

쿼터니온을 이용한 유도탄 자세제어

송찬호, 남현성, 김승환, 조항주
국방과학연구소

본 논문에서는 쿼터니온 궤환 개념이 기존의 오일러각 궤환 개념에 비해 추력벡터제어(Thrust Vector Control) 방식을 사용하는 전술 유도탄 자세제어에 보다 효과적으로 적용될 수 있음을 보인다. 오일러각 궤환 방식을 택한 기존의 자세제어기에서 오일러각 궤환 부분을 쿼터니온 궤환으로 적절히 바꾸어 주게 되면 자세명령 크기 변화에 따른 시간응답 특성의 변화를 줄일 수 있으며, 쿼터니온 궤환 방식을 택할 경우, 우주비행체 자세제어 분야에서 활발히 연구되고 있는 고유축(Eigen Axis) 회전에 의한 자세변환을 수행할 수 있는 자세제어기 설계가 가능하다. 고유축 회전은 최단경로에 의한 자세변환 개념이므로, 이러한 능력을 갖춘 자세제어기는 신속한 자세변환이 필요한 전술 유도탄의 초기비행에 매우 효과적으로 이용될 수 있다. 더욱이, 제어법칙에 공력모멘트를 보상하는 항을 추가하게 되면 변화가 심한 공력 모멘트가 유도탄의 회전운동에 미치는 영향을 줄일 수 있어 고유축 회전성능을 보다 개선시킬 수 있다. 우선, 오일러각 궤환보다 쿼터니온 궤환이 유리한 점을 논하고, 쿼터니온 궤환에 근거한 자세제어기의 설계 개념과 제안된 제어기에 의해 구성되는 페루우프에 대한 안정성 문제를 다룬 후, 시뮬레이션을 통해 그 타당성을 검증한다.

1. 서론

전술 유도탄의 자세제어 방식에는 조종날개에 의해 공력학적 힘과 모멘트를 유발시키는 공력제어방식과 Jet Vane 또는 가동노즐에 의해 추력벡터 방향을 변화시키는 추력벡터제어 방식이 있다. 어떤 방식을 택하든 전술 유도탄의 운용고도에서는 공력이 탄의 거동에 미치는 영향을 무시할 수 없기 때문에 자세제어기 설계에 공력특성이 고려되어야 한다. 한편, 유도탄에서 사용되는 자세정보는 주로 관성항법장치나 자이로에서 제공하는 오일러 각이므로 자세제어를 하는 거의 모든 유도탄이 자세제어기의 구조로서 오일러 각 궤환 구조를 택하고 있다.

이와는 달리, 인공위성이나 우주선은 공기가

희박한 대기권 밖에서 거동하기 때문에 제어수단인 Jet Thruster나 Reaction Wheel을 통해 제어토크의 방향을 원하는 벡터방향으로 일치시키기 용이하다. 따라서 자연스럽게 고유축 회전에 의한 자세제어 방식에 관심을 갖게 되었다. 이 방식은 최단경로에 의한 자세변환 개념이기 때문에 각 축을 순차적으로 회전시키는 오일러 각 변환 방식에 비해 여러 장점을 갖는다[Wie89, Wei93, Wie85, Wen91]. 쿼터니온 궤환 개념은 60년대에 Mortensen [Mor 68]에 의해 처음으로 강체 자세제어 문제에 도입되었으며, 그 이후 우주비행체 자세제어 문제에, 특히 고유축 회전을 성취할 수 있는 적절한 수단으로서 각광을 받기 시작하였다. 주목할 만한 연구결과로는 Wie와 그의 동료의 논문 [Wie89]이 있다.

쿼터니온 궤환이 우주비행체의 자세제어 분야

에서 활발히 연구되고 있는 것과는 달리, 공력의 영향을 무시할 수 없는 고도에서 운용되는 전술 유도탄의 자세제어에 이러한 개념을 적용한 연구 결과는 찾아 보기 어렵다. 그 이유는 아마도 공력의 영향이 무시될 수 없는 경우에도 과연 쿼터니온 궤환이 장점을 갖을 수 있는지에 대한 부정적 견해때문인 것으로 생각된다. 본 논문은 저자들이 알고 있는 한 최초로 이 의문에 대한 긍정적인 답을 제시한다.

오일러각 궤환 방식을 택한 기존의 자세제어기에서 오일러각 궤환 부분을 쿼터니온 궤환으로 적절히 바꾸어 주게 되면 자세명령 크기 변화에 따른 시간응답 특성의 변화를 줄일 수 있으며, 쿼터니온 궤환 방식을 택할 경우, 우주비행체 자세제어 분야에서 활발히 연구되고 있는 고유축 회전에 의한 자세변환을 수행할 수 있는 자세제어기 설계가 가능하다. 고유축 회전은 최단경로에 의한 자세변환 개념이므로, 이러한 능력을 갖춘 자세제어기는 신속한 자세변환이 필요한 전술 유도탄의 초기비행에 매우 효과적으로 이용될 수 있다. 특히 부스트 단계에서 추력벡터제어방식을 적용하여 자세제어를 수행하는 전술 유도탄의 경우, 다양한 방향으로부터의 위협에 대응하기 위해서는 최단경로에 의한 방향전환 개념이 매우 중요하다. 더욱이, 제어법칙에 공력모멘트를 보상하는 항을 추가하게 되면 변화가 심한 공력 모멘트가 유도탄의 회전운동에 미치는 영향을 줄일 수 있어 고유축 회전성능을 보다 개선시킬 수 있다.

제안된 제어기 설계 개념을 개략적으로 설명하면 다음과 같다. 우선, 모멘트 방정식에서 공력의 영향을 보상해 준다. 그 과정은 궤환 선형화(Feedback Linearization)로 설명될 수 있으며 그 결과로 남는 숨겨진 모드(Hidden Mode)는 유도탄 동력학의 영점 동력학과 일치하게 된다.

한편, 공력 항이 상쇄된 모멘트 방정식은 우주비행체의 경우와 동일하므로 우주비행체에 관한 연구결과를 이용하여 쿼터니온 궤환에 의한 자세제어기를 설계한다. 페루우프의 안정도 문제는 영점 동력학의 안정도와 공력의 영향이 상쇄된 쿼터니온 궤환 자세 제어루우프의 안정도 문제로 분리하여 생각할 수 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 우선, 오일러각 궤환보다 쿼터니온 궤환이 유리한 논리를 제시하고, 다음에, 쿼터니온 궤환에 근거한 자세제어기의 설계 개념, 제안된 제어기에 의해 구성되는 페루우프에 대한 안정성 문제를 다룬다. 이어, 시뮬레이션을 통해 그 타당성을 검증한 후 결론을 맺는다.

2. 유도탄 운동 모델

추력벡터제어방식 유도탄의 운동은 각각 병진운동과 회전운동을 나타내는 다음과 같은 2개의 벡터 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} m \dot{v} + m(\omega \times v) - g \\ = \mathcal{F}_a(v) + \mathcal{F}_t(\delta) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J \dot{\omega} + \omega \times J \omega = \\ M_a(v, \omega) + M_t(\delta) \end{aligned} \quad (2)$$

윗식에서 v, ω, δ 는 각각 동체좌표계에서 표현된 탄의 속도, 각속도 및 제어추력의 변위를 나타내며 m 은 유도탄의 질량을, J 와 g 는 각각 동체좌표계에서 표현된 관성행렬과 중력벡터를, $\mathcal{F}_a, M_a, \mathcal{F}_t, M_t$ 는 각각 공력학적 힘과 모멘트, 제어추력과 제어모멘트를 나타내는 벡터

이다.

v, ω, δ 의 성분들은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} v &= [u, v, w]' \\ \omega &= [p, q, r]' \\ \delta &= [\delta_p, \delta_q, \delta_r]' \end{aligned}$$

윗식에서 윗 첨자 '는 벡터 또는 행렬의 도치 연산을 의미한다. 이제 (1), (2)식을 간단히 하기 위해 다음과 같이 가정한다.

가정 1. 탄의 속도 및 고도는 일정하다.

가정 2. 중력의 영향을 무시한다.

$$\text{즉, } g = 0.$$

가정 3. v, ω 는 u 에 비해 매우 작다.

가정 4. 유도탄의 형상은 십자형 대칭이다.

가정 5. $\mathcal{F}_t(\delta)$ 와 $M_t(\delta)$ 는 δ 에 대해 선형이고 Invertible하다.

가정 1은 문제를 단순화 하기 위해 도입한 것이다. 이 가정은 해석적 이득계획[Lin94]이나 Time-scaled Transformation[Oh97]과 같은 기법을 통해 제거될 수도 있으나, 그러한 내용은 본 논문의 초점에서 벗어나 있는 별도의 주제이다. 가정 1과 3에 의해 u 와 동압 Q 를 상수로 볼 수 있으며 받음각 α 와 옆미끄럼각 β 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\alpha = \frac{w}{u} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{v}{u} \quad (4)$$

한편 가정 4는 Y 축과 Z 축에 대한 관성 모멘트, 공력특성, 제어추력의 크기 및 제어모멘트

팔이 동일함을 의미한다. 주어진 가정하에 병진운동에 관한 식 (1)로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\alpha} = q + Z_o(Q, n, \alpha) - Z_t \delta_q \quad (5)$$

$$\dot{\beta} = -r + Z_o(Q, n, \beta) + Z_t \delta_r \quad (6)$$

윗식에서 $Z_o(Q, n, \alpha)$ 는 공력학적 힘을 나타내는 항이며, 여기에서 n 은 마하수이다. Z_o 를 무차원 공력계수 $C_z(n, \alpha)$ 를 사용하여 표현해 보면

$$Z_o(Q, n, \alpha) = \frac{QS}{mu} C_z(n, \alpha) \quad (7)$$

여기서 S 는 탄의 기준면적을 의미한다. Z_t 에 관한 식은 다음과 같다.

$$Z_t = \frac{T_c}{mu} \quad (8)$$

여기서 T_c 는 제어추력의 크기를 나타낸다. 한편, 회전운동에 관한 식 (2)에 포함된 공력항 Ma 를

$$Ma = [L, M, N]' \quad (9)$$

로 정의할 때 성분 L, M, N 은 다시 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} L = L_o(Q, n, \alpha, \gamma) + L_p(Q, n) p \\ M = M_o(Q, n, \alpha) + M_q(Q, n) q \\ N = -M_o(Q, n, \beta) + M_r(Q, n) r \end{cases} \quad (10)$$

윗식에서 γ 는 뱅크각을 의미하며 다음과 같이 정의되는 값이다.

$$\gamma = \frac{v}{w} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (11)$$

병진운동에서와 유사하게 L_o, M_o, L_p, M_q 는 무차원 공력계수들로부터 다음과 같이 계산되는 값들이다.

$$\begin{cases} L_o(Q, n, \alpha, \gamma) = QSD C_l(n, \alpha) \cdot \sin 4\gamma \\ M_o(Q, n, \alpha) = QSD C_m(n, \alpha) \\ L_p(Q, n) = \frac{QSD^2}{2u} C_{lp}(n) \\ M_q(Q, n) = \frac{QSD^2}{2u} C_{mq}(n) \end{cases} \quad (12)$$

윗식에서 Q, S 는 앞서 병진운동에서 설명한 바와 같이 동압과 탄의 기준면적이고, D 는 탄의 기준길이를 의미한다. L_o 는 뱅크각에 따른 Induced Roll Moment를 나타내는 항이며 식에서 보듯이 뱅크각이 45° 이면 0이 되고 22.5° 이면 최대가 된다. 이러한 특성은 유도탄이 십자형 대칭형상일 때 나타난다. 마지막으로, 제어모멘트 항 M_t 의 성분을

$$M_t = [L_t \delta_p, M_t \delta_q, M_t \delta_r]' \quad (13)$$

라 할 때 L_t, M_t 는 각각 다음과 같은 식을 만족다.

$$M_t = T_c \cdot l_x, \quad L_t = T_c \cdot l_y \quad (14)$$

윗식에서 T_c 는 제어추력의 크기이고 l_x, l_y 는 모멘트 팔을 의미한다.

3. 오일러각 변환과 쿼터니온 변환의 비교

유도탄의 자세는 기준좌표계에 대한 유도탄 동체좌표계의 오일러각으로 표현될 수 있다. 오일러각은 좌표축의 회전순서에 따라 다르게 정의되는데 회전순서를 Z, Y, X 축으로 잡을때의 오일러각 (ψ, θ, ϕ)의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

이와는 달리, Euler의 회전정리에 의하면 a 좌표계에서 b 좌표계로의 변환은 고유축이라 불리는 공간상의 한 축을 통해 좌표계를 회전시킴으로써 얻어질 수 있다. 쿼터니온은 이러한 고유축 회전에 강체의 자세를 표시한 것으로서 스칼라 양과 벡터양으로 구성되어 있으며 벡터 부분은 a 좌표계로 표현된 고유축의 방향과 관계있는 양이고 스칼라 부분은 고유축을 통한 회전각과 관계가 있는 양이다. 즉, ϕ 를 고유축 회전각, (e_1, e_2, e_3)를 고유축의 a 좌표계에 대한 방향 Cosine이라 할 때 쿼터니온의 네 요소는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} q_i = e_i \sin(\frac{\phi}{2}), \quad i=1,2,3 \\ q_4 = \cos(\frac{\phi}{2}) \end{cases} \quad (16)$$

이러한 쿼터니온의 운동방정식은 다음과 같이

표현될 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2} \Omega x + \frac{1}{2} q_4 \omega \\ \dot{q}_4 = -\frac{1}{2} \omega' x \end{cases} \quad (17)$$

윗식에서 $x = [q_1, q_2, q_3]'$ 이고, Ω 는 다음과 같이 정의되는 Skew-symmetric 행렬이다.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

이러한 쿼터니온과 앞서 정의한 오일러각 간에는 다음과 같은 식이 성립한다[Sio93].

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\psi}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\phi}{2}) \\ -\sin(\frac{\psi}{2})\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\phi}{2}) \\ \cos(\frac{\psi}{2})\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\phi}{2}) \\ +\sin(\frac{\psi}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\phi}{2}) \\ -\cos(\frac{\psi}{2})\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\phi}{2}) \\ +\sin(\frac{\psi}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\phi}{2}) \\ \cos(\frac{\psi}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\phi}{2}) \\ +\sin(\frac{\psi}{2})\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\phi}{2}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

윗식에서 오일러각들이 작아지면 $q_1 \approx \frac{\phi}{2}$,

$q_2 \approx \frac{\theta}{2}$, $q_3 \approx \frac{\psi}{2}$, $q_4 \approx 1$ 이 되어 q_1, q_2, q_3

는 오일러각의 반과 같게 된다. 한편 i 축에서 b 축으로의 좌표변환 행렬을 C_i^b , 임의의 벡터 ζ 에 대한 i 좌표계 성분과 b 좌표계 성분을 각각 ζ^i, ζ^b 라 할 때, ζ^b 는

$$\zeta^b = C_i^b \zeta^i \quad (20)$$

로 표현될 수 있으며, 이에 해당되는 쿼터니온 연산은 다음과 같다[Sio93].

$$q_i^{b*} \circ \zeta^i \circ q_i^b = \zeta^b \quad (21)$$

윗식에서 q_i^b 는 C_i^b 에 해당되는 쿼터니온이고 \circ 는 쿼터니온 연산[Sio93]을, 윗첨자 *는 복소수 도치를 의미한다.

오일러각이나 쿼터니온 모두 유도탄의 자세오차에 대한 척도로서 사용될 수 있다. 그러나 자세제어루우프에 사용될 정보로서 어느 것이 더 유리한지는 좀 더 살펴 볼 필요가 있다. 전술유도탄 자세제어기를 설계하는 기존 방법은 ϕ, θ, ψ 가 작다는 가정하에 $\dot{\phi} = p, \dot{\theta} = q, \dot{\psi} = r$ 의 근사식을 사용하여 오일러각과 각가속도 궤환형태의 제어기를 설계하는 것이다. 이 경우 θ, ϕ 가 커지게 되면 위 근사식이 타당하지 않게 되어 설계결과와 다른 성능을 보이게 된다. 그림 1은 이러한 형태의 제어루우프 구조를 보여준다.

한편 쿼터니온을 사용할 경우에는 현 자세로부터 원하는 자세로의 쿼터니온을 구한 후 그 벡터 성분을 자세오차의 척도로 사용한다. 그 값은 동

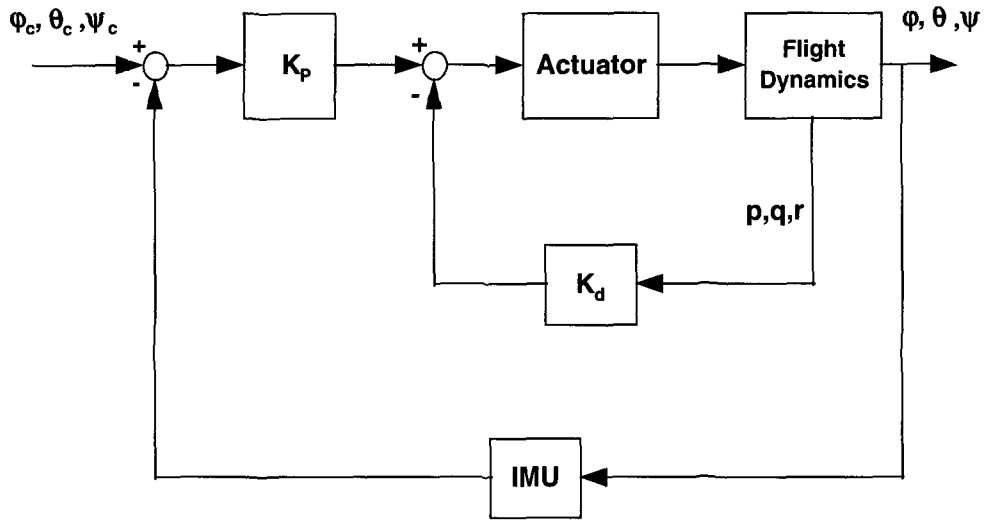


그림 1. 오일러각 궤환 제어루우프의 블럭선도

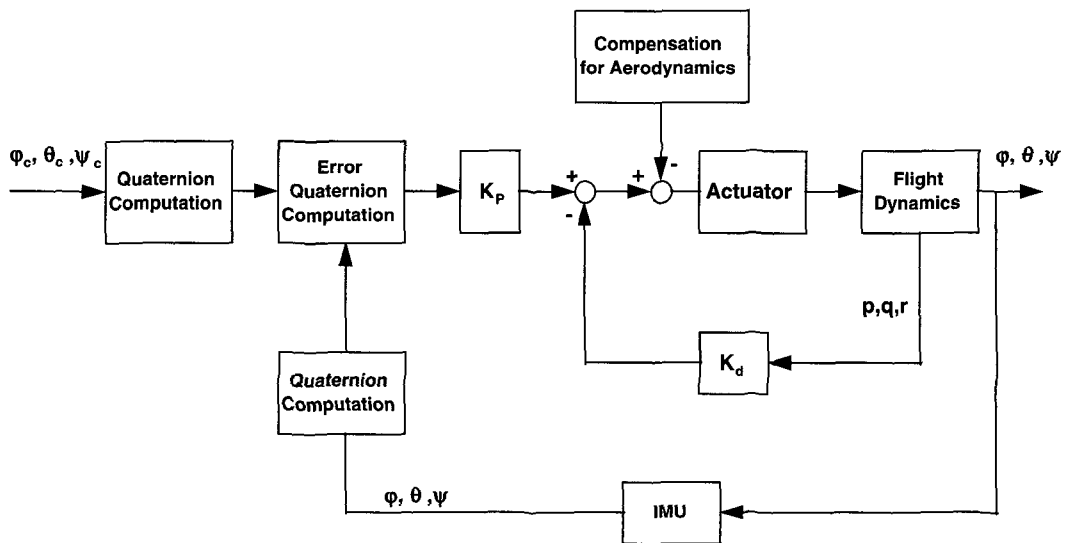


그림 2. 쿼터니온 궤환 제어루우프의 블럭선도

체 좌표계에서 정의된 값이므로 자세오차, 각속도 및 설계에 사용된 운동모델의 좌표축이 모두 일치하게 된다. 따라서, 오일러각 궤환 구조에서는

불가피했던 작은각 가정이 쿼터니온을 도입함에 의해 해결될 수 있다. 이점은 7절에서 다루어질 시뮬레이션 결과를 보면 좀 더 분명해질 것이다.

그림 2는 본 논문에서 제시하려는 쿼터니온 궤환 제어루우프 구조이다.

4. 쿼터니온 궤환 제어기

문제를 단순화시키기 위해 동압과 마하수를 고정시키자. 그러면 (5), (6) 식으로 주어진 병진운동식과 (2), (9), (10), (13), (14)식으로 주어진 회전운동식은 다음과 같은 형태로 다시 씌여질 수 있다.

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = \Omega J\omega + h_1(z) + h_2(\omega) + B_1 \delta \\ \dot{z} = f(z) + g(\omega) + B_2 \delta \end{cases} \quad (22)$$

윗 식에서 $z = [\alpha, \beta]'$ 이다.

이제 구동장치의 동적 지연이 무시할 만하다는 가정하에 제어입력 δ 를 다음과 같이 구성하자.

$$\delta = B_1^{-1}(\nu - h_1(z) - h_2(\omega)) \quad (23)$$

윗식에서 ν 는 앞으로 정의될 외부입력이고, B_1 의 가역성은 가정 5에 의해 보장된다. (23)식을 (22)식에 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$J\dot{\omega} = \Omega J\omega + \nu \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & f(z) + g(\omega) \\ & + B_2 B_1^{-1}(\nu - h_1(z) - h_2(\omega)) \end{aligned} \quad (25)$$

q_b^c 를 현재의 동체자세에서 요구자세로의 변환을 나타내는 쿼터니온이라 할 때, q_b^c 의 벡터

부분 χ_e 는 3절에서 설명한 바와 같이 동체좌표계로 표현된 자세오차 정보가 된다. 기준좌표계로부터 동체자세와 요구자세로의 변환을 나타내는 쿼터니온을 각각 q_i^b 및 q_i^c 라 할 때, q_b^c 는 (21)식에 보인 쿼터니온 연산에 따라 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$q_b^c = (q_i^b)^{-1} \circ q_i^c \quad (26)$$

이제 (23)식에 포함된 외부입력 ν 를 다음과 같이 정의하자.

$$\nu = -K_p \chi_e - K_d \omega \quad (27)$$

윗 식에서 K_p, K_d 는 양의 한정(Positive Definite) 행렬이다.

(27)식을 (23)식에 대입하면 다음과 같은 최종적인 제어법칙을 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta = & B_1^{-1}(-K_p \chi_e - K_d \omega \\ & - h_1(z) - h_2(\omega)) \end{aligned} \quad (28)$$

또한 주어진 제어법칙에 의해 구성되는 폐루우프 시스템은 (28)식을 (24)식과 (25)식에 대입함에 의해 구해진다. 즉,

$$J\dot{\omega} = \Omega J\omega - K_p \chi_e - K_d \omega \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & f(z) + g(\omega) + B_2 B_1^{-1}(-K_p \chi_e \\ & - K_d \omega - h_1(z) - h_2(\omega)) \end{aligned} \quad (30)$$

5. 안정성 해석

이 절에서는 (29), (30)식으로 주어지는 페루우프 시스템의 안정성 문제를 다룬다. 페루우프의 안정성은 두 단계를 거쳐 증명될 수 있다. 첫단계는 (29)식으로 주어진 회전운동의 안정성을 증명하는 일이다. 회전운동의 안정성은 우주비행체 및 강체를 대상으로 한 여러 연구결과[Thu96, Wie89, Wei93, Wen91]를 토대로 쉽게 증명될 수 있다. 편의상 원하는 자세 또는 자세명령이 고정되어 있다고 가정하고, 양의 한정 함수 V 를 다음과 같이 정의하자.

$$V = \frac{1}{2} \omega' K_p^{-1} J \omega + \chi_e' \chi_e + (1 - q_{4e})^2 \quad (31)$$

윗식에서 χ_e 및 q_{4e} 는 각각 현재의 동체 자세에서 원하는 자세로의 좌표변환을 나타내는 오차 쿼터니온의 벡터 성분과 스칼라 성분이다. (31)식을 미분하고 그 결과식에 (17)식과 (29)식을 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$\dot{V} = \omega' K_p^{-1} (\Omega J \omega - K_p \chi_e - K_d \omega) + \omega' \chi_e \quad (32)$$

(32)식을 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = \omega' K_p^{-1} \Omega J \omega - \omega' K_p^{-1} K_d \omega$$

K_p 가 다음의 조건을 만족하도록 선정한다.

$$K_p^{-1} = c_1 J + c_2 I$$

윗 식에서 c_1, c_2 는 실수이고, I 는 단위행렬이다. \dot{V} 식의 첫 번째 항은 윗식에 의해 다음과 같이 썩여질 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega' (c_1 J + c_2 I) \Omega J \omega &= \\ c_1 (J \omega)' \Omega J \omega + c_2 \omega' \Omega J \omega \end{aligned}$$

윗식에서 Ω 는 (18)식을 만족하는 Skew-symmetric 행렬이므로 첫 번째 항과 두 번째 항이 모두 0이 된다. \dot{V} 식에서 첫 번째 항을 없애면 다음과 같은 식이 된다.

$$\dot{V} = -\omega' K_p^{-1} K_d \omega$$

K_p, K_d 가 양의 한정 행렬이므로 $K_p^{-1} K_d$ 도 또한 양의 한정 행렬 하고 \dot{V} 은 음의 한정(Negative Definite) 함수가 된다. 한편 V 가 ω 에 대해 Radially Unbounded이고 Trivial 해만이 $\dot{V} = 0$ 를 만족하므로 주어진 시스템은 전역적으로 점근 안정(Globally Asymptotically Stable)하다.

자세명령이 임의로 변하는 경우에도 안정성이 보장되는 제어법칙을 얻는 한 방법은 (27)식으로 주어진 외부입력 ν 를 다음과 같이 수정하는 것이다[Wie89, Wei93].

$$\nu = -\Omega J \omega + J \dot{\omega}_c - K_p \chi_e - K_d (\omega - \omega_c) \quad (33)$$

윗식에서 ω_c 는 자세명령의 각속도를 의미한다. 그러한 내용은 본 논문의 초점을 벗어나므로 더 이상 다루지 않는다.

논문/유도부기 부문

두 번째 단계는 (30)식으로 주어진 병진운동의 안정성을 증명하는 일이다. 그러기 위하여 (30)식을 다음과 같이 다시 써 보자.

$$\dot{z} = f(z) - B_2 B_1^{-1} h_1(z) + \eta(\omega, \chi_e) \quad (34)$$

윗식에서

$$\eta(\omega, \chi_e) = g(\omega) + B_2 B_1^{-1} (-K_p \chi_e - K_d \omega - h_2(\omega)) \quad (35)$$

앞서 설명한 바와 같이 제어법칙 (29)는 z 에 상관없이 고정된 자세명령에 대한 회전운동을 점근적으로 안정하게 만든다. 이 경우, (35)식의 $\eta(\omega, \chi_e)$ 도 시간에 따라 0에 접근하게 된다. 따라서

$$\dot{z} = f(z) - B_2 B_1^{-1} h_1(z)$$

가 BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정하면 (34)식의 안정성이 보장된다.

윗식을 선형화하여 안정성이 보장되는 조건을 구해보면

$$Z_\alpha + \frac{Z_t}{M_t} M_\alpha < 0 \quad (36)$$

윗 식에서 $Z_\alpha = \frac{\partial Z_\alpha}{\partial \alpha}$, $M_\alpha = \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha}$ 이다.

한편 $(Z_\alpha + \frac{Z_t}{M_t} M_\alpha)$ 는 δ_q 에 대한 q 의 전달 함수가 갖는 영점이며 따라서 (36)식은 회전운동의 영점동력학이 안정하다는 것을 의미한다. 숨겨

진 모드가 출력의 영점동력학과 같은 이유는 제시한 제어법칙 (28)이 입출력 궤환 선형화[Lin94]에 근거를 두고 있기 때문이다.

지금까지 설명한 내용들은 다음과 같은 정리로 요약될 수 있다.

정리 1. 제시한 제어법칙 (28)에 의해 구성되는 페루우프 시스템 (20), (30)은 다음과 같은 조건하에 전역적으로 점근 안정하다.

조건 1. $\dot{z} = f(z) - B_2 B_1^{-1} h_1(z)$ 는 BIBO 안정하다.

조건 2. K_p , K_d 는 양의 한정 행렬이고, 임의의 실수 c_1 , c_2 에 대해

$$K_p^{-1} = c_1 J + c_2 I \quad (37)$$

를 만족한다.

쿼터니온 궤환의 장점은 고유축 회전이라 불리우는 최단경로에 의한 자세변환이 가능하다는 점이다. 이를 성취하기 위해서는 임의의 양수 k_1 , k_2 에 대해서

$$K_p = k_1 J, K_d = k_2 J \quad (38)$$

가 성립해야 한다[Wie89]. 동체 각축의 관성모멘트가 서로 다른 경우 (38)식과 안정성을 위한 조건 (37)이 동시에 만족되지 않으나 Y 축과 Z 의 관성모멘트가 같은 십자형 대칭 유도탄의 경우 두 조건을 모두 만족시키는 K_p 를 구할 수 있다.

한편, 전술유도탄의 경우 l_a 를 c.g.(Center of Gravity)에서 c.p.(Center of Pressure)까지의 거

리라 할 때 $\frac{Z_t}{M_t} M_a = Z_t \frac{l_a}{l_x}$ 가 성립된다.

그런데 $|l_a| \ll l_x$ 이고 Z_a 는 공력학적으로 음의 부호를 가지므로 (36)식은 항상 만족된다.

6. 시뮬레이션 결과

이 절에서는 앞서 다룬 내용들은 뒷받침할 시뮬레이션 결과들을 보인다. 이 연구를 위하여 가공의 전술 유도탄을 모델로 택하고 앞서 설명한 개념에 따라 쿼터니온 궤환 자세 제어기를 설계하였다. 설계된 제어 루우프의 구조는 그림 2와 같다. 또한, 유도탄의 속도 변화에 대처하기 위하여 여러 속도 값에 대해 각각의 제어기를 설계한 후 계산된 제어 이득 행렬 K_p , K_d 를 속도의 함수로 스케줄하였다.

표 1은 마하수 1.8에서의 설계결과 즉, 제어이득과 안정도 및 성능 특성을 정리한 것이다. 성능해석시 구동장치 동특성은 무시하였으며 아래와 같은 선형화된 유도탄의 운동모델을 사용하였다.

$$\dot{x} = Ax + B\delta$$

여기서

$$x = [p, q, r, \alpha, \beta]^T,$$

$$\delta = [\delta_r, \delta_p, \delta_y]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -6.2290 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.7208 & 0 & -31.71 & 0 \\ 0 & 0 & -3.7208 & 0 & 31.71 \\ 0 & 1 & 0 & -1.6003 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1.6003 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5908.71 & 0 & 0 \\ 0 & 735.08 & 0 \\ 0 & 0 & 735.08 \\ 0 & -0.5748 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5748 \end{bmatrix}$$

한편 α, β 의 응답은 고유치가 -1.6251인 숨겨진 모드의 지배를 받으며, 이 모드는 δ_p 에 대한 q 의 전달함수가 갖는 영점동력학과 일치한다.

표 1. 피치/요 및 롤 자세제어루우프 설계결과

채널	Mach	K_p	K_d	제어기 성능				
				GM (dB)	PM (deg)	ω_{cr} (rad/sec)	Tr (sec)	%O.S.
피치/요	1.8	0.5442	0.0385	∞	72.26	30.88	0.05	13.0
롤	1.8	0.0667	0.0047	∞	76.56	30.18	0.056	8.6

<주> GM은 이득여유, PM은 위상여유, ω_{cr} 은 이득 교차주파수,

Tr은 90% 상승시간, %OS는 %오버슈트를 의미함.

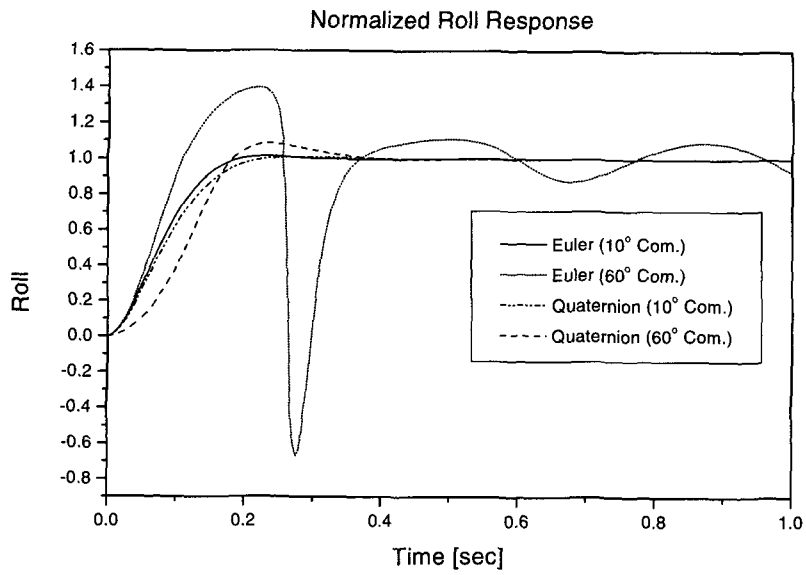


그림 3. 롤 자세제어루우프 응답 비교

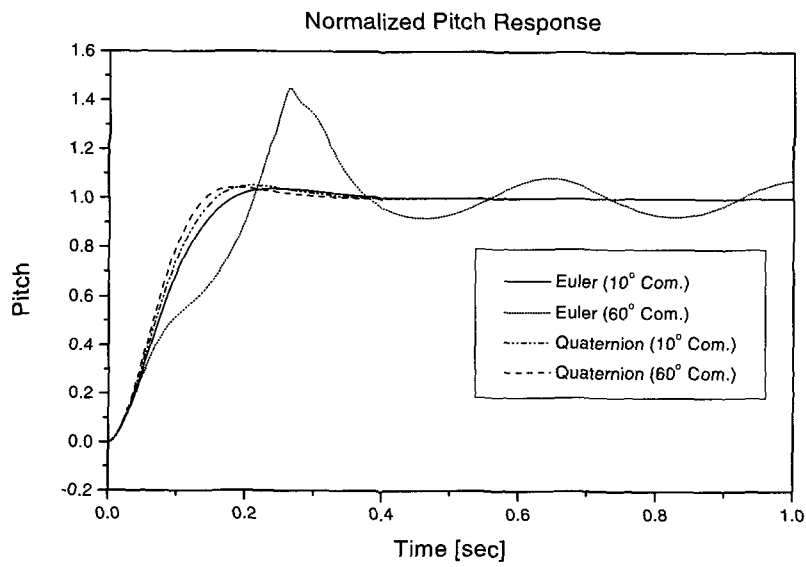


그림 4. 피치 자세제어루우프 응답 비교

그림 3 ~ 그림 5는 마하수가 고정된 운동모델을 사용하여 앞서 설계된 쿼터니온 궤환 제어기와 쿼터니온 제어기의 오차 쿼터니온 부분을 오일러각 오차로 대체한 오일러각 제어기의 시간응

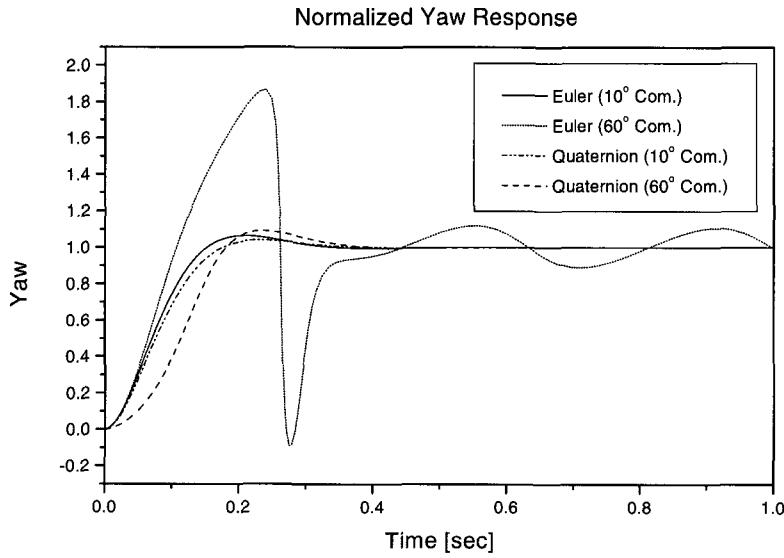


그림 5. 오 자세제어루우프 응답 비교

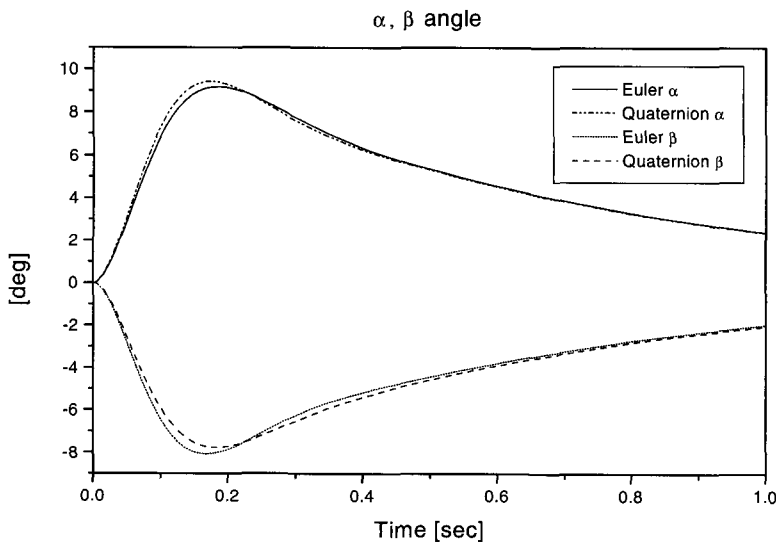


그림 6. 받음각 응답 비교

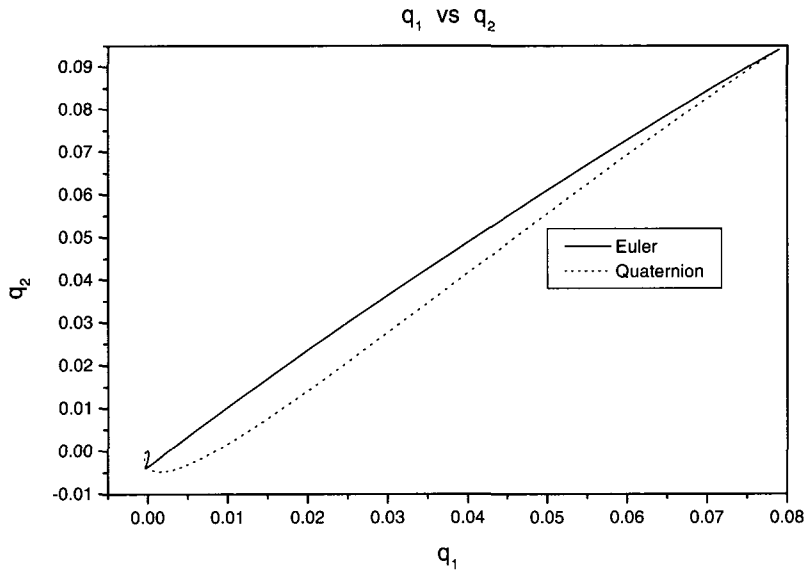


그림 7. 10° 명령에 대한 q_1 대 q_2

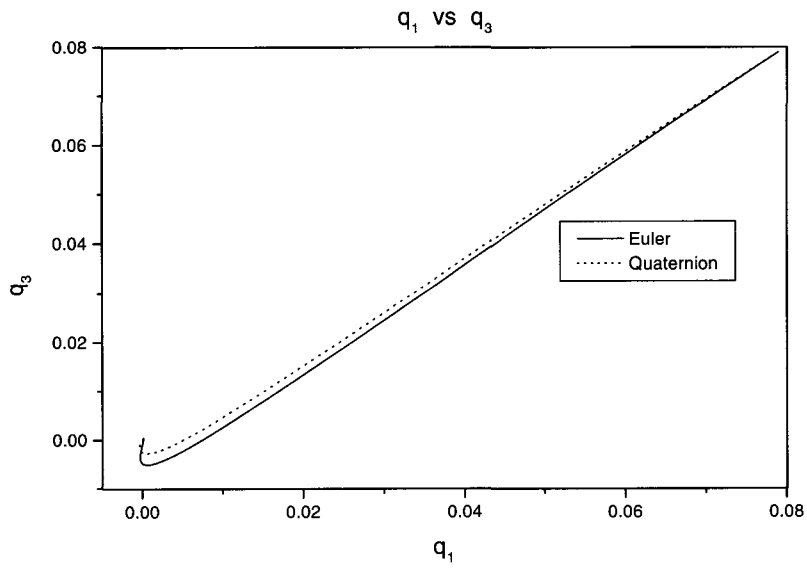


그림 8. 10° 명령에 대한 q_1 대 q_3

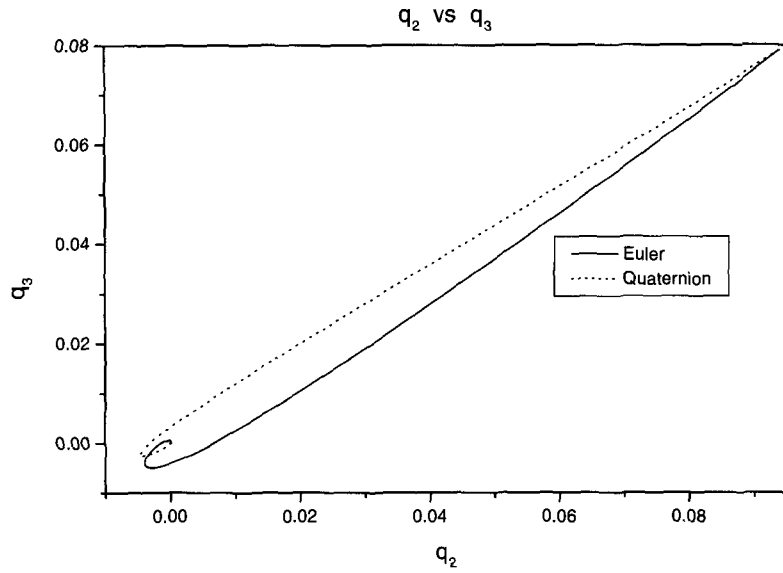


그림 9. 10° 명령에 대한 q_2 대 q_3

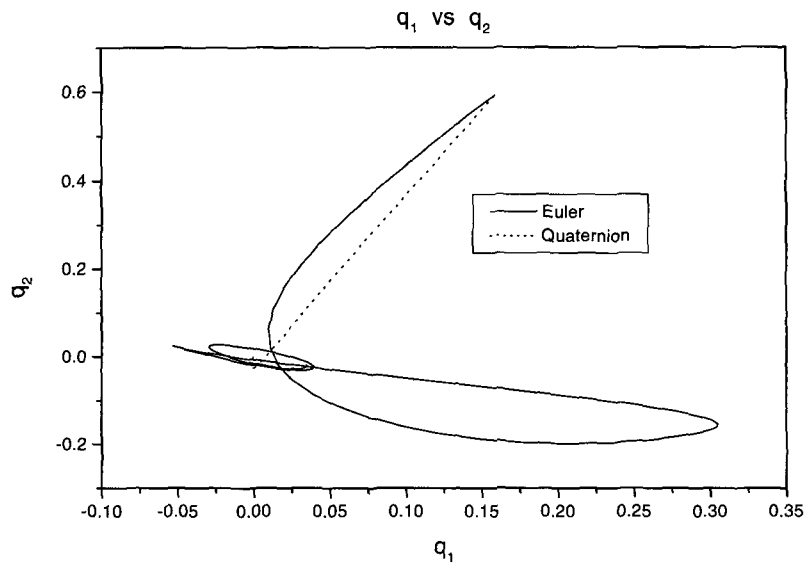


그림 10. 60° 명령에 대한 q_1 대 q_2

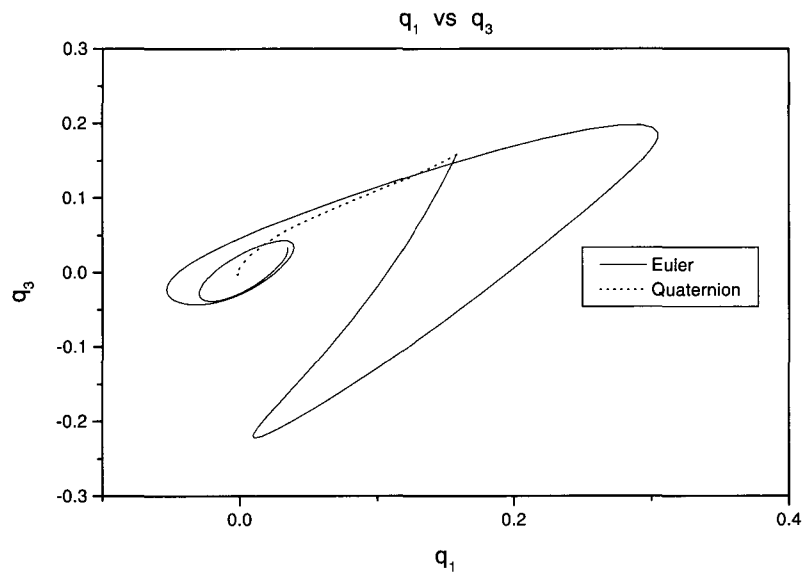


그림 11. 60° 명령에 대한 q₁ 대 q₃

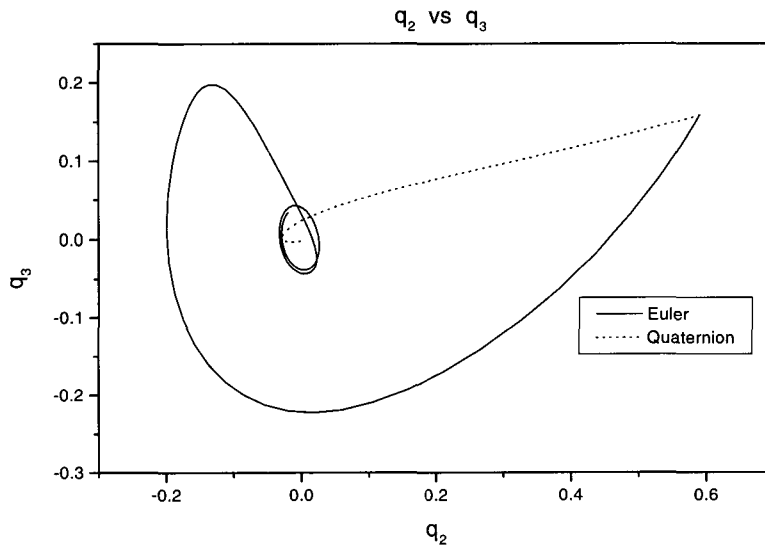


그림 12. 60° 명령에 대한 q₂ 대 q₃

답을 비교한 것이다. 각축의 오일러각을 동시에 각각 10° 와 60° 로 변화시키는 두 경우를 설정하여 시뮬레이션하고 시간응답특성을 쉽게 비교하기 위해 결과를 모두 오일러각으로 표현한 후 크기를 1로 정규화하였다. 그림에서 오일러각 제어의 경우 자세명령이 커짐에 따라 시간응답특성이 달라지는 것을 볼 수 있다. 그 이유는 앞서 3절에서 설명한 바와 같이 자세명령이 커지게 되면 작은각 가정이 더 이상 성립하지 않기 때문이다.

그림 6은 각축의 자세명령이 10° 일때의 받음각과 옆미끄럼각에 대한 시간응답으로서 해석을 통해 예측(숨겨진 모드)의 고유치가 -1.6251 인 대로 안정된 거동을 보여주고 있다.

한편 그림 7 ~ 그림 12는 앞서 설명한 시뮬레이션 결과로부터 q_1 대 q_2 , q_1 대 q_3 , q_2 대 q_3 를 그린 것이다. 그림에서 이상적인 고유축 회전의 경우에는 그래프가 시작점과 끝점을 잇는 직선이 되어야 한다. 쿼터니온 궤환의 경우 거의 고유축 회전에 가까우나 오일러각 제어의 경우에는 자세명령이 클수록 고유축 회전에서 크게 벗어나고 있다.

보다 실제에 가까운 상황에서 오일러각 궤환 제어방식과 쿼터니온 궤환 방식의 성능을 비교하기 위해 다음과 같은 6 DOF 시뮬레이션을 수행하였다. 이 시

뮬레이션에서는 고유주파수 25 Hz, 감쇄비 0.5인 2차시스템의 형태로 구동장치 동력학을 고려하였다.

경우 1. 공력항들이 정확히 상쇄된다고 가정
한 경우

경우 2. 공력항들이 정확히 상쇄되지 못한 경우
(공력학적 보상항들에 +20%의 불확실성이 존재한다고 가정함)

결과는 그림 13 ~ 그림 23과 같다. 경우 1에 대한 그림(그림 14 ~ 그림 18)을 보면 쿼터니온 궤환 방식이 오일러각 궤환 방식에 비해 보다 신속하고 정확한 명령추종 성능을 보이고 있음을 알 수 있다. 이는 쿼터니온 궤환 방식의 경우, 최단경로에 가까운 자세전환 기동을 할 수 있기 때문이다. 한편, 공력 보상항에 20%의 불확실성이 존재(경우 2)해도 명령추종 성능은 다소 떨어지지만 비교적 안정된 응답을 보이고 있다.

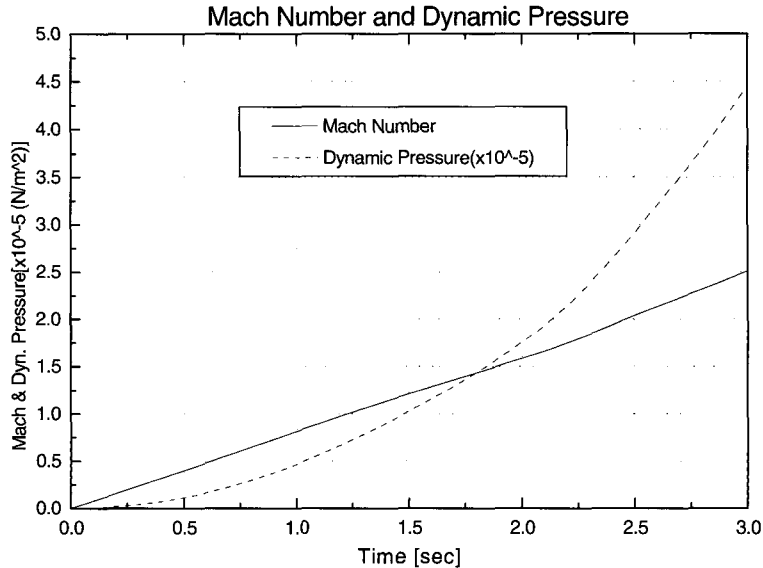


그림 13. 마하수와 동압 곡선

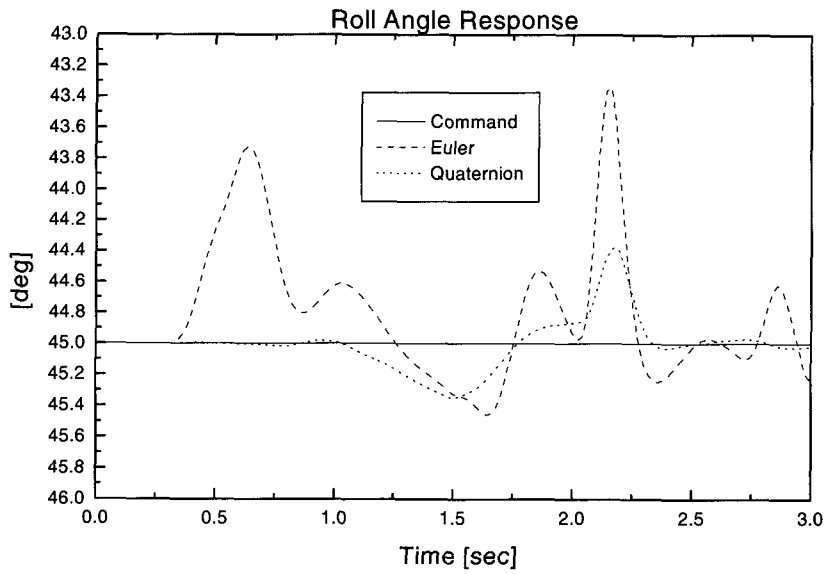


그림 14. 롤 자세제어루우프 응답 비교(경우 1)

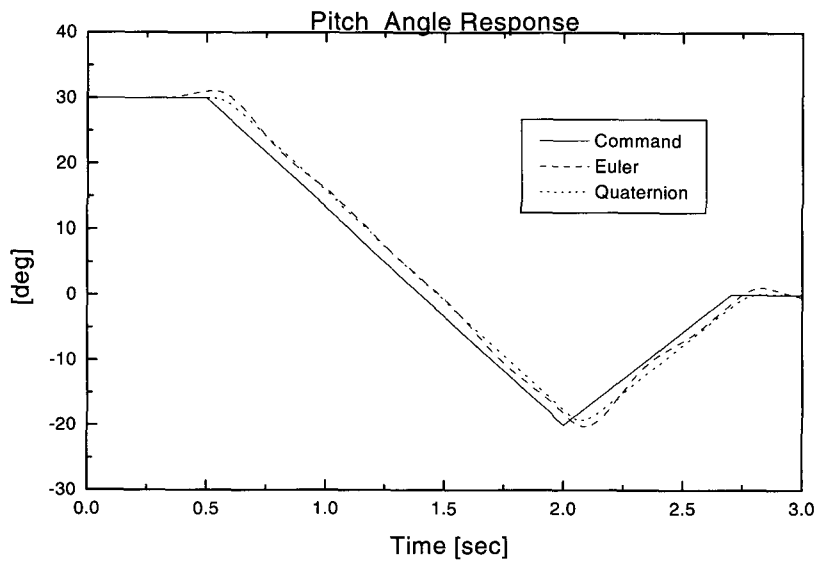


그림 15. 피치 자세제어루우프 응답 비교(경우 1)

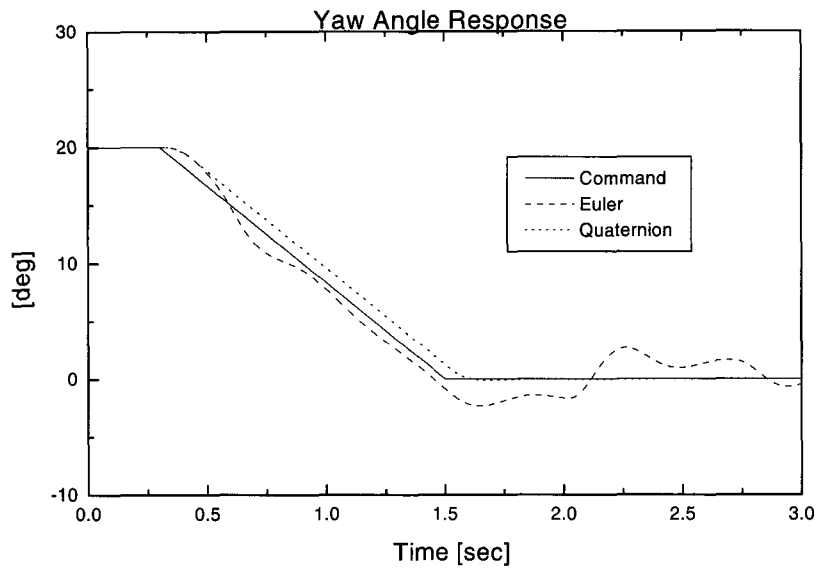


그림 16. 요 자세제어루우프 응답 비교(경우 1)

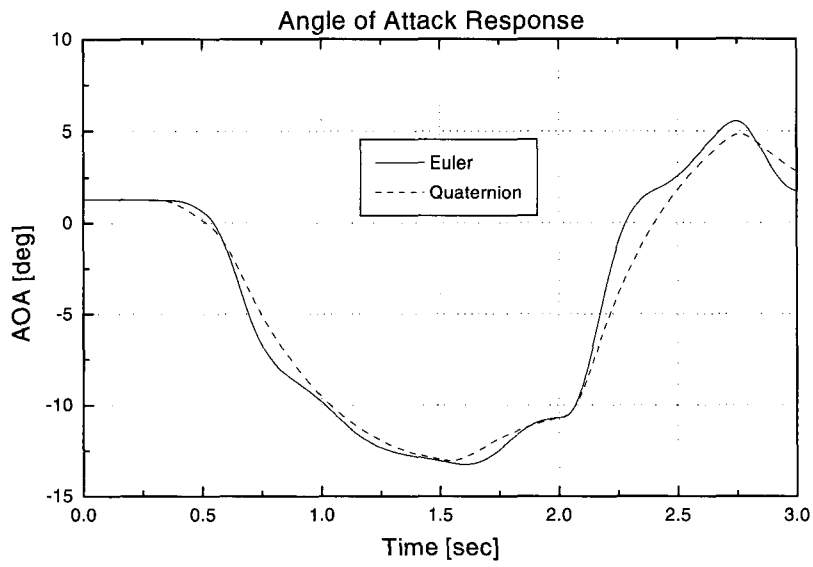


그림 17. 받음각 응답 비교(경우 1)

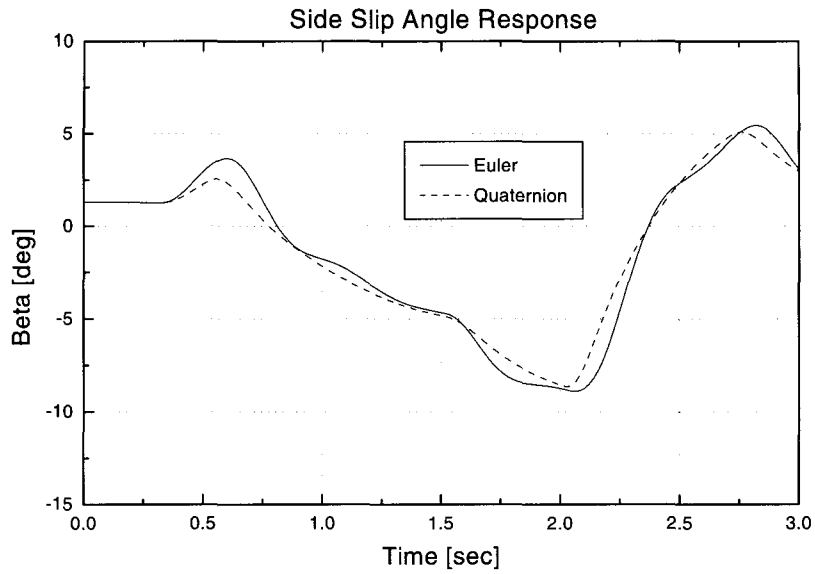


그림 18. 옆 미끄럼각 응답 비교(경우 1)

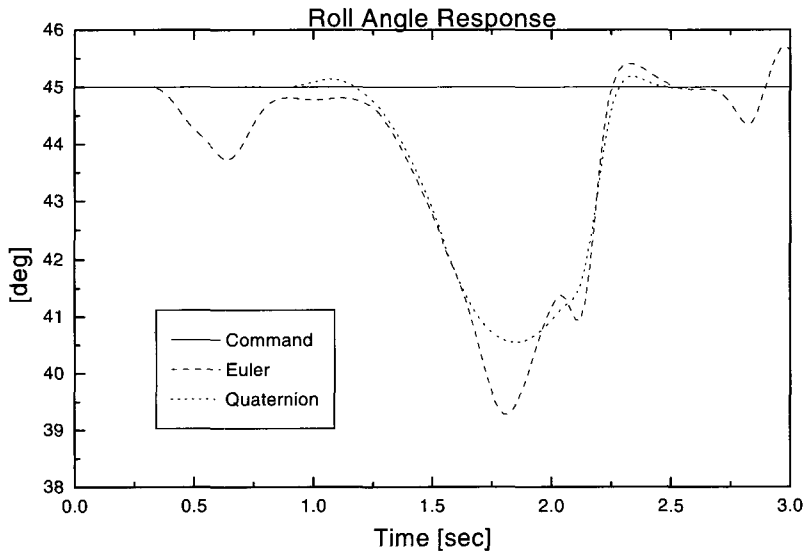


그림 19. 롤 자세제어루우프 응답 비교(경우 2)

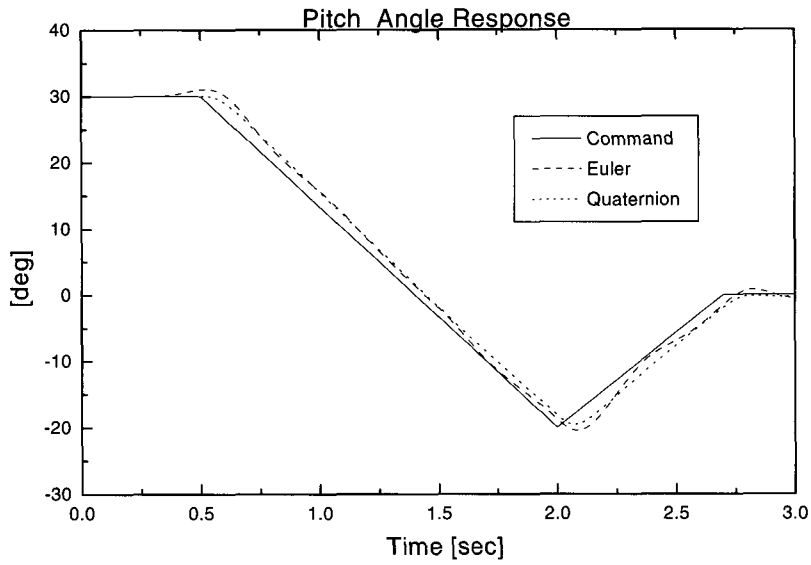


그림 20. 피치 자세제어루우프 응답 비교(경우 2)

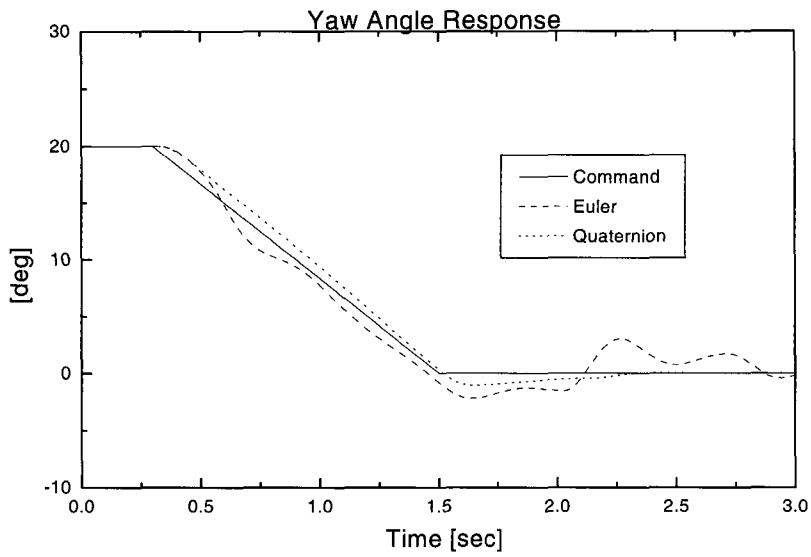


그림 21. 요 자세제어루우프 응답 비교(경우 2)

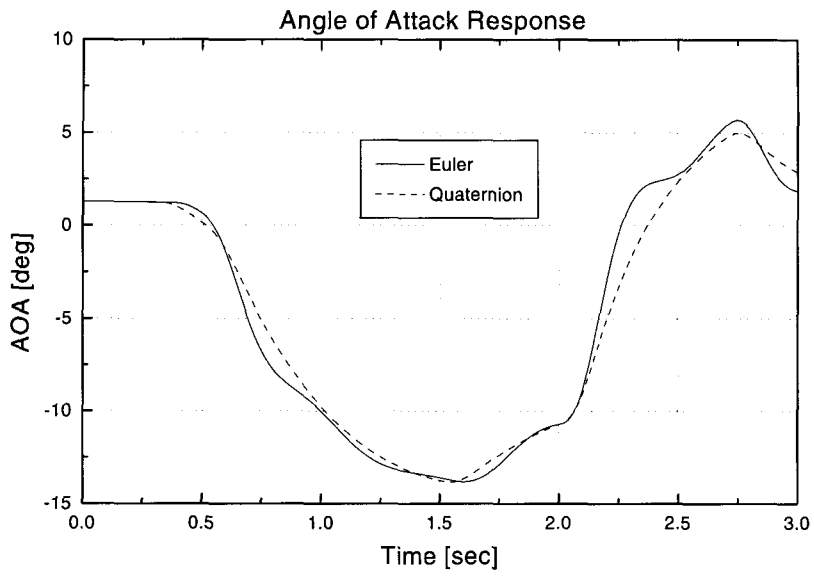


그림 22. 받음각 응답 비교(경우 2)

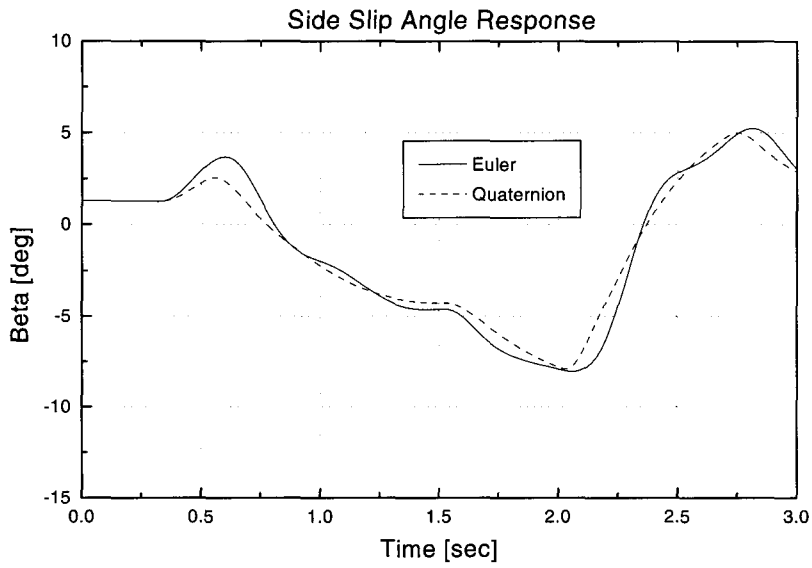


그림 23. 옆 미끄럼각 응답 비교(경우 2)

7. 결 론

본 논문에서는 추력벡터제어(Thrust Vector Control) 방식을 사용하는 전술 유도탄 자세제어에 오일러각 궤환보다 쿼터니온 궤환이 더 유리함을 보이고, 쿼터니온 궤환의 장점을 살피고 고속 회전에 가깝게 자세변환을 수행할 수 있는 쿼터니온 궤환 제어기의 설계 개념을 제안하였다. 제안한 제어기의 한 특징은 변화가 심한 공력 모멘트가 회전운동에 미치는 영향을 줄이기 위한 공력모멘트 보상항이 제어기에 포함되어 있다는 점이다. 또한, 제안한 제어기에 의해 구성되는 페루우프의 안정성이 각속도의 영점 동력학의 안정성에 좌우되며 일반적으로 전술 유도탄 각속도의 영점 동력학은 항상 안정하므로 페루우프의 안정성도 보장됨을 보였다.

시뮬레이션 결과들은 이러한 내용들을 뒷받침해 주고 있다. 그림 3 ~ 그림 5는 자세명령의 크기에 따라 시간응답 특성이 달라지는 오일러각 궤환의 결점이 쿼터니온 궤환에 의해 현저히 개선될 수 있음을 보여주고, 그림 7 ~ 그림 12는 쿼터니온 궤환을 통해 고속 회전에 매우 근접한 자세변환이 이루어짐을 보여주고 있다. 한편, 6 DOF 시뮬레이션 결과(그림 14 ~ 그림 18)는 변화하는 자세명령에 대해서도 유도탄이 매우 신속하고 정확하게 명령을 추종하는 것을 보여주고 있는데 이는 제안한 제어기의 최단경로에 가까운 자세변환 기동능력에 기인한다. 공력항을 완벽하게 상쇄시키지 못한 경우를 살펴 보기 위해 공력 보상항에 +20%의 불확실성이 존재한다고 가정하고 구동장치의 동적 지연(Dynamic Delay)을 고려하여 시뮬레이션 한 결과(그림 19 - 23 참조)에서도 쿼터니온 궤환방식이 안정하며 오일러각 제어 방식에 비해 우수한 명령추종 성능을 보였

다.

본 논문에서는 불완전한 공력 보상, 구조 파라미터의 불확실성, 구동장치의 동적 지연, 외부 교란 등에 대한 강인성 문제가 깊이있게 다루어지지 못했으나 그러한 연구는 추후 과제로 남겨 둔다.

참고문헌

- [Lin94] Lin, C.F., *Advanced Control Systems Design*, Prentice Hall, 1994.
- [Mor68] Mortensen, R.E., "A Globally Stable Linear Attitude Regulator," *Int. J. of Control*, Vol. 8, No. 3, pp. 297-302, 1968.
- [Oh97] Oh, J.-H. and Ha, I.-J., "Missile Autopilot Design Via Functional Inversion and Time-Scaled Transformation," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, No. 1, pp. 64-76, 1997.
- [Sio93] Siouris, G.M., *Aerospace Avionics Systems: A Modern Synthesis*, Academic Press, 1993.
- [Thu96] Thurman, S.W. and Flashner, H., "Robust Digital Autopilot Design for Spacecraft Equipped with Pulse-Operated Thrusters," *J. Guidance*, Vol. 19, No. 5, pp. 1047-1055, 1996.
- [Wei93] Weiss, H., "Quaternion-Based Rate/Attitude Tracking System with Application to Gimbal Attitude Control," *J. Guidance*, Vol. 16, No. 4, pp. 609-616, 1993.
- [Wen91] Wen, J.T.-Y. and Delgado K.K., "The Attitude Control Problem," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 36,

논문/유도 무기 부문

- No. 10, pp. 1148-1162, 1991.
- [Wie85] Wie, B. and Barba, P.M., "Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers," J. Guidance, Vol. 8, No. 3, pp. 360-365, 1985.
- [Wie89] Wie, B., Weiss, H., and Arapostathis, A., "Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations," J. Guidance, Vol. 12, No.3, pp. 375-380, 1989.