

최적 충돌각 제어법칙에 관한 연구

A Study of Optimal Impact Angle Control Laws

송택렬, 신상진
한양대학교 제어계측공학과

Abstract

As a part of trajectory modulation to increase system survivability and terminal effectiveness, impact angle control is required in the terminal phase of tactical missile systems. The missile systems are not allowed to have high altitude to reduce probability of detection by sensors of missile defense systems. In this paper, an analytic form of a time-optimal control law is suggested in the case of constrained missile maneuverability and impact angle under the assumption of a zero-lag autopilot. The control law is obtained by establishing optimal missile-target engagement geometry in the vertical plane. Extension of the law for missiles with autopilot response lags requiring a numerical solution is studied by introducing an iterative algorithm for optimal switching time determination of which the initial switching instants are obtained from the analytic solution. Also suggested is a closed-form impact angle control law derived by an energy-optimal approach. The performances of the proposed guidance laws are evaluated by a series of computer runs.

Keyword: Guidance and Control

1. 서론

함대함 또는 대전차 유도탄 체계는 표적과 충돌시 탄폭효과를 증대시켜야 함과 동시에 대유도탄 방어체계의 공격에 대비해 체계의 생존성을 높이기 위한 궤도성형 방법으로써 충돌각 제어가 요구된다. 근래에 들어 대유도탄 방어체계의 능력이 향상됨에 따라 충돌각 제어 유도법칙은 다양한 형태로 종말궤도성형에 적용될 수 있겠으나 지금까지 이러한 유도 알고리즘을 주제로한 연구결과들은 드물다. 공대지 유도탄에 응용될 수 있도록 최적 충돌각 제어법칙이 [1]에 발표된바 있으나 해를 구하기 위해 관성좌표계에서 기술된 운동방정식을 선형화 하는 방식으로 전개되었다. 종말요격단계에 적합한 충돌각 제어법칙을 소요되는 에너지가 최소화 되게 구한 방법이 [2]에서 소개되었다. 여기

서 제안된 유도법칙은 요구되는 충돌각을 성취할 수 있도록 표적이 회피기동을 함에 따라 회전하는 aiming frame 을 정의하고 최적화 해를 얻기 위해 이 회전하는 좌표계에 나타난 표적과 유도탄의 상대 운동방정식을 사용하였다. [3]에서는 BPNG (biased proportional navigation guidance)를 소개하여 원하는 충돌각을 성취시키고 miss distance 를 줄여 주는 유도방식을 제안했다. [4]에서는 PNG 와 pure pursuit 방식을 복합적으로 사용함으로써 미리 정해 놓은 충돌경로에 유도탄을 진입시키는 유도법칙을 제안했다. 이와 유사하게 [5]에서는 IPNG(Integrated PNG)를 사용하여 궤도성형하는 방법을 제시했다.

본 논문에서는 수직 평면상에서 기동에 제한을 가진 유도탄이 자동조종장치의 응답지연을 통해 기동을 하여 표적을 요격할 때 소요시간을 최소화 하는 최소시간 충돌각 유도법칙을 제안한다. 이 최

적제어의 해는 수치해석을 통해 구해져야 하나 수치해석적으로 스위칭 시간을 결정하는 데는 알고리즘의 수렴성에 따른 어려움이 존재하게 된다. 이 문제를 해결하기 위해 자동조종장치의 응답지연이 없다고 가정한 단순화된 시스템 동력학에 대해 해석적인 방법으로 최적해를 구한 후 이를 응답지연이 존재하는 실제적인 시스템의 스위칭 시간을 결정하는 알고리즘의 초기치로 사용하는 방안을 제시하여 최적해를 구하는데 소요시간을 줄이고 안정된 수치해석 알고리즘을 얻고자 한다. 또한 제안한 유도법칙의 성능평가로써 기존의 에너지를 최소화하는 최적유도법칙[2]의 확장된 형태와 비교해 본다.

2. 최소시간 충돌각 유도법칙

이 장에서는 유도탄과 표적의 요격상황을 수직 평면상에서 충돌각과 제어입력 크기의 제한이라는 두 가지 요소가 포함된 최소 소요시간문제를 설정하게 된다. 표적은 정지해 있고 유도탄이 가지는 응답지연은 1 차 시스템으로 모델링 된다고 가정한다. 요격상황을 단순화시켜 구한 해를 초기값으로 하여 수치해석적인 방법을 통해 제어명령인 스위칭 시간을 얻는다.

2.1 문제 설정

유도탄과 표적의 요격상황이 그림 1에 나타나 있다. 여기서 표적의 위치는 유도탄에 탑재된 능동형 탐색기에 의해 감지된다. 표적은 (X_T, Y_T) 에 위치하고 유도탄은 등속도 V_m 을 가지고 속도방향에 수직인 횡방향으로 가속도 A_L 을 가지며 이 가속도를 기동력으로 하여 비행경로각(γ)을 변화시킨다. X 축에서 시계반대방향으로 정의된 각을 γ 의 양의 값으로 정의한다.

그림 1으로부터 시스템 동력학은 $\dot{x} = f(x, u)$ 의 형태로 아래와 같이 기술된다.

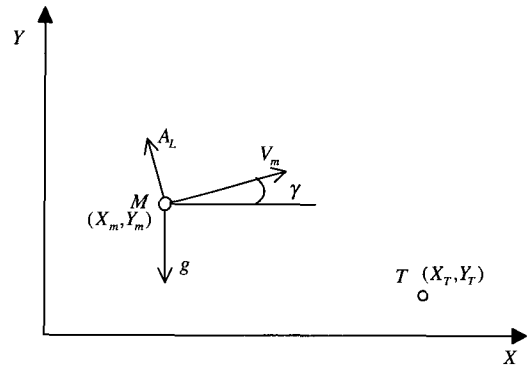


그림 1. 유도탄과 표적의 요격상황
Fig. 1. Missile-target engagement geometry

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{A}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m \cos \gamma \\ V_m \sin \gamma \\ \frac{1}{V_m}(A_L - g \cos \gamma) \\ -\frac{1}{\tau}A_L + \frac{1}{\tau}u \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \begin{pmatrix} X_{m_0} \\ Y_{m_0} \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서 A_L 은 제어입력 $u(t)$ 가 1 차의 응답지연을 통해 나온 가속도이고 자동조종장치가 갖는 응답지연의 특성을 시상수 τ 로 표현했다. 소요되는 시간을 최소화하기 위해 충돌시까지 소비된 제어입력의 크기들은 부등식 $|u(t)| \leq M$ 을 만족해야 한다. 그리고 상태변수에 대하여 prescribed boundary condition 은 $X(t_f) = X_T, Y(t_f) = Y_T, \gamma(t_f) = \gamma_f < 0$ 이고 γ_f 는 요구된 비행경로각이다.

위의 상태방정식으로부터 최소시간문제의 해를 구하기 위해서 [6]을 참조하여 접근할 수 있지만 문제설정에 비선형성이 존재하여 해석적인 해의 형태를 구할 수는 없다. Hamiltonian H 는

$$H = \lambda^T(t)f(x) + \mu(u - M^2 + \alpha^2). \quad (2)$$

여기서 $\lambda(t) = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_\gamma, \lambda_{A_L})^T$ 는 costate vector 이

고, μ 는 constant Lagrange multiplier, α 는 slack variable 이다. 식(2)의 마지막 항은 제어입력의 부등 식관계를 등식으로 변환한 것이다. $\lambda(t)$ 는 다음을 만족한다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_x \\ \dot{\lambda}_y \\ \dot{\lambda}_{A_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_m(\lambda_x \sin \gamma - \lambda_y \cos \gamma) + \frac{\lambda_y}{V_m} g \sin \gamma \\ -\frac{1}{V_m} \lambda_y + \frac{1}{\tau} \lambda_{A_L} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Pontryagin minimum principle 을 적용시키면 최적제 어 $u(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$u = \begin{cases} M & , \lambda_{A_L} < 0 \\ -M & , \lambda_{A_L} > 0 \\ \text{off-boundary solution,} & \lambda_{A_L} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

식(4)에서 특이구간(singular interval)의 존재성을 검토해 보는 것이 흥미롭다. 특이구간을 S 라 표기 하면 이 구간에서는 비경계치 해(off-boundary solution)가 존재하며 $\lambda_{A_L} = 0$ 을 만족한다. S 의 존재조건은 prescribed corner condition 이 없으므로 Hamiltonian 과 costate 가 연속하고 S 에서는 $\lambda_{A_L} = 0, \dot{\lambda}_{A_L} = 0, (\lambda_y = 0, \dot{\lambda}_y = 0)$ 이 된다. 간단한 대수학적인 수식계산을 거치면 상수 λ_x 와 λ_y 은 다음식을 만족한다.

$$\begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \bar{\gamma}}{V_m} \\ -\frac{\sin \bar{\gamma}}{V_m} \end{pmatrix}, \quad \text{for } t \in [0, t_f] \quad (5)$$

여기서 비행경로각 $\gamma = \bar{\gamma}$ 으로 상수가 된다. 위의 결과는 특이구간 S 가 존재한다면 이 구간에서 제어입력이 다음과 같이 된다는 것을 말해준다.

$$A_L = u = g \cos \bar{\gamma} \quad (6)$$

prescribed boundary condition 과 식(1),(3)에 기술된 식

으로부터 two-point boundary value problem 의 해를 구한 것은 식(4)의 스위칭 함수와 같이 나타나며 on/off 스위칭 시간을 구하는 것이 아직까지 남아 있는 문제다. 비선형성 때문에 해를 구하기 위해 수치해석적 방법으로 접근해야 하겠지만 이러한 방법은 전산 시간이 길뿐만 아니라 매개변수의 변동에 민감하게 되며 알고리즘의 수렴성에 문제가 존재하게 된다. 수치해석적인 문제를 해결하기 위해 제안된 반복수치 알고리즘의 초기값을 선정하는데 있어서 문제설정을 단순화 시킨 후 해석적인 해를 구하여 쓴다. 물론 단순화 시킨 시스템도 비선형이나 기하학적인 접근방법으로 정확한 해를 구할 수 있다.

2.2 단순화된 운동방정식

식(1)의 운동방정식은 자동조종장치에 응답지연이 없다는 가정과 중력에 의한 γ 의 변화를 무시할 때 다음과 같이 단순화된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m \cos \gamma \\ V_m \sin \gamma \\ \frac{1}{V_m} \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \begin{pmatrix} X_{m_0} \\ Y_{m_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

여기서 $\tilde{u} \triangleq u - g$ 이다. 제어입력의 제한 $|u| \leq M$ 은 $-M_2 \leq \tilde{u} \leq M_1$ 을 의미하며 $M_1 = M - g$ 그리고 $M_2 = M + g$ 이다. t_f 에서 상태변수의 구속조건은 $X(t_f) = X_T, Y(t_f) = Y_T, \gamma(t_f) = \gamma_f < 0$ 이다. 앞절에서와 같은 방식으로 전개해 나가보면

Hamiltonian $H = \lambda^T(t)f(x) + \mu_1(\tilde{u} - M_1 + \alpha_1^2) + \mu_2(-M_2 - \tilde{u} + \alpha_2^2)$ 이고 $\lambda(t)$ 는 costate vector 이며, μ_1 과 μ_2 는 constant Lagrange multiplier, α_1 과 α_2 는 slack variable 이다. 그러면 costate $\lambda(t)$ 는 다음과 같은 상태방정식을 갖게 된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_x \\ \dot{\lambda}_y \\ \dot{\lambda}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_m(\lambda_x \sin \gamma - \lambda_y \cos \gamma) \end{pmatrix} \quad (8)$$

그리고 최소 소요시간개념으로 최적화시킨 해는 아래와 같은 스위칭 함수이다.

$$\tilde{u} = \begin{cases} M_1 & , \lambda_\gamma < 0 \\ -M_2 & , \lambda_\gamma > 0 \\ \text{off-boundary solution} & , \lambda_\gamma = 0 \end{cases} \quad (9)$$

특이구간 S 에서 비경계치 해는 $\lambda_\gamma = 0$ 과 $\dot{\lambda}_\gamma = 0$ 으로부터 결정한다. H 는 시간에 대한 함수가 아니고 prescribed corner condition 이 없기 때문에 $t \in [0, t_f]$ 인 구간에서 $H = -1$ 이다. 이것은 특이구간 S 에서 다음과 같은 결과를 가져다 준다.

$$V_m(\lambda_x \cos \gamma + \lambda_y \sin \gamma) = -1 \quad (10)$$

또한 $\dot{\lambda}_\gamma = 0$ 으로부터 아래식을 얻는다.

$$V_m(\lambda_x \sin \gamma - \lambda_y \cos \gamma) = 0. \quad (11)$$

항상 상수값을 갖는 λ_x 와 λ_y 는 $\lambda_x = -\frac{\cos \gamma}{V_m}$

과 $\lambda_y = -\frac{\sin \gamma}{V_m}$ 을 만족하므로 γ 는 구간 S 에서 상수이어야 한다. 여기서 상수값을 갖는 γ 를 $\bar{\gamma}$ 라고 하면 S 에서 $\bar{\gamma}$ 는 $\tilde{u} = 0$ 을 의미한다. 초기 $\gamma(0) = 0$ 이므로 구속조건 $\gamma_f < 0$ 을 만족하려면 $\bar{\gamma}$ 는 양의 값을 갖는다.

$\lambda_x = -\frac{\cos \bar{\gamma}}{V_m}$ 와

$\lambda_y = -\frac{\sin \bar{\gamma}}{V_m}$ 을 식(8)에 대입하면 아래식을 얻는다.

$$\dot{\lambda}_\gamma = \sin(\bar{\gamma} - \gamma(t)) \quad (12)$$

위 식에서 $\bar{\gamma} > \gamma(t)$ 이면 $\dot{\lambda}_\gamma > 0$ 이고 $\bar{\gamma} < \gamma(t)$ 이면 $\dot{\lambda}_\gamma < 0$ 이다. $\gamma(0) = 0$ 이기 때문에 $\dot{\lambda}_\gamma(0) > 0$ 이고 $\tilde{u}(0) = M_1$ 이 되어야 $\gamma_f < 0$ 을 만족하게 된다. 그러므로 $\lambda_\gamma(0) < 0$ 과 $\lambda_\gamma(t) < 0$ 은 $\gamma(t_1) = \bar{\gamma}$ 가 만

족되는 시간 $t = t_1$ 가 될 때까지 $\tilde{u}(t) = M_1$ 을 유지하게 된다. 이러한 문제에 대한 스위칭 함수 $\lambda_\gamma(t)$ 를 그림 2 에 도시하였다.

특이구간 $[t_1, t_2]$ 에 있는 모든 t 에 대하여 $\lambda_\gamma(t) = 0$ 과 $\tilde{u}(t) = 0$ 이 성립한다. 그림 2 에서 흑시라도 있을 수 있는 궤적②의 존재가능성을 조사해 보면, $t_2 < t$ 인 구간에서 $\lambda_\gamma(t) < 0$ 이면 그 구간에서 $\tilde{u} = M_1$ 임을 나타내고 이때 $\gamma(t)$ 는 $\bar{\gamma} > 0$ 에서부터 계속 증가하게 된다. 또한 이러한 관계는 $\dot{\lambda}_\gamma < 0$ 이므로 $\lambda_\gamma(t) < 0$ 과 $\tilde{u} = M_1$ 을 계속 유지하게 된다. 그러나 충돌시 요구되는 비행경로각 γ_f 가 음의 값이므로 궤적②와 같은 현상을 생길

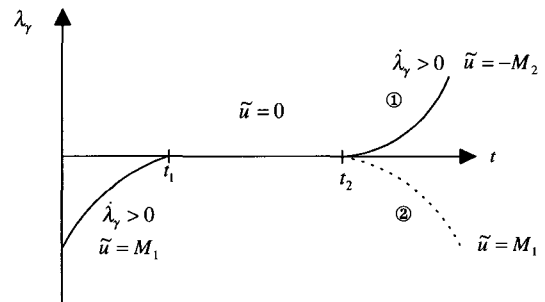


그림 2. 스위칭 함수

Fig. 2. The switching function 수 없다. 그림 2 에서 같은 방식으로 궤적①에 대해서도 유추해보면 궤적①은 $\gamma_f < 0$ 을 만족하게 되고 $t \in [t_2, t_f]$ 구간에서 $\lambda_\gamma(t) > 0$ 이기 때문에 t_2 시간 이후에 더 이상의 스위칭이 필요하지 않다. 그러므로 종말단계동안에 특이구간은 기껏해야 한개가 존재한다고 결론 내릴 수 있다. 특이구간의 길이는 $t = 0$ 일 때 유도탄과 표적의 상대거리에 따라 결정된다. 소요시간적으로 최적화된 해가 존재하기 위해 가능한 최단거리는 스위칭 시간이 전구간동안 한번인 경우이며 이 경우에는 $t_1 = t_2$ 이 되

고 최적제어는 bang-bang 형태가 된다. 최적제어 u 가 식(13)으로 주어지므로 이 식으로부터 유도탄의 궤적을 그릴 수 있고 그려진 궤적으로부터 최적화된 t_1 과 t_2 를 기하학적인 방법을 통해 구한다.

$$u = \begin{cases} M & , 0 \leq t < t_1 \\ g & , t_1 \leq t < t_2 \\ -M & , t_2 \leq t \end{cases} \quad (13)$$

그림 3 에 도시한 유도탄의 궤적으로부터 t_1 과 t_2 가 다음식으로 구해진다.

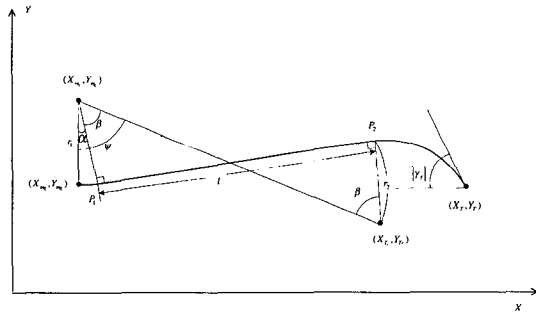


그림 3. 소요시간 최적화 궤적
Fig. 3. Time-optimal trajectory

$$t_1 = \frac{V_m}{M-g} \alpha$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{(X_{T_c} - X_{m_c})^2 + (Y_{T_c} - Y_{m_c})^2 - (r_1 + r_2)^2}}{V_m} + t_1 \quad (14)$$

여기서

$$\alpha = \psi - \beta, \quad \psi = \tan^{-1} \frac{|X_{T_c} - X_{m_c}|}{|Y_{T_c} - Y_{m_c}|}, \quad \beta = \cos^{-1} \frac{r_2}{R},$$

$$R = \frac{\sqrt{(X_{T_c} - X_{m_c})^2 + (Y_{T_c} - Y_{m_c})^2} \cdot r_2}{r_1 + r_2},$$

$$r_1 = \frac{V_m^2}{M-g}, \quad r_2 = \frac{V_m^2}{M+g}$$

$$X_{m_c} = X_{m_0}, \quad Y_{m_c} = Y_{m_0} + r_1$$

$$X_{T_c} = \frac{X_T + aY_T + ar_2\sqrt{a^2+1} - ab}{a^2+1}$$

$$Y_{T_c} = \frac{aX_T + a^2Y_T - r_2\sqrt{a^2+1} + b}{a^2+1} \quad (15)$$

$$a = \tan \gamma_f, \text{ and } b = -\tan \gamma_f \cdot X_T + Y_T,$$

문제설정에 있어서 표적은 정지된 것으로 가정을 했지만 적당한 필터로써 표적의 속도와 가속도가 추정된다면 이러한 상황에서도 최적화된 해를 구할 수 있다. 다음 절에서는 식(14)에서 구한 스위칭 시간 t_1 과 t_2 를 반복수치 알고리즘의 초기값으로 사용하여 2.1 절에서 거론된 최적제어문제의 해를 수치해석적인 방법으로 찾는다.

2.3 수치해석적인 해

식(6)으로부터 2.1 절의 문제설정에 대한 비경계치 해는 $u = g \cos \bar{\gamma}$ 을 만족함을 알 수 있다. 그러나 2.2 절의 단순화된 운동방정식과는 달리 스위칭 함수가 식(1)의 응답지연을 통해 나온 가속도 A_L 으로 인하여 변경된 γ 에 의해 결정된다는 것이다. 이것을 고려해 볼 때 최적제어는 $u = M > g$ 으로 출발한 후 $t = t_1$ 에서 비경계치 해가 존재하기 위해 $u = -M$ 으로 스위칭 되었다가 $t = t_1'$ 에서 비경계치 해로 변환되며 이때 횡방향 가속도 $A_L(t)$ 는 $g \cos \gamma(t)$ 와 같게 된다. 최적제어가 비경계치 해 일 경우 식(1)으로부터 $\dot{\gamma}(t)$ 의 값은 없으므로 비행경로각은 변화하지 않는다. t_1' 에서 $u = -M$ 으로 변환되는 시간 t_2 까지 $u = g \cos \bar{\gamma}$ 으로 상수 값을 유지하게 되며 $\bar{\gamma} = \gamma(t_1')$ 이다. 또한 A_L 도 $A_L = 0$ 인 상태를 유지하므로 u 과 같아지게 된다. 마지막으로 $t_2 \leq t \leq t_f$ 인 구간에서는 $u = -M$ 이 된다.

스위칭 시간 t_1 과 t_2 은 $t_1, t_2, \gamma_f, X(t_f)$ 들의 상호 민감도를 이용하면 아래식과 같은 반복수치 알

고리듬으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} t_{1,k+1} &= t_{1,k} + w_1(\gamma(t_f) - \gamma_f), \\ t_{2,k+1} &= t_{2,k} + w_2(X(t_f) - X_T), \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 w_1 과 w_2 은 가중치이고 초기값은 식(14)에서 구한 t_1 과 t_2 를 이용한다. t_1' 은 $A_L(t)$ 과 $g \cos \gamma(t)$ 을 비교하여 두 값이 같을 때 시간이므로 t_1 이 결정되면 자연스럽게 결정되는 스위칭 시간이다. 식(16)을 사용할 때에 오차의 허용범위 $|\gamma(t_f) - \gamma_f| < \varepsilon_1$ 과 $|X(t_f) - X_T| < \varepsilon_2$ 을 두어 최소 소요시간을 구할 수 있다. 그림 4 는 이렇게 하여 최적화 시킨 유도탄의 궤적을 나타낸 그림이다. 유도탄과 표적의 초기 위치는 각각 $(0m, 20m)$ 과 $(3500m, 10m)$ 으로 하였다. 유도탄의 속도는 $V_m = 272(m/sec)$ 이고 요구되는 충돌각 $\gamma_f = -20^\circ$, 자동조종장치의 시상수는 $\tau = 0.3(sec)$, 제어입력 크기의 한계는 $M = 5g$ 으로 두었으며 $1g = 9.8m/sec^2$ 이다. 식(14)으로부터 초기치 $t_{1,0}, t_{2,0}$ 는 각각 $0.150(sec), 11.189(sec)$ 으로 계산됐다. 가중치는 $w_1 = 0.1, w_2 = 0.002$ 으로 두었고 오차 허용범위 ε_1 과 ε_2 는 각각 $1(m)$ 과 $5(mrad)$ 으로 두었다. 그림 5 는 최적제어입력과 응답지연을 통해 나타난 횡방향 가속도이다. 그림 6 은 비행경로각의 변화를 시간에 따라 나타낸 것이다. 제안된 수치해석방법을 통해 계산된 최소 비행시간은 $t_f = 12.904(sec)$ 으로 나타났으며 이 때 t_1 은 $0.330(sec)$, t_1' 은 $0.442(sec)$, t_2 는 $10.862(sec)$ 으로 나타났다.

3. 에너지를 최적화 시킨 충돌각 제어

이 장에서는 [2]에서 설계되었던 충돌각 제어법

칙의 결과를 1 차의 자동조종장치의 응답지연을 감안했을 때 수직평면상에서 확장된 형태를 구한다. [2]와 비슷한 방법으로 최적 충돌각제어법칙은 aiming frame 에서 유도탄과 표적의 상대 운동방정식을 사용하여 최적화 시킨다. 여기서 aiming frame 의 x_A 축은 충돌각을 만족시키기 위한 비행경로각 방향이다. y_A 축을 x_A 축과 수직하게 잡으면 y_A 에 나타난 유도탄과 표적의 선형화된 상대 운동방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu + r$ 의 꼴로 식(17)과 같이 나타난다.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_A \\ \dot{y}_A \\ A_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ \dot{y}_A \\ A_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ g \cos \gamma_f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

여기서 $\gamma - \gamma_f$ 은 작은 각이다. 에너지를 최적화시키기 위해 성능지수함수를 식(18)과 같이 둔다.

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{t_f} u(\tau)^2 d\tau \quad (18)$$

종말시간 t_f 와 상태변수 $y_A(t_f) = 0, \dot{y}_A(t_f) = V_T \sin(-\gamma_f), |u| \leq M$ 등이 주어졌을 때에 최적화된 해는

$$u = M \operatorname{sat} \left\{ \frac{1}{M} h^T(t_f - t) \left[\int_t^{t_f} h(t_f - \sigma) h^T(t_f - \sigma) d\sigma \right]^{-1} e(t_f - t) \right\} \quad (19)$$

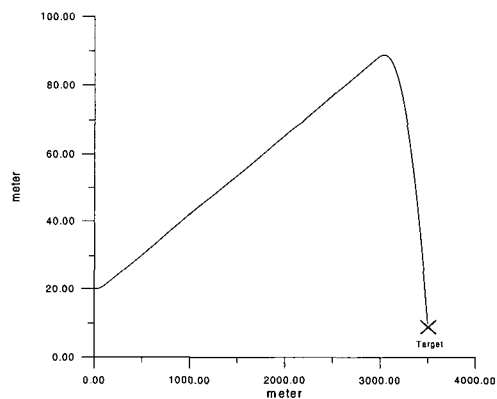


그림 4. 최소시간 유도법칙을 사용한 유도탄의 궤적
Fig. 4. The time-optimal trajectory of the missile

여기서

$$sat(\alpha) = \begin{cases} \alpha & |\alpha| < 1 \\ 1 & |\alpha| \geq 1 \end{cases}, \quad (20)$$

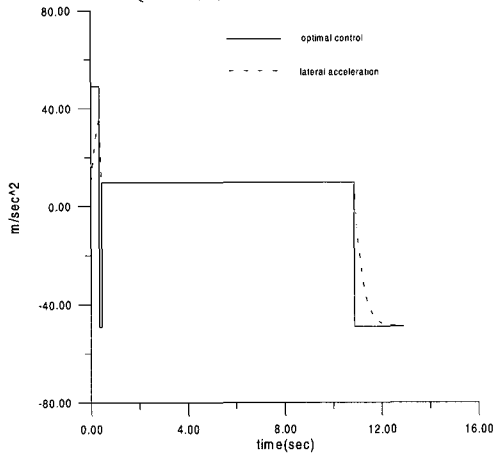


그림 5. 소요시간 최적화 유도명령과 횡방향 가속도
Fig. 5. The histories of the time-optimal control and the lateral acceleration

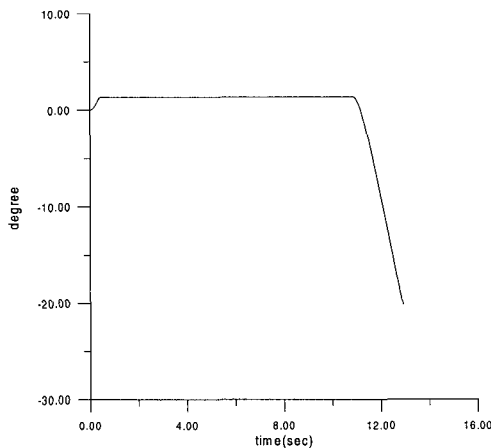


그림 6. 비행경로각의 변화
Fig. 6. The flight path angle history

$$h(t_f - \sigma) = D\Phi(t_f - \sigma)B, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (0, 0, 1/\tau)^T \text{ 이고}$$

여기서 $\Phi(t_f - \sigma)$ 은 식(17)의 상태천이행렬이다.

또한 $e(t_f - t)$ 는 zero effort miss 로써 다음과 같이 정의된다.

$$e(t_f - t) = \begin{pmatrix} 0 \\ V_T \sin(-\gamma_f) \end{pmatrix} - D \left(\Phi(t_f - t)x(t) + \int \Phi(t_f - \sigma)d\sigma \cdot r \right). \quad (21)$$

식(19)의 최적제어는 각각의 상태변수앞에 이득값이 붙어있는 합으로 정리될 수 있겠으나 적분항을 계산하여 zero effort miss 에 이득이 곱해진 형태로 정리한 후 컴퓨터를 사용하여 제어입력값을 구하는 것이 간편하겠다.

그림 7 은 앞절과 똑같은 요격 시나리오 상황에서 식(19)의 에너지를 최적화 시킨 제어법칙을 써서 유도탄의 궤적을 나타내었다. 그림 8 은 최적제어 입력과 횡방향 가속도의 변화를 시간에 따라 나타낸 것이고 그림 9 는 이러한 제어입력으로 변화한 유도탄의 비행경로각을 나타냈다. 유도탄의 고도는 최고 202(m) 까지 올라감으로써 최소시간개념으로 최적화 시킨 유도법칙의 경우보다 더 높음을 알 수 있다. 또한 비행시간 t_f 도 12.982(sec) 으로 나타나 최소시간개념으로 최적화시킨 유도법칙보다 0.078(sec) 가 더 길었다

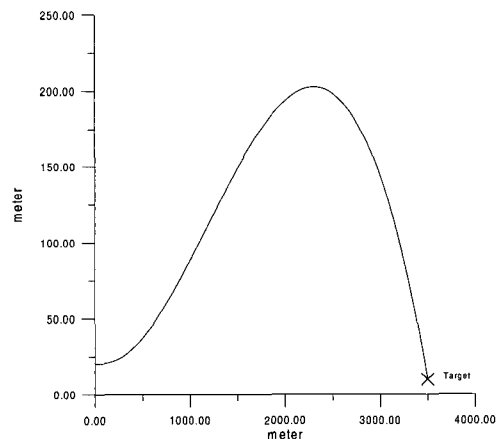


그림 7. 에너지 최적화 유도법칙을 사용했을 때의 유도탄 궤적

Fig. 7. Energy-optimal trajectory

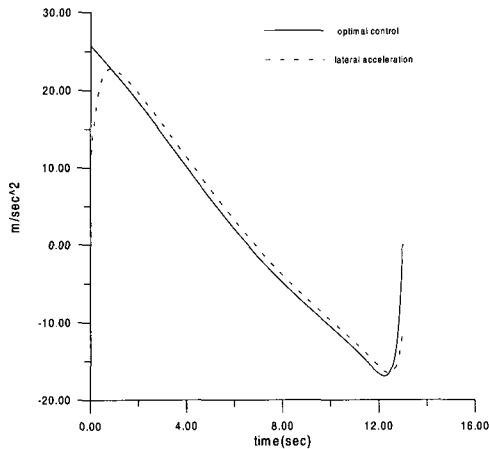


그림 8. 에너지 최적화 유도명령과 횡방향 가속도
Fig. 8. The histories of the energy-optimal control and the lateral acceleration

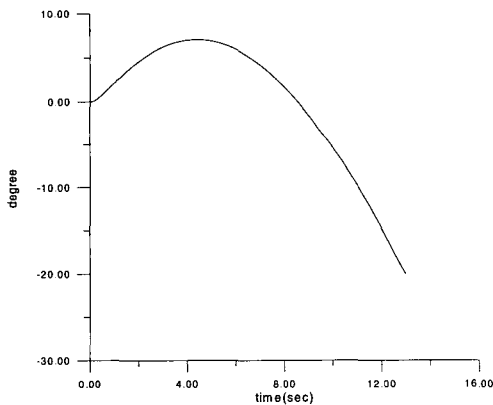


그림 9. 비행경로각의 변화
Fig. 9. The flight path angle history

4. 결론

본 논문에서는 두가지의 최적 충돌각 제어법칙이 제시되었다. 최소시간 최적화 유도법칙은 종말단계 동안 낮은 고도를 유지한다는 점과 비행시간이 짧

다는 두가지 장점이 있다. 그러나 제어 방식이 개루우프이므로 잡음환경이나 불확실한 모델링에서 강인성이 결여될 수 있다. 반면에 페루우프 제어방식인 에너지 최적화 유도법칙은 그러한 점에서 강인할 수 있으나 더 높은 고도로 비행하고 비행시간도 역시 길어져서 소요시간을 최적화 시킨 유도법칙보다 대유도탄 방어 체계에 의해 탐지될 확률이 높아진다. 그러므로 실제환경에 적용시킬 때에는 체계의 생존성을 증가시키고 종말효과를 높이기 위해 두 유도법칙을 결합한 복합유도법칙을 사용하는 것도 바람직하다

참고문헌

- [1] Kim, M., and Grider, K.V., "Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-9, 6, pp 852-859, Dec., 1973.
- [2] Song, T.L., Shin, S.J., and Cho, H.J., "Impact angle control for planar engagements," Proceedings of the 2nd ASCC, Seoul, pp III 23-26, Jul. 1997.
- [3] Kim, B.S., Lee, J.G., and Han, H.S., "Biased PNG law for impact with angular constraint," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-34, 1, pp 277-288, Jan., 1998.
- [4] Baba, Y., Takehira, T., and Takano, H., "New guidance law for a missile with varying velocity," Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Scottsdale, AZ, pp 207-215, Aug., 1994.
- [5] Song, T.L., and Um, T.Y., "CLOS+IRTH composite guidance," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-33, 4, pp 1339-1344, Oct., 1997.
- [6] Bryson, A.E., and Ho, Y., "Applied Optimal Control," John Wiley & Sons, 1975.