda^2 = (2/3)(c/a)^2$

$H_{uvw} = p |U|^{-1}$

F centered lattice(orthorhombic or cubic)

p=1 if u+v+w=odd

p=2 if u+v+w=even

I lattice(orthorhombic, tetragonal or cubic)

p=2 if u, v, w are all odd

p=1 otherwise

C lattice(monoclinic or orthorhombic)

p=2 if u and v are odd

and w even p=1 for all other u, v, w