GIS의 가중네트워크에서 MVA를 결정하는 방법

-Determining the Most Vital Arcs in the Weighted Network of GIS-

정 호 연*
Chung, Ho Yeon

Abstract

The purpose of this paper is to develop an efficient algorithm for determining the most vital arcs in a weighted network and implement its algorithm on GIS. The most vital arcs in a weighted network of GIS is that arc whose removal from the network results in the greatest increase in shortest distance between two specified nodes. These studies are well applied to a situation where a logistics or communications network is broken by unexpected accidents. Because a user of the system wants to know which arcs are most vital to him so that he can reinforce them against unexpected accidents. We first present an algorithm to find the most vital arcs in a weighted network, then show that how its algorithm can be applied to a geo-spatial network.

1. 서 론

최단경로문제는 특정한 두 교점 사이의 경로 중에서 가장 짧은 길이의 경로를 찾는 문제이다[1]. 이 때 주어진 네트워크에서 한 호가 제거되면 제거된 호에 따라서 최단경로의 길이가 늘어날 수도 있고 줄어들 수도 있다. 이 때 한 호의 제거로 최단거리가 가장 크게 늘어나는 호를 찾는 문제를 최단경로문제에서의 MVA(Most Vital Arc)를 찾는 문제라고 한다[1,2,3,4,7,8]. 이러한 연구는 적의 공격 하에 처해 있는 이해상충의 상황이나 물류 또는 통신네트워크에서 어느 호가 가장 치명적인지 알아내어 적의 공격으로부터 경계를 강화하거나 어느 호를 파괴시켜야 적의 시스템의 효율성을 가장 크게 저하시킬 수 있는지 알고자 하는 문제에 잘 적용될 수 있다[2,4,7]. 따라서 지역정보와 각종 도면이 저장되어 있는 지리정보시스템(Geographic Information System; GIS)에서의 도로망, 상하수도관망, 송전망 등의 설계 및 관리, 군사용 보급로나 물류에서의 수배송망 관리, 통신망, 송수신 네트워크 등 호의 제거가 전체 네트워크의 성능에 치명적으로 영향을 미치는 경우의 네트워크문제에 활용될 수 있다.

이에 대한 연구는 Corley & Sha[4], Malik[7], Bar-Noy[3] 등에 의해서 수행되었다. Corley & Sha[4]는 k번째 최단경로(k shortest path)를 구하는 해법을 이용하여, 최단경로문제에서 1개의 MVA(1-MVA)를 찾는 해법과, k개의 MVA 찾는 문제(k-MVA)에 대한 충분조건을 제시하였다. Malik 등[7]은 Corley & Sha의 방법을 개선하여 무방향 네트워크에서 1-MVA를 찾-

---

이 논문은 1997년도 전주대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음
* 전주대학교 산업공학과

는 해법을 제시하였고, k-MVA에 대해서는 k개의 MVA를 찾는 비다항식의 계산 복잡도(nonpolynomial time complexity)를 가지는 해법을 제시하였다. 그러나 이 문제는 Bar-Noy 등[3]에 의해 해결될 수 없는 반례가 제시 되어 해법에 오류가 있는 것으로 판명되었고, k개의 MVA를 찾는 문제가 NP-hard임이 증명되었다.

[표 1] 최단경로문제의 MVA에 대한 연구현황

1-MVA	k-MVA
다수최단경로(k-shortest path)해법을 사용한 1-MVA에 대한 해법제시 (Corley 등 [4])	k-MVA에 대한 충분조건 제시 (Corley 등 [4])
1-MVA에 대한 효율적 해법제시 (Malik 등 [7])	k-MVA를 찾는 문제의 해법 제시 (Malik 등 [7])
Malik 등[7]이 제시한 1-MVA에 대한 해법의 반례 제시(Bar-Noy 등 [3])	Malik 등[7]이 제시한 해법의 반례 제시. k-MVA를 결정하는 문제가 NP-hard 임을 보임.(Bar-Noy 등 [3])

따라서 최단경로문제에서 1-MVA를 찾는 문제에 대한 해법은 현재까지 Corley & Sha가 제시한 해법이 유일한 해법이며, k-MVA를 찾는 문제에 대해서는 Corley & Sha가 제시한 충분조건과 k-MVA를 찾는 문제가 NP-hard 라는 사실만이 제시되어 있는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 Corley & Sha가 제시한 방법 보다 더 효율적인 방법으로 최단경로문제에서 MVA를 찾는 해법을 개발하고, 이를 실제 GIS의 가중네트워크에서 구현해 보고자 한다.

2. MVA의 특성 및 해법

본 연구에서 다루는 최단경로문제 $G=(N,A)$는 마디 수가 |N|=n 이고, 호의 수가 |A|=m인 유방향 가중네트워크이며, c_{ij}는 호 $(i,j)\in A$의 길이, s와 t는 $G=(N,A)$의 시발점과 종착점을 나타낸다.

먼저 기존의 연구에서 밝혀진 MVA에 대한 성질을 정리해 보면 첫째, 최단경로가 유일한 경우에는 반드시 최단경로를 구성하는 호들 중에서 MVA가 존재하게 된다. 그러나 최단경로가 유일하지 않고, 최단경로들 사이에 공유하는 호가 존재할 경우 최단경로문제의 MVA는 공유하는 호 사이에서 존재한다. 만일 최단경로들 사이에 공유하는 호가 존재하지 않을 경우에는 어떠한 호의 제거를 통해서도 최단경로를 늘려 주지 못하는 경우에 해당되어, 이 경우에 주어진 네트워크를 구성하는 모든 호가 MVA가 된다[4,7].

위의 MVA에 대한 성질에 따라 문제에 대한 최단경로가 복수개 존재할 경우에는 비교적 간단히 MVA를 결정할 수 있으나 최단경로가 유일할 경우에는 최단경로를 구성하는 호 중 어느 호가 MVA가 될 수 있는지를 하나 하나 분석해 보아야 한다는 것을 알 수 있다. 본 연구에서는 이러한 MVA에 대한 성질을 이용하여 기존방법 보다 좀 더 개선된 해법을 개발하고자 한다.

먼저 원활한 계산을 위해 주어진 $G=(N,A)$에 대한 s에서 t 까지의 최단경로가 주어졌을 때 주어진 경로집합에 대한 변환네트워크를 정의하면 다음과 같다.

[정의 1] 임의의 경로 $P_{st} \subseteq A$에 대한 변환 네트워크 $G' = (N, A')$

$G = (N, A)$에 대한 $s \rightarrow t$ 까지의 임의의 경로 $P_{st} \subseteq A$가 주어져 있을 때 경로 P_{st}에 대한 변환 네트워크 $G' = (N, A')$는 다음과 같이 정의된다.

$G = (N, A)$의 임의의 호 (a, b)가 경로 P_{st}에 속할 때 $G' = (N, A')$의 A'에는 호 (a, b) 대신에 호 (b, a)를 추가시킨다. 이 때 해당하는 호의 길이 c_{ba}는 $c_{ba} = -c_{ab}$로 놓는다.

[정의 1]에 의해 $G = (N, A)$에 대한 최단경로 P_{st}가 주어지면 이에 대한 변환 네트워크 $G' = (N, A')$를 구성할 수 있다. 이 변환네트워크 $G' = (N, A')$에서 A'에 속하는 한 호를 (b, a)라고 하자. 그리고 $G_{ba}' = (N, A' \setminus \{(b, a)\})$에서 마디 a에서 출발하여 마디 b로 들어오는 최단경로를 P_{ab}^{ba}라고 하자. 또한 마디 b에서 시작해서 호 (b, a)를 포함하는 가장 짧은 길이의 환(cycle)을 호 (b, a)의 최소유방향 환(minimum directed cycle)이라고 하고, $\mathscr{C}_{ba}$로 표기하기로 하자. 그러면 호 $(b, a) \in A'$의 최소유방향 환 $\mathscr{C}_{ba}$는 $\{(b, a)\} \cup P_{ab}^{ba}$ 가 된다. 이러한 성질을 이용하여 최단경로에 속하는 한 호가 제거될 때 최단경로의 길이가 얼마나 증가되는지 계산할 수 있다.

일단 최단경로상의 한 호가 제거되면 $s \rightarrow t$ 로 가는 최단길이의 우회 경로를 찾게 되는데 이 때 한 호의 제거로 인하여 구해진 우회 최단경로의 길이에서 주어진 최단경로의 길이와의 차를 최소우회거리(distance of minimum reroute path)라고 하고 다음과 같이 정의하자.

[정의 2] 최단경로를 구성하는 호 $(i, j) \in P_{st}$의 최소우회거리

호 (i, j)의 최소우회거리는 주어진 최단경로 P_{st}상의 임의의 한 호 $(i, j) \in P_{st}$를 경유하지 않고 $s \rightarrow t$로 가는 최단길이에서 주어진 최단경로의 길이를 뺀 값으로 정의되며, 이 때 임의의 호 $(i, j) \in P_{st}$를 경유하지 않고 $s \rightarrow t$로 가는 경로가 존재하지 않을 경우에는 호 (i, j)의 최소우회거리는 무한대로 간주한다.

최소우회거리는 따라서 최단경로에 속하는 한 호가 제거될 때 최단경로의 길이가 얼마나 증가되는지를 나타내는 척도로 사용될 수 있다. 이러한 호 $(i, j) \in A$의 최소우회거리는 최단경로 $P_{st} \subseteq A$에 대한 $G' = (N, A')$에서 호 (j, i)의 도착마디인 i를 출발하여 출발마디인 j로 들어오는 경로 P_{ij}^{ji}와 호 (j, i)의 환을 이용하여 계산할 수 있다. 이는 $G_{ji}' = (N, A' \setminus \{(j, i)\})$에서 $i \rightarrow j$ 까지의 최단경로를 P_{ij}^{ji}라고 할 때, 호 (j, i)의 최소유방향 환 $\mathscr{C}_{ji}$가 $\{(j, i)\} \cup P_{ij}^{ji}$와 같기 때문에 이 때의 최소우회거리는 최단경로 $P_{st} \cup \mathscr{C}_{ji}$를 통해 얻을 수 있다. 즉, [정의 2]에서 최소우회거리가 호 $(i, j) \in P_{st}$를 경유하지 않고 $s \rightarrow t$로 가는 최단길이에서 주어진 최단경로의 길이를 뺀 값이라고 정의하였으므로, $s \rightarrow t$까지의 최단경로의 길이를 $\ell(P_{st})$, $G_{ji}' = (N, A' \setminus \{(j, i)\})$에서 $i \rightarrow j$ 까지의 최단경로 P_{ij}^{ji}의 길이를 $\ell(P_{ij}^{ji})$이라고 나타내면 최소우회거리는 $\{\ell(P_{st}) - c_{ji} + \ell(P_{ij}^{ji})\} - \ell(P_{st}) = \ell(P_{ij}^{ji}) - c_{ji}$가 된다. 이 값은 $(j, i) \in A'$의 최소유방향 환 $\mathscr{C}_{ji} = \{(j, i)\} \cup P_{ij}^{ji}$ 의 길이에 해당되어 호 $(i, j) \in A$의 최소우회거리는 항상

$G' = (N, A')$ 상에서 최소유방향 환 $\mathcal{C}_{ji}$의 길이와 같게 된다. 따라서 $s \to t$까지의 최단경로가 유일할 경우, 최단경로를 구성하는 각 호에 대한 최소유방향 환의 길이가 가장 큰 호가 MVA가 된다.

이를 정리하면 다음과 같다.

[성질 1] $s \to t$까지의 최단경로가 유일할 경우, 최단경로를 이루는 호들 중에서 호의 최소유방향 환의 길이가 가장 큰 호가 MVA가 된다.

그런데 변환네트워크에서 음의 길이의 호가 존재할 경우 최단경로문제를 풀기 위해서 계산 복잡도(complexity)가 좋은 Dijkstra 방법을 사용할 수 없다. 그러나 다음과 같은 성질을 이용하여 네트워크를 수정하게 되면 Dijkstra 방법을 사용할 수 있게 된다.

먼저, 최단경로에 대한 변환 네트워크에서의 시점에서 출발하는 최적나무(optimal spanning tree)를 선택하여 이를 통해 각 호의 거리를 $c_{ij}' = c_{ij} + \pi_i - \pi_j \ \geq 0$ 로 수정한다. 단, π_j는 시점 s에서 j까지의 최단경로의 길이를 나타낸다고 한다. 그러면 이를 통해 최단경로의 길이가 모두 비음인 수정된 네트워크를 구축할 수 있으며, 여기에서 최단경로를 찾는 해법인 Dijkstra 해법을 이용할 수 있다[5]. 이 때 최소유방향 환 $\mathcal{C}_{ji}$의 계산은 다음과 같다.

[성질 2] 임의의 유방향 환 $\mathcal{C}_{ji}$와 임의의 마디의 잠재가 (node potential) π_j, $\forall j \in N$ 가 주어져 있을 경우 $\sum c_{ij}' = \sum c_{ij}$ (단, $c_{ij}' = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$, 호 $(i, j) \in \mathcal{C}_{ji}$)이다[1].

$s \to t$까지 최단경로가 유일하지 않는 경우에는 $s \to t$까지의 최단경로들 사이에 공유하는 호가 존재하지 않는 경우와 공유하는 호가 존재하는 경우로 나누어서 분석해야 한다.

첫째, $s \to t$까지의 최단경로들 사이에 공유하는 호가 존재하지 않을 경우에는 최단경로를 구성하는 모든 호의 최소우회거리가 0인 경우에 해당된다. 따라서 이 경우에는 어떠한 호의 제거를 통해서도 최단경로를 늘려 주지 못하는 경우에 해당되어, 네트워크를 구성하는 모든 호가 MVA가 된다. 그러나 $s \to t$까지의 최단경로들 사이에 공유하는 호가 존재할 경우에는 최단경로를 구성하는 모든 호의 최소우회거리가 0이 아닌 호가 존재하는 경우에 해당되어 이 호의 제거를 통해서 최단경로를 늘려줄 수 있기 때문에 최소우회거리가 가장 큰 호가 최단경로를 가장 크게 늘려주게 된다.

이러한 개념에 입각하여 가중네트워크에서 MVA를 찾는 계산법을 정리하면 다음과 같다.

계산법 (최단경로문제에서 MVA 찾는 해법)

[단계 1] 최단경로문제를 푼다.

$G = (N, A)$에 대한 $s \to t$까지의 최단경로를 구하여 이를 P_{st}라고 둔다.

[단계 2] 최단경로 P_{st}에 의한 $G' = (N, A')$를 다음과 같이 구성한다.

만일 호 $(i, j) \in P_{st}$ 이면 $A' \leftarrow A \backslash \{(i, j)\} \cup \{(j, i)\}$, $c_{ji} = -c_{ij}$

[단계 3] $G' = (N, A')$에 대한 호의 거리를 수정한다.

(3-1) 최단경로 P_{st}에 의한 $G' = (N, A')$ 에서 최단거리나무를 형성하기 위해 음환을 허

용하는 특정시점에서 모든마디까지의 최단경로를 찾는다.

(3-2) 모든 마디에 대한 잠재가 π_j, $\forall j \in N$ 를 구한다.

(3-3) $G' = (N, A')$에서 호의 거리를 다음과 같이 수정한다.

$c_{ij}' = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$, $\forall (i,j) \in A'$, 이 때의 π_j는 s에서 j까지의 최단경로의 길이를 의미한다.

[단계 4] $G' = (N, A')$에서 $\ell(\mathscr{C}_{ji})$를 계산

만일 호 $(j, i) \in A'$이고 $(i, j) \in P_{st}$일 때, $\mathscr{C}_{ji} \leftarrow \{(j, i)\} \cup P_{ij}^{ji}$

최단경로를 구성하고 있는 모든 호 $(i, j) \in P_{st}$에 대해 호 $(j, i) \in A'$의 최소유방향 환 $\mathscr{C}_{ji}$의 길이 $\ell(\mathscr{C}_{ji})$를 구한다.

[단계 5] $\ell(\mathscr{C}_{ji})$의 최대값을 계산

최소유방향 환 $\mathscr{C}_{ji}$의 최대값과 이때의 호 (a, b)를 구한다.

$$(a, b) = \{ (i, j) \mid \max_{(i,j) \in P_{st}} \ell(\mathscr{C}_{ji}) \}, \quad \delta = \max_{(i,j) \in P_{st}} \ell(\mathscr{C}_{ji})$$

[단계 6] MVA 결정

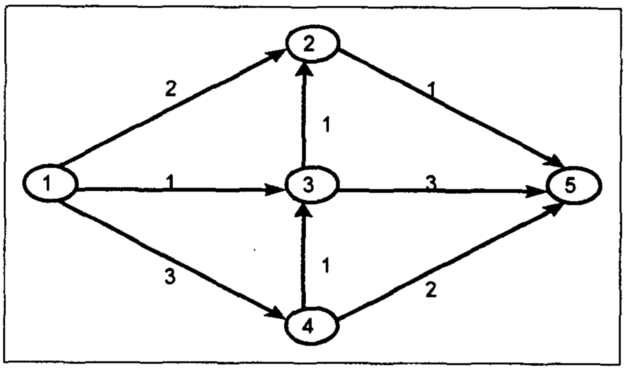
만일 ($\delta = 0$) 이면 MVA는 호집합 A의 모든 요소가 된다.

만일 ($\delta = \infty$) 이면 ∞의 값을 가지는 호 전부가 MVA가 된다.

만일 ($\delta \neq 0$ 이고 $\delta \neq \infty$) 이면 δ 값을 갖는 호 (a, b)가 MVA가 된다.

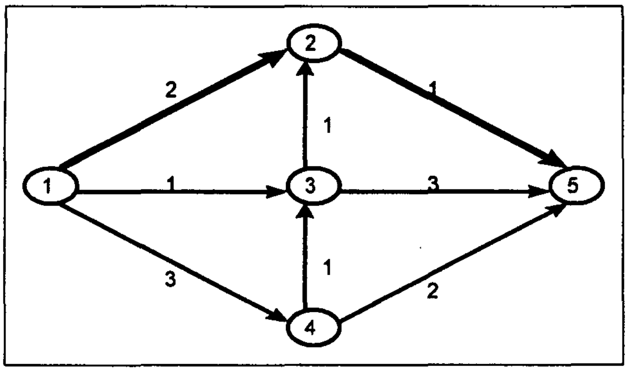
3. 예제 및 GIS 네트워크에서의 실험

해법에 대한 이해를 돕기 위해 [그림 1]과 같이 마디수가 5이고 호의 수가 8인 가중네트워크를 고려해 보자.



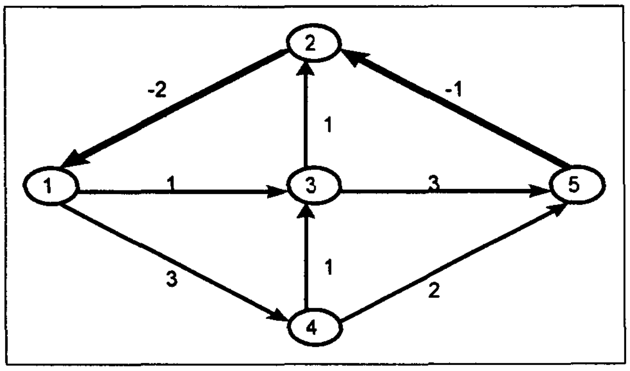
[그림 1] 예제 네트워크 $G = (N, A)$

먼저 주어진 네트워크에 대하여 [그림 2]와 같이 최단경로 $P_{st} = P_{15} = \{(1,2), (2,5)\}$가 구해 졌다고 하자.



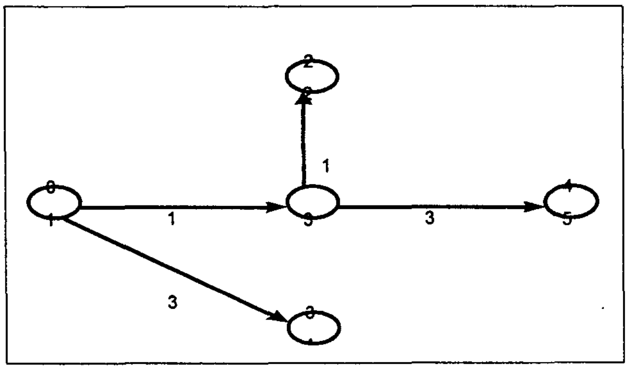
[그림 2] 네트워크 $G=(N,A)$에 대한 최단경로

[단계 2]에서 이 최단경로에 대한 변환네트워크를 구성하면 [그림 3]과 같이 된다.



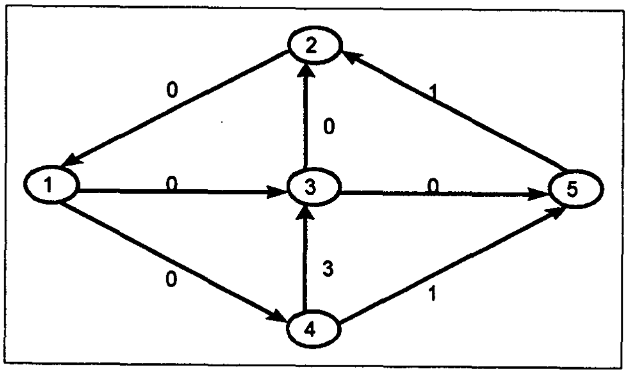
[그림 3] $G=(N,A)$에 대한 변환네트워크 $G'=(N,A')$

[단계 3]의 (3-1)에서 음수길이의 호가 있는 네트워크에 대한 최단경로 해법을 사용하여 시점 s에서 각 마디로 가는 최단경로를 찾은 후 이를 이용하여 [단계3]의 (3-2)와 같이 각 마디의 잠재가를 구하면 [그림 4]와 같이 나타난다.



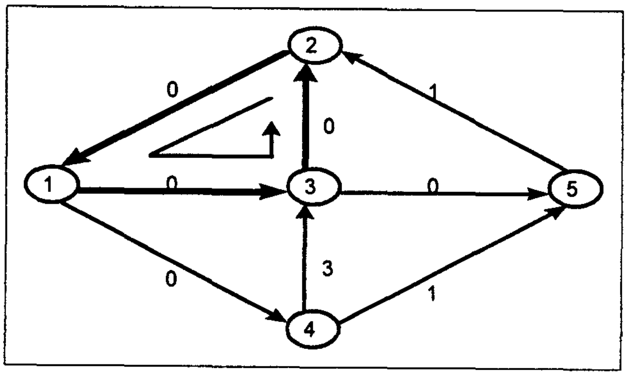
[그림 4] 각 마디의 잠재가

[단계 3]의 (3-3)과 같이 변환네트워크의 호의 거리를 수정하면 [그림 5]와 같다.

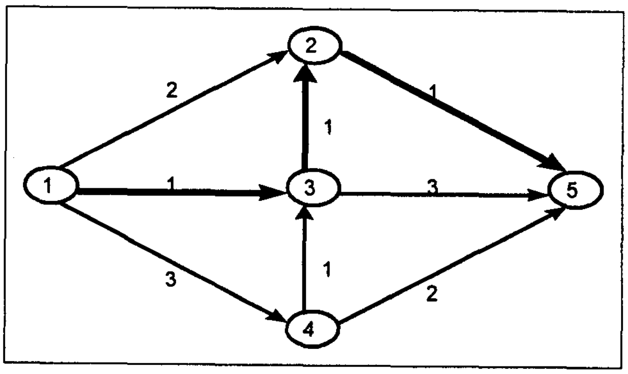


[그림 5] $G' = (N, A')$의 호의 거리를 수정한 결과

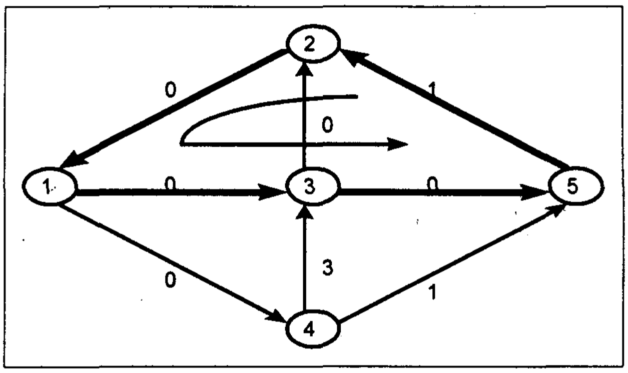
[단계 4]에서 최단경로 P_{st}에 대한 변환네트워크 $G' = (N, A')$에서 새로 도입된 호(2,1)과 (5,2)에 대해 호의 최소유방향 환을 구하면 각각 $\ell(C_{21})$= 0, $\ell(C_{52})$= 1이 되며, 이 때 δ = 1이 된다.



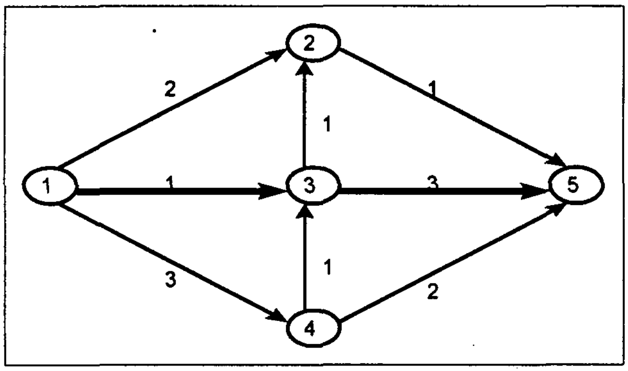
[그림 6] 호 (2,1)의 최소유방향 환



[그림 7] 호(1,2)의 제거를 통해 얻어지는 우회경로



[그림 8] 호 (5,2)의 최소유방향 환



[그림 9] 호(2,5)의 제거를 통해 얻어지는 우회경로

따라서 δ 값을 갖는 호 (2,5)가 MVA로 선정된다.

이러한 과정을 GIS에서 구현하기 위해 본 연구에서는 C 시에 대한 도로 네트워크에 관한 GIS의 정보를 활용하여 MVA를 결정하였다.

GIS는 지리적으로 참조 가능한 모든 형태의 정보를 효과적으로 수집·저장·갱신·조정·분석·표현할 수 있도록 설계된 컴퓨터 하드웨어, 소프트웨어, 지리적 자료 그리고 인적자원의 통합체로 정의된다. 즉, 지도를 전산처리할 수 있도록 컴퓨터에 입력하고 지상과 지하의 시설물관리, 도로의 설계와 보수, 자원활용, 환경보존 등에 활용하는 정보시스템이라 할 수 있다. 본 연구에서는 이런 관점에서 정보기술과 관련된 GIS의 새로운 기술을 GIS에 적용할 수 있도록 방향을 제시해 보고자 한다.

GIS가 도입된 분야를 간략하게 정리해 보면 다음 표와 같다.

[표 2] GIS가 도입된 분야

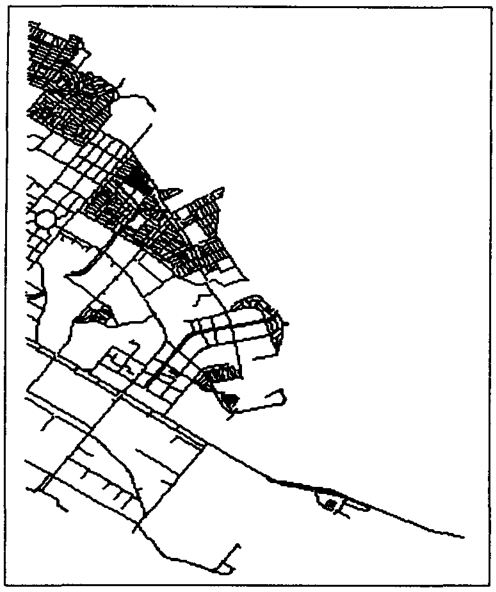
분 야	내 용
계획분야	국토계획, 지역계획, 도시계획, 해안지역 계획, 학군계획
자원관리 분야	토지자원관리, 동식물관리, 광물자원관리, 수자원관리
교통분야	운송망계획, 자동차 항법장치, 최적 운행노선 선택
환경분야	환경자원의 분석, 환경자원의 관리, 환경감시, 공원부지 선정 및 계획
국방분야	부대위치 선정, 지세분석, 전술모의 훈련, 행군계획, 화력계획
사회 ,안전분야	경찰차량, 소방차, 구호차량 등의 순시 및 이동 노선분석, 경찰관서, 소방서 부지선정 및 관할구역계획, 자연재해 구조
시설물관리	도로 및 상하수도, 각종 배관 및 배선관리, 주요 시설물의 입지선정
지도제작분야	지형도, 각종 주제도, 조사요도 등의 제작
토목 지질분야	지형 및 지질상황 모의, 토목량 계산, 경사도와 주향분석
경제분석	산업지구분석, 산업수요 및 공급
기 타	고고학, 고충, 부동산관리, 인구 및 취업시장분석

위의 표에서 나타난 바와 같이 GIS는 네트워크 특성을 갖는 공간정보 자료의 구축, 관리 및 분석에 매우 유용한 도구로 잘 알려져 있다[6]. 일반적으로 GIS 정보는 그래픽 자료와 공간정보 자료로 구성되며, 공간정보 자료에 속하는 교차점은 교통신호 형태나 교차로 수 등을 나타내고 도로의 부분은 도로의 폭, 차선의 수나 도로의 길이 등을 나타낸다. 따라서 GIS 정보를 사용하는 현실 세계의 문제를 논리적인 네트워크문제로 발생시키기 위해서는 호나 마디에 필요한 자료만을 결합시킬 필요가 있다. 또한 교차로간의 회전형태나 under-path 나 over-path와 같은 문제도 해에 영향을 줄 수 있기 때문에 이에 대한 면밀한 분석이 필요하며, GIS상의 공간정보에 쉽게 접근할 수 있는 translator가 개발될 필요가 있다.

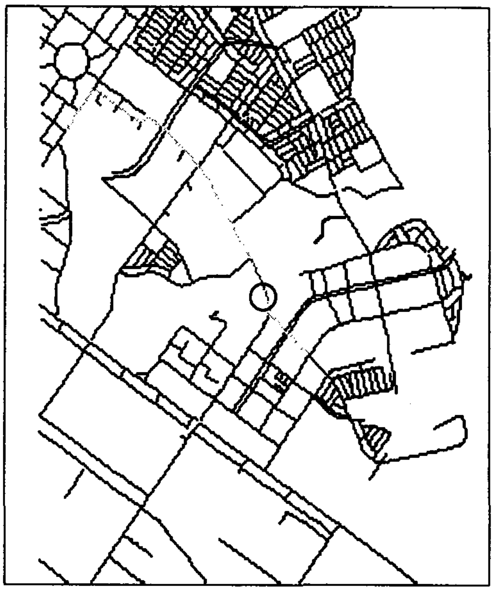
본 연구에서는 s에서 t까지의 최단경로를 찾기 위해서 GIS의 지도 상에 시발점 s 와 종착점 t점을 나타낼 수 있게 하였다. 따라서 만일 사용자가 GIS의 지도상에서 최단경로를 찾기를 원한다면 단지 스크린상에서 마우스를 클릭함으로써 원하는 지점들을 지정할 수 있다. 이러한 GIS의 도구와 네트워크 최적화 사이의 인터페이스를 통해 결정된 MVA는 화면상에 나타내어지게 된다.

GIS의 자료를 사용하여 네트워크문제의 해를 찾을 때 네트워크의 한 호는 GIS의 자료에서 객체화된 많은 선으로 구성될 수 있다. 그 이유는 GIS 자료가 각 객체의 벡터라이즈화된 요소의 집합체로 구성되기 때문이다. 마찬가지로 GIS상의 최단경로에 대한 MVA도 GIS에 저장된 현실세계 자료의 여러 선에 의해 나타내질 수 있다. 따라서 현실세계 네트워크문제에 적용되는 알고리즘의 효율성은 사전처리와 네트워크문제의 축소에 크게 의존하게 된다[9].

아래 두 그림은 C 시에 대한 도로 네트워크에서 특정 두지점간의 최단경로를 찾아 화면상에 표시한 것을 나타낸 것이다. 이 실험은 펜티엄 PC(133MHz)에서 PC arc/info version 2.1을 사용하여 수행하였다. MVA에 해당되는 지점에는 다른 선과 구분하기 위해서 원으로 나타냈으며, 해당되는 두 지점간의 최단경로는 2,731.10미터로 계산되었다.



[그림 10] GIS의 도로네트워크



[그림 11] 특정한 두 지점에 해당되는 MVA

4. 결 론

본 연구의 목적은 Corley & Sha가 제시한 방법 보다 더 효율적인 방법으로 최단경로문제에서 MVA를 찾는 해법을 개발하고, 이를 실제 GIS의 가중 네트워크에서 구현하는 것이다.

기존의 연구가 다수 최단경로 해법을 사용하여 경로를 길이의 오름차순으로 나열하여 해결하는 방법인데 반하여, 본 연구에서는 네트워크의 모든 호를 고려하지 않고 임의의 한 최단경로를 통해 최단경로에 대한 변환 네트워크를 구성하여 MVA를 선정할 수 있는 방법을 제시하였다.

먼저 임의의 최단경로 집합에 대한 변환 네트워크를 정의하고, 이 변환 네트워크에서 최소 유방향 환을 구하였다. 이 때 계산의 효율성을 위해 변환 네트워크를 비음 길이의 수정 네트워크로 호의 길이를 수정하여 전체 MVA문제의 계산 복잡도를 기존의 방법보다 낮추는 방법을 제시하였다.

추후 이러한 연구는 k개의 MVA를 결정하는 문제로 확장되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Ahuja R.K, T.L. Magnanti and J.B. Orlin, *Network Flows : Theory, Algorithm and Application*, Prentice-Hall, 1993

[2] Ball M.O., B.L. Golden and R.V. Vohra, Finding the most vital arcs in a network, OR Letters Vol.8, pp 73-76, 1989

[3] Bar-Noy A., S. Khuller and B. Schieber, The complexity of finding most vital arcs and nodes, Univ. Of Mayland Technical Reports CS-TR-3539, http : // www.cs.umd.edu / TRs / TR-no-abs.html

[4] Corley Jr. H. W. and D.Y. Sha, Most vital links and nodes in weighted networks, OR Letters Vol.1 No.4, pp 157-160, 1982

[5] Hamacher H.W., A Note on K best network flows, Annals of Operations Research 57 pp 65 - 72, 1995
[6] Jeffrey Star and John Estes, *Geographic Information Systems : An introduction*, Prentice-Hall, 1990
[7] Malik K., A.K. Mittal and S.K. Gupta, The k most vital arcs in the shortest path problem, OR Letters Vol.8, pp223-227, 1989
[8] Murty K.G., *Networking Programming*, Prentice-Hall, 1992
[9] Samet H., *The design and analysis of spatial data structures*, Addison Wesley, 1989