Karmarkar's & Primal-Dual 내부점 알고리즘의 해의 수렴과정의 안정성에 관한 고찰
-A Study of stability for solution's convergence in Karmarkar's & Primal-Dual Interior Algorithm -

박 재 현*
Park, Jae Hyun

Abstract

The researches of Linear Programming are Khachiyan Method, which uses Ellipsoid Method, and Karmarkar, Affine, Path-Following and Interior Point Method which have Polynomial-Time complexity. In this study, Karmarkar Method is more quickly solved as 50 times then Simplex Method for optimal solution. but some special problem is not solved by Karmarkar Method. As a result, the algorithm by APL Language is proved time efficiency and optimal solution in the Primal-Dual interior point algorithm. Furthermore Karmarkar Method and Primal-Dual interior point Method is compared in some examples.

1. 서론

선형계획법(Linear Programming)에서 Polynomial-Time 내의 계산 복잡도를 갖는 해법의 연구는 타원체(Ellipsoid)방법을 이용한 Khachiyan 기법과 Polynomial-Time Complexity를 갖는 Karmarkar 기법, Affine 기법, 경로 추적법(Path-Following Method), 기타 내부점 방식(Interior Point Method) 등이 연구 되어져왔다. 여기서 Karmarkar기법은 단체법(Simplex Method)보다 50 times나 빠르게 해에 수렴하며 Ellipsoid Method 보다 최악의 경우의 시간 복잡도 면에서 우수하다고 증명 되었으나[9] 특정한 수치예로 목적함수값의 변화에 따라 최적해를 구하지 못한 문제가 발생하였다[2]. 이러한 특정한 문제의 Case를 가지고 목적함수 값 "c"에 영향을 받지않고 계산을 수행하는 Primal-Dual 내부적 방식이 Karmarkar's 알고리즘의 최적해를 찾는 계산의 수행보다 최적해를 찾는 계산 과정에서 안정적이고 우수함을 APL 언어 프로그램을 가지고 알고리즘을 수행하여 확인하고자 한다.

Primal-Dual 내부점 알고리즘에서 초기해 설정은 Lustig이 제시한 방법을 사용 Big M 값과 무관하게 항시 내부점 영역안에서 초기해가 존재하도록 하였으며, 이 초기해는 Big M값인 λ와 κ를 구하기란 매우 어렵고, 수리적 불안정성을 배제할 수 없기에 λ와 κ를 극한으로 보내 Big M값의 영향을 제한시켜 놓은 상태에서 알고리즘을 수행, 초기해를 구하는 방법을 이용하였다.

---

* 명지대학교 대학원 박사과정

2. 알고리즘의 이론적 배경

선형계획법 문제의 모형은 정규형(Canonical from), 표준형(Standard form), 계산형(Computational form)으로 표현할 수 있다. 표준형의 선형계획법 문제는 아래와 같이 표현할 수 있다

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Minimize} & c^T x \\
(P) & \text{subject to} & x \in S = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Maximize} & b^T y \\
(D) & \text{subject to} & (y,z) \in T = \{(y,z) \in R^{m+n} : A^T y + z = c,\ z \geq 0\}
\end{array}
$$

(단, A는 $m \times n$행렬. b, c 는 m, n 크기의 벡터)

위 식에 Barrier function을 도입한 모형은 다음과 같다.[3, 5, 6]

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Minimize} & c^T x - \mu \sum \log x_j \\
(P\mu) & \text{subject to} & Ax = b \\
 & & x \geq 0 \\
 & & (x \in S^I)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Maximize} & by + \mu \sum \log z_j \\
(D\mu) & \text{subject to} & A^T y + z - c = 0 \\
 & & y,\ z \geq 0 \\
 & & (y,\ z \in T^I)
\end{array}
$$

여기서 μ는 임의의 양의 값인 Barrier Parmeter이고, 위 식은 다음과 같은 가정을 전제로 한다. [3, 5, 7]

가정 1 : 원 문제(P)의 음이 아닌 가능영역 S의 내부점 집합
$S^I \equiv \{x \in S;\ x \geq 0\}$에서 가능해가 존재한다.
가정 2 : 쌍대 문제(D)의 가능영역 T의 내부점 집합
$T^I \equiv \{(y,\ z) \in T;\ z \geq 0\}$에서 가능해가 존재한다.
가정 3 : 행렬 A는 완전계수(full row rank) m을 갖는다. (Rank A = m)

위 식의 원 문제 ($P\mu$)와 쌍대 문제($D\mu$)의 제약식에 Kuhn - Tucker 조건을 적용시켜 얻은 식으로부터 내부점 알고리즘에서 초기해가 존재한다면, 초기점 $(x^0,\ y^0,\ z^0) \in S^I \times T^I$가 되고 각각의 뉴턴 방향을 구하여 각 방향을 XZe와 μe에 관해 풀면 다음과 같다.[8]

$$
\begin{aligned}
\Delta x(\mu) &= [Z^{-1} - Z^{-1}XA^T(AZ^{-1}XA^T)^{-1}AZ^{-1}](XZe - \mu e) \\
\Delta y(\mu) &= -(AZ^{-1}XA^T)^{-1}AZ^{-1}(XZe - \mu e) \\
\Delta z(\mu) &= A^T(AZ^{-1}XA^T)^{-1}AZ^{-1}(XZe - \mu e)
\end{aligned}
$$

$$\Delta y = \begin{array}{l} \Delta y^1 = -(AZ^{-1}XA^T)^{-1}b \\ \Delta y^2 = -(AZ^{-1}XA^T)^{-1}AZ^{-1}e \end{array} \quad (8)$$

$$\Delta z = \begin{array}{l} \Delta z^1 = -A^T \Delta y^1 \\ \Delta z^2 = -A^T \Delta y^2 \end{array}$$

$$\Delta x = \begin{array}{l} \Delta x^1 = Xe - XZ^{-1}\Delta z^1 \\ \Delta x^2 = Z^{-1}e - XZ^{-1}\Delta z^2 \end{array}$$

여기서 Δx^1, Δy^1, Δz^1은 Duality gap을 줄이는데 사용되고 Δx^2, Δy^2,Δz^2는 Barrier Function μ에 대한 식으로 변수 x, z를 Centering하는데 사용된다. 또한 Parameter α^k와 μ^k는 $x^k \geq 0$, $z^k \geq 0$ 를 만들기 위해 제한해 주는 임의의 변수로 α^k는 반복에서의 문제의 크기를 제한해 주는 Step Length로써 각 반복에서 원-쌍대 문제에서의 α^k는

$$\alpha_P{}^k \leq x^k \div [\Delta x_1{}^{k+1} - (\mu^k \Delta x_2{}^{k+1})]$$
$$\alpha_D{}^k \leq z^k \div [\Delta z_1{}^{k+1} - (\mu^k \Delta z_2{}^{k+1})]$$

$$\alpha^k \leq \min[(\alpha_P{}^k,\ \alpha_D{}^k) \geq 0] \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

또한 $\mu^k < (d^k / n)$ (단 $k = 0, 1, \cdots, n$) 는 원-쌍대 가능(feasible primal-Dual) 변수 (x^k, y^k)에서의 Duality Gap으로 $d^k = c^Tx^k - b^Ty^k$ 라 놓으면 그 방향들은 $c^T\Delta x^1 - b^T\Delta y^1 = d^k$이고, $c^T\Delta x^2 - b^T\Delta y^2 = n$ 이라는 특성을 가는 Parameter로 $\mu^k = d^{k+1} = d^k - \alpha^k(d^k - n\mu)$이다.[2]

3. 초기 가능해 모형

Primal-Dual 내부점 알고리즘 초기 가능해의 모형

$$\text{(BP)} \quad \begin{array}{lll} \text{Minimize} & c^Tx + \kappa x_{n+1} & \\ \text{subject to} & Ax + (b - Ax^0)\, x_{n+1} = b & \\ & (A^T y^0 + z^0 - c)^T x & + x^{n+2} = \lambda \\ & & (x, x^{n+1}, x^{n+2}) \geq 0 \end{array}$$

$$\text{(BD)} \quad \begin{array}{lll} \text{Maximize} & b^Ty + \lambda y_{m+1} & \\ \text{subject to} & A^Ty + (A^Ty^0 + z^0 - c)y_{m+1} + z & = c \\ & (b - Ax^0)y \qquad + z_{n+1} & = x \\ & z_{n+1} + z_{n+2} & = 0 \\ & (z, z_{n+1}, z_{n+2}) \geq 0 & \end{array}$$

위 식은 λ와 μ에 대한 Big M 이며 초기해를 구하는 과정이 포함되어있다. 위 식에 의해 구해진 임의의 초기 가능해로부터 시작해 매 반복에서의 점이 $(x^k, y^k, z^k) \in S^I \times T^I$ 를 만족하는 해를 구하고 내부점 알고리즘을 진행한다.

대 M값을 배제한 상태에서 뉴턴 방향은 다음과 같이 변화한다.(2)

$$x^{k+1} \leftarrow x^k - (\alpha^k \Delta x'^1 - \mu^k \Delta x^2)$$
$$y^{k+1} \leftarrow y^k - (\alpha^k \Delta y'^1 - \mu^k \Delta y^2)$$
$$z^{k+1} \leftarrow z^k - (\alpha^k \Delta z'^1 - \mu^k \Delta z^2)$$

$$x_{n+1}^{k+1} \Leftarrow x_{n+1}^{k} - \alpha^k x_{n+1}^{k}$$
$$y_{n+1}^{k+1} \Leftarrow y_{n+1}^{k} - \alpha^k y_{n+1}^{k}$$

여기서 방향 $\Delta x'^1$, $\Delta y'^1$, $\Delta z'^1$은 다음과 같다.

$$\Delta y'^1 = -(AZ^{-1}XA^T)^{-1}\,[b - (y^k_{m+1})AXZ^{-1}d_D]$$
$$\Delta z'^1 = -A^T \Delta y'^1 - y^k_{m+1}d_D$$
$$\Delta x'^1 = Xe - XZ^{-1}\Delta z'^1$$

4. 초기해 설정

Primal-Dual 내부점 방식에서 다음과 같은 초기해 선택 방법을 사용하였다. (2)

$-x_j$의 초기점은 문제의 크기에 상관없이 $1 \le j \le n$ 일 때

$$x_j^0 = \| b \| \,/\, \| a_j \| \qquad (a_j\text{는 A의 열 벡터성분})$$

으로 놓고, z_j의 초기점은 $1 \le j \le n$ 일 때

$$z_j^0 = \begin{cases} c_j & \text{if } c_j > 0 \\ \| c \| - c_j & \text{if } c_j \le 0 \end{cases}$$

에서 구한다. 또한 y_j의 초기점은 다음에서 선택한다.

$$y_j^0 = \begin{cases} -1 & \text{if, i'th 제약식이 } A_i x < b_i \\ 1 & \text{if, i'th 제약식이 } A_i x > b_i \\ 0 & \text{if, i'th 제약식이 } A_i x = b_i \end{cases}$$

단, $(x_j^0, y_j^0, z_j^0) \in R^m \times R^n$
$x_j^0 \ge 0,\ (y_j^0, z_j^0) \ge 0$

위에서 구한 초기 가능해로 알고리즘을 수행하도록 한다.

5. Karmarkar's & Primal-Dual 내부점 알고리즘에서 해의 수렴 안정성에 대한 비교

내부점 알고리즘은 다음의 세 가지 수행절차를 거치며 각 단계별 수행은 $(A\,Z^{-1}X\,A^{T})$를 계산하는데 약 90%의 계산시간을 차지한다. [5]

첫째로,정의된 문제를 가지고 초기해를 설정하는 작업.

둘째로, 각 변수의 방향을 계산하는 방법

셋째로, Parameter α^{k}와 μ^{k}값을 결정하는 작업

목적함수 값이 다른 다음 경우의 문제를 가지고 Karmarkar's 알고리즘과 내부점 방식 알고리즘의 수행에 있어서의 계산의 안정성에 대해 살펴 보았다.

문제) - 동일한 Subject에서 목적함수 값이 다른 경우

$$
\begin{aligned}
&\text{Case 1 : Minimize} && x_1 - 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 15x_7 + 7x_8 \\
&\text{Case 2 : Minimize} && 14x_4 + 5x_5 + 3x_6 + x_7 + 4x_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Subject to}\quad & x_1 + x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 4x_7 + 2x_8 = 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 18x_3 + 7x_4 + 6x_5 - x_6 - 2x_7 + 3x_8 = 0 \\
& 3x_1 + 4x_2 - 25x_3 + 10x_4 + 3x_5 + x_6 - 2x_7 + 6x_8 = 0 \\
& -x_1 - x_2 + 11x_3 - 8x_4 - 8x_6 + 3x_7 + 5x_8 = 0 \\
& 4x_1 + 5x_2 - 32x_3 + 12x_4 + 13x_5 - 6x_6 + x_7 + 3x_8 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1
\end{aligned}
$$

- <Case 1, 2>와 동일한 최적해를 갖는 문제에서 Subject가 변화한 경우

$$
\text{Case 3 : Minimize} \quad x_1 - 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 15x_7 + 7x_8
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Subject to}\quad & x_1 + x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 4x_7 + 2x_8 = 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 18x_3 + 7x_4 + 6x_5 - x_6 - 2x_7 + 3x_8 = 0 \\
& 6x_4 - 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + x_8 = 0 \\
& 2x_4 + 4x_5 - 9x_6 - 3x_7 + 6x_8 = 0 \\
& 11x_4 + 3x_5 - 5x_6 - 5x_7 - 4x_8 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\
& x_i \geq 0,\ (i = 1, \cdots\cdots, 8)
\end{aligned}
$$

5-1. Karmarkar's 알고리즘의 수행

<Case 1, 3 문제의 경우>

<Case 1>과 <Case 3>의 문제를 가지고 Karmarkar's 알고리즘을 수행할 경우 최종적으로 최적기저 및 최적해를 구할 수 없음을 Miraslav D. Asic. Vera V. Kovacevic-Vujcic[4]의 논문에서 밝힌바 있다.

이러한 이유는 Karmarkar 문제의 변환공간에서 해 개선 방향인 $c_p(x)$가 다음 식과 같으며 이식에서 목적함수 'c'값이 포함되어있기 때문이라 판단된다.

$c_p = c_p(x^k) = [I - B^T(BB^T)^{-1}B]Dc$

여기서 $B = B(x^k) = \begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}$ 이므로 이식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$c_p(x^k)=[I - DA^T(AD^2AT)^{-1}AD]Dc - e\ c^Tx^k / n$

(단, $D = D(x^k) = diag(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m)$, AD는 완전계수, $ADe = Axk = 0$

여기서 $e^Tc_p(x^k) = c^Tx^k$이다.) (1, 4)

그런데 Karmarkar 기법에서의 $e^Tc_p(x^k)$ 는 내부점 방식 알고리즘에서 Duality gap 에 해당된다고 볼 수 있다.

$$d^k = c^T{}_px^1 - b^Tpy^1 = e^TXZ^{-1}e$$
$$e^Tc_p(x^k) \Rightarrow c^Tpx^1 - b^Tpy^1$$

위 식으로부터 $k \Rightarrow \infty$ 일 때 c^Tx^k 는 '0' 으로 접근하며, 이에 따라서 $c_p(x^k)$는 '0' 으로 수렴하게 된다. 그러나 $k \Rightarrow \infty$ 일 때 $Dc \Rightarrow 0$ 이 성립되지 않으면 $k \Rightarrow \infty$ 일 때 상대오차는 제약되지 못한다. [4]

<Case 1>과 <Case 3> 에서 $k \Rightarrow \infty$일 때 $Dc(x^k) = (0.375, 0, -0.375, 0, 0, 0, 0)$로 결국 $D(x^k)c \Rightarrow 0$를 만족하지 못하고 있음을 볼 수 있고 결국 최적해 x^*를 구하지 못한다.

<Case 2 문제의 경우>

Case 2 문제의 경우는 기저가 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8)$ 이고 목적함수의 계수가 예상기저에 따라 변화되며 계산의 수행이 반복되면서 Karmarkar's 알고리즘에서 결국에 최적기저 및 최적해를 구할 수 있다. [1,4]

이때 최적해는 $x^* = (0.375, 0.5, 0.125, 0, 0, 0, 0, 0)$ 이고, $k \Rightarrow \infty$일 때 $D(x^k)c = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$으로 $D(x^k)c \Rightarrow 0$을 만족하고 있다.

5-2. Primal - Dual 내부점 알고리즘의 수행

위 <Case 1, 2, 3>경우의 문제를 Primal-Dual 내부점 알고리즘을 사용하여 최적해를 구하면 다음과 같다.

<Case 1의 경우> 결과 : (Karmarkar's 알고리즘에서 최적해를 구하지 못한 문제)

Iteration	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
39	0.37486	0.50006	0.12507	0	0	0	0	0
40	0.37463	0.49640	0.12896	0	0	0	0	0

<Case 2의 경우> 결과

Iteration	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
39	0.37499	0.49999	0.12500	0	0	0	0	0
40	0.37500	0.49999	0.12500	0	0	0	0	0

<Case 3의 경우> 결과 : (Karmarkar's 알고리즘에서 최적해를 구하지 못한 문제)

Iteration	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
39	0.37499	0.49999	0.12500	0	0	0	0	0
40	0.37500	0.50000	0.12500	0	0	0	0	0

단, $\alpha = 0.4$, Iteration k = 40회
문제의 최적해 $X^* = (0.375, 0.5, 0.125, 0, 0, 0, 0, 0)$

이상의 3 가지 다른 경우의 문제에서 볼 수 있듯이 목적함수 값 'c' 가 Karmarkar's 알고리즘의 수행에 매우 중요한 영향을 미치고 있음을 알 수 있으며 본 논문에서 사용한 Primal-Dual 내부점 알고리즘의 경우를 살펴보면 Karmarkar's 알고리즘으로 해결할 수 없는 <Case 1>, <Case 3>의 경우 모두가 목적함수 값에 상관없이 최적해를 찾아 수렴함을 볼 수 있다. 이러한 이유는 $d^k = c^T px^1 - b^T py^1 = e^T XZ^{-1} e$, $e^T c_p(xk) \Rightarrow c^T px^1 - b^T py^1$에서 알 수 있듯이 목적함수 'c'는 Duality gap을 계산 하는데에 영향을 받을 뿐, 해의 개선 방향을 결정하는 아래와 같은 (식)에서는 영향을 받지 않고 또한, Primal-Dual 내부점 알고리즘의 경우 같은 반복 단계에서의 상보 여유정리 $XZ^{-1} = 0$을 만족하기 때문이라 판단된다.

(식) xk+1 xk - ak(x1 - k x2)
zk+1 zk - ak(z1 - k z2)

단,

x = x1 = Xe - XZ-1 z1 ; x2 = Z-1e - XZ-1 z2

z = z1 = -AT y1 ; z2 = -AT y2

6. 결 론

기존의 Karmarkar's 기법은 문제의 크기가 증가하는 선형계획법(Linear Programming) 문제의 최적해를 구하는데 유용하게 쓰여져 왔으나 문제 <Case 1, 3>의 경우 최적해를 구할 수 없었다. 이러한 문제를 알고리즘의 계산 과정에서 목적함수 'c'가 해의 개선 방향에 직접적인 영향을 미치지 않는 Primal-Dual 내부점 알고리즘에서는 <Case 1, 2, 3>의 경우 문제가 공히 동일한 최적해를 가지며 수렴하는 것을 볼 수있다. 이 결과는 Karmarkar's 알고리즘에서 최적해를 찾는 계산의 수행 경우에 비해 Primal-Dual 내부점 알고리즘의 계산 수행이 보다 안정적이라고 할 수 있다. 그러나 <Case 1>의 경우 제약변수의 크기가 증가되면서 알고리즘의 수행에 XZ^{-1}의 계산의 수행에 난점이 발생하였다. 추후 본 실험과 관련하여 다음과 같은 연구과제를 고려하고자 한다.

첫째로, 기타 내부점 방식에서의 해 수렴과정과 계산시간에 관한 상호 비교 연구.
둘째로, Degeneracy문제와 Alternative Optima를 갖는 문제에서의 Primal-Dual 내부점 방식의 적용 및 기타 내부점 방식에서의 해의 수렴과정에 대한 연구.
셋째로, XZ의 Inverse 값이 대단히 커질경우 문제의 수리적인 제한방법에 대한 연구.

Reference

1. 김 병재, Karmarkar기법에 있어서 최적기저 결정에 관한연구,"서울대학교 박사학위 논문,1990
2. Irvin Lustig,"Feasibility issues in a Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming," Mathematical Programming 49, pp 145-162, 1991
3. Masakazu Kojima, Shinji Mizuno, Akiko Yoshise,"A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming,"Progress in Mathematical Programming, Springer-Verlag Berlin, pp 29-47, 1989
4. Miroslav D. Asic, Vera V. Kovacevic - Vujcic and Mirjana D. Radosav ljevic - Nikolic," Asymptotic Behaviour of Karmarkar's Method for Linear Programming, "North-Holland and Mathematical Programming 46, pp 173-190, 1990
5. Renato D. C Monteiro, Ilan Adler,"Interior Path Following Primal-Dual Algorithms Part 1,"Linear Programming North-Holland, Mathematical Programming, pp 131-158, 1989
6. Roy Marsten, Radhika Subranmanian, Matthew Saltzman, Irvin Lustig, David Shanno,"Interior Point Methods for Linear Programming,"The Institute Management Sciences, pp 105-116,1990 7. Nimrod Meggido,"Pathway to Optimal Set in Linear Programming,"Springer-Verlag Berlin, Progress in Mathematical Programming, pp 131-158, 1989
8. D. den Hertog and C. Ross,"A Survey of Search Directions in Interior Point Methods for Linear Programming,"Mathematical Programming 52, pp 481-509, 1991
9. J. N. Hooker, "Karmarkar's Linear Programming Algorithm, " Institute Management Science, pp 75-90, 1986