Comm. Korean Math. Soc. **13** (1998), No. 4, pp. 691–725

초청논문

무한차원 상공간에서의 디리클레 형식과 확산과정

박용문, 유현재

요약문. 무한차원 상공간에서의 디리클레 형식과 이에 관계된 확산과정에 대한 일반 이론을 소개하고, 이 이론을 물리학의 통계역학 모델에 적용하였다. 구체적으로, 고전 비유계 스핀계에 대한 통계역학적인 모델, 연속체 공간에서 상호 작용하는 무한 입자계에 대한 통계역학적인 모델에 응용하였다. 아울러서 확률 미분 방정식과 같은 디리클레 형식에 관련된 연구분야에 대해서도 간단히 알아보았다.

1. 서론

이 논문의 목적은 무한차원 상공간에서의 디리클레 형식 (Dirichlet form) 과 그에 관련된 확산과정 (diffusion process) 에 대한 일반이론을 소개하고 응용에 대하여 알아보고자 하는 것이다.

디리클레 형식 이론에 대해 한마디로 말하자면, 그 이론에 내재하는 두개의 큰 줄기인 해석학적인 부분과 확률론적인 부분에 대한 관련성을 연구하는 분야라고 할 수 있다. 그러한 연구를 통해 수없이 많은 적용분야를 찾게되고 실제 문제에 이 이론을 적용함으로써 그 모델의 중요한 성질을 이해하는 도구가 되기도 한다. 이론의 해석학쪽은 보이어링 (Beurling) 과 데니 (Deny) 가 디리클레 공간 (Dirichlet space) 이라는 개념을 도입하면서 연구되었고 [16] 확률

1991 Mathematics Subject Classification: 47D07, 47N55, 60J60.

Key words and phrases: 디리클레 형식, 디리클레 작용소, 확산과정, 고전 비유계 스핀계, 무한 입자계, 깁스측도 (Gibbs measure), 본질적 자기수반성 (essential self-adjointness), 로그-소볼레프 (log-Sobolev) 부등식.

본 논문은 교육부 기초과학 연구소 지원 (BSRI 98-1421) 연구비의 지원을 받아 이루어 졌다.

(Markov process) 이론은 헌트 (Hunt), 딘킨 (Dynkin) 등에 의해 연구되었다 [22, 30]. 후쿠시마 (Fukushima), 실버쉬타인 (Silverstein) 등은 이 두 분야를 연결짓는 연구를 하였고 [23, 59] 이러한 연구는 포텐셜 이론은 물론 양자역학 등에 이용되었다 [5, 66]. 이때까지의 내용은 주로 국소적으로 컴팩트인 상공간 (locally compact state space) 위에서의 이론이었고, 이후로 많은 실제적인 응용에 필연적으로 나타나는 무한차원 상공간 (비 국소적 컴팩트 공간) 에서의 디리클레 형식 이론이 크게 발달하고 응용되어 왔다 [1-4, 6-15, 17-18, 21, 24, 28, 32, 34, 38-40, 42, 44-46, 51-54, 64-65, 67].

본 논문에서는 디리클레 형식 이론에서 주된 내용을 간략히 소개하고 무한차원 상공간에로의 확장에 있어서 필요한 내용과 그 방법을 소개하며, 그동안 본 저자들과 동료 연구진에 의해 수행되었던 연구분야 위주로 이 이론의 응용에 대하여 설명하고자 한다. 이론적인 내용의 주된 부분은 참고문헌 [23, 42, 49] 등을 주로 참조하였으며 본 논문과 보완관계를 이루고 큰 줄거리를 이해하는데 도움을 주는 참고문헌 [50] 를 적극 권하는 바이다.

좀더 자세히 본 논문에서 다루는 것을 살펴보면 먼저 2 장에서는 디리클레 형식과 그의 생성원 (generator), 관련된 마르코프 과정 등에 대하여 가장 기본적인 $\mathbb{R}^d$ 위에서의 형식에 대한 보기를 들면서 설명하였다. 3 장에서는 무한차원 상공간 위에서의 디리클레 형식과 응용에 대한 보기를 들었다. 3.1 절에서 추상 위너공간 (abstract Wiener space) 및 지지된 힐버트 공간 (rigged Hilbert space) 위에서의 기본 이론을 다루고, 3.2 절에서는 고전 비유계 스핀계 (classical unbounded spin systems) 에의 응용을 다루었으며, 3.3 절에서는 무한 입자계 (infinite particle systems) 에의 응용을 다루었다. 소개한 모든 내용은 엄밀한 내용보다는 개념을 소개하는 위주로 개략적으로만 설명하고 증명은 모두 생략하였다. 더욱 관심있는 독자들은 원 참고문헌을 참고하기 바란다. 끝으로 4 장에서는 그외의 응용으로 확률 미분방정식 (SDE) 에의 응용, 유일성 등을 설명하였다.

한글로 쓰는데 있어서 용어는 대한수학회편, "수학용어집" 을 주로 참고하였다. 용어집에 나와있지 않거나 뜻이 합당치 않다고 판단되는 것은 저자들이

나름대로 정하였음을 밝힌다. 독자의 이해를 돕기 위하여 가급적 원어를 같이 표기하였다.

2. 디리클레 형식과 그에 관련된 마르코프 과정의 기본이해

2.1. 전형적인 보기

본 논문에 대한 이해와 방향을 주기 위하여 먼저 유한차원 공간에서 가장 전형적인 보기를 살펴보기로 하자. $\mathbb{R}^d$ 를 d-차원 유클리드 공간이라고 하고 $U \subset \mathbb{R}^d$ 를 하나의 열린 부분집합이라고 하자. 실 힐버트 공간 (real Hilbert space) $L^2(U; dx)$ ($dx \equiv$ 르벡 (Lebesque) 측도) 에서 다음 작용소를 보자:

$$
\begin{aligned}
D(L) &:= C_0^\infty(U) \equiv U \text{ 위에서 컴팩트한 지지를 갖고 해석적인} \\
&\qquad \text{함수들의 공간} \qquad (2.1) \\
Lu &:= \tfrac{1}{2}\Delta u, \quad u \in D(L).
\end{aligned}
$$

위에서 Δ 는 라플라시안 작용소이다. L 은 $L^2(U; dx)$ 위에서 닫힘성이 있는데 (closable) 그의 닫힘작용소 (closure) 도 같은 기호 L 로 표시하자. L 은 $L^2(U; dx)$ 에서 하나의 자기 수반 작용소 (self-adjoint operator) 이고 축약 반군 (contraction semi-group)

$$T_t := e^{Lt}, \quad t \geq 0 \tag{2.2}$$

의 생성원 (generator) 이다. 한편, 작용소 L 은 아래와 같은 의미로 U 위에서의 브라운 운동 (Brownian motion) $\mathbb{M} := (\mathcal{X}, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in U})$ 을 생성한다:

$$(T_t u)(x) = \int_{\mathcal{X}} u(X_t) dP_x, \quad dx - a.a.x \in U. \tag{2.3}$$

이제 부분 적분법을 이용하면 $u,\ v \in C_0^\infty(U)$ 에 대하여

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} -\int_U Lu \cdot v\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_U \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^d} dx \\ &=: \mathcal{E}(u,v) \end{aligned}$$

의 관계식을 얻는다. 위에서 ∇ 는 그레디언트 (gradient) 작용소이다. $\mathcal{E}$ 는 $L^2(U;dx)$ 위에서 조밀하게 (densely) 정의된 겹선형 형식 (bilinear form) 이다. 노름 (norm) $\mathcal{E}_1^{1/2} := (\mathcal{E} + (\cdot,\cdot)_{L^2(U;dx)})^{1/2}$ 에 대한 C_0^∞ 의 닫힘공간 $D(\mathcal{E})$ $:= \overline{C_0^\infty(U)}$ 을 구하여 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 를 얻는다. $D(\mathcal{E})$ 는 다름아니라 $L^2(U;dx)$ 의 부분공간으로 U 위의 1계 (order 1) 소볼레프 공간 (Sobolev space) $H_0^{1,2}(U;dx)$ 이다.

위에서 살펴본 네가지 요소들은 실제로 어느 하나는 다른 것을 정의한다는 의미에서 동등한 것들이다:

$$(2.5)\qquad \mathcal{E} \longleftrightarrow L \longleftrightarrow (T_t)_{t\geq 0} \longleftrightarrow \mathbb{M}.$$

참고 2.1. (가) (2.5) 식의 동치관계를 주는 자세한 식은 [42, p. 39, 도표 3] (뒤의 표 2-1 참조) 에서 알 수 있다.

(나) 위의 모든 내용은 방향이 있는 완전 리만 다양체 (oriented complete Riemannian manifold) (M,g) 에 적용할 수 있다. 단, dx 는 해당하는 체적소 (volume element) 로, $\frac{1}{2}\Delta$ 는 라플라스-벨트라미 (Laplace-Beltrami) 작용소로 대치된다.

2.2. 디리클레 형식

위 (2.5) 식의 관계식을 상공간 (위에서는 $\mathbb{R}^d$) 이 무한차원인 경우로 확장할 때 가장 처음 마주치는 문제는 무한차원 공간에서 "르벡측도" dx 가 존재하지 않는다는 것이다. 즉, 적당한 기준측도 (reference measure) 를 설정하는 문제가 등장한다. 다시 유한차원 공간에서 다음과 같은 변형을 살펴보자. $\rho : U \to [0,\infty)$ 를 밀도함수 (density function) 로 가지는 측도 $m(dx) :=$

$\rho(x)dx$ 에 대하여 겹선형 형식

$$
(2.6) \qquad \begin{aligned} D(\mathcal{E}) &:= C_0^\infty(U) \\ \mathcal{E}(u,v) &:= \tfrac{1}{2}\int \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^d} m(dx), \quad u,v \in D(\mathcal{E}) \end{aligned}
$$

를 보자. $\mathcal{E}$ 가 온전히 디리클레 형식 (정확한 정의는 밑의 정의 2.3) 이 되기 위해서는 $\mathcal{E}$ 가 닫힘성이 있는가, 즉 노름 $\mathcal{E}_1^{1/2} := (\mathcal{E} + (\cdot,\cdot)_{L^2(U;dm)})^{1/2}$ 에 대한 C_0^∞ 의 닫힘공간 $H_0^{1,2}(U;dm) := \overline{C_0^\infty(U)}$ 이 온전히 $L^2(U;dm)$ 의 부분공간이 되는가를 확인해야 한다. 이 문제는 완전히 해결되었는데 요약하면 다음과 같다. ρ 의 정규집합 (regular set) $R(\rho)$ 를 다음과 같이 정의하자:

$$
(2.7) \qquad R(\rho) := \left\{ x \in U \,|\, \exists \varepsilon > 0, \int_{\{y\in U \,|\, |x-y|\le\varepsilon\}} \rho^{-1}(y)dy < \infty \right\}
$$

또한 조건

$$
(2.8) \qquad \rho(x) = 0 \ dx - a.e. \ x \in U \setminus R(\rho)
$$

을 생각하자. 그러면 다음의 정리가 성립한다.

정리 2.2. $L^2(U;dm)$, $m = \rho dx$, 에서 정의된 겹선형 형식 (2.6) 에 대하여 만일 ρ 가 (2.7)-(2.8) 의 조건을 만족하면 형식 (2.6) 은 닫힘성이 있다.

위의 정리에 대한 증명은 [42, Chap. II, Sect. 2] 에서 볼 수 있고 $d = 1$ 일 때에 정리의 역도 성립한다 [23, Theorem 2.1.4]. 이 경우 (2.5) 식의 관계식 중 생성원 L 은

$$
(2.9) \qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{2}\nabla \log\rho \cdot \nabla =: \tfrac{1}{2}\Delta + \langle \beta, \nabla\rangle_{\mathbb{R}^d}, \\ \beta &:= \tfrac{1}{2}\nabla \log\rho \end{aligned}
$$

와 같이 됨을 쉽게 알 수 있다. 여기서 β 를 측도 m 의 로그미분 (logarithmic derivative) 이라고 한다.

무한차원 공간에서도 많은 경우 위와 같이 주어진 측도 m을 기준측도로 하는 디리클레 형식을 정의할 수 있게 된다. 이제 일반적인 상공간 위에서의 디리클레 형식에 대한 정의를 말해보자. E 를 하우스도르프 위상공간 (Hausdorff topological space) 이라고 하고 $\mathcal{B}(E)$ 는 보렐 σ-대수 (Borel σ-algebra), m 은 $\mathcal{B}(E)$ 위에서의 σ-유한한 (σ-fininte) 측도라고 하자. $D(\mathcal{E}) \subset L^2(E;m)$ 에서 정의된 (대칭) 겹선형 형식 $\mathcal{E}: D(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ 을 생각하자. 만일 노름 $\mathcal{E}_1^{1/2} := (\mathcal{E}+(\cdot,\cdot)_{L^2(E;m)})^{1/2}$ 에 대하여 $D(\mathcal{E})$ 가 닫혀 있으면 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 닫혔다고 한다. 임의의 $u \in D(\mathcal{E})$ 에 대하여 $\mathcal{E}(u,u) \geq 0$ 이면 $\mathcal{E}$ 는 양성 (positive definite) 이라고 한다. 아래 (2.10) 식이 성립하면 <u>$\mathcal{E}$ 에서 단위 축약이 통한다</u> (unit contraction operates on $\mathcal{E}$) 고 한다:

$$(2.10) \qquad u \in D(\mathcal{E}) \Longrightarrow v := (0 \vee u) \wedge 1 \in D(\mathcal{E}) \text{ 이고 } \mathcal{E}(v,v) \leq \mathcal{E}(u,u).$$

여기서 $f \wedge g := \min\{f,g\}$, $f \vee g := \max\{f,g\}$ 를 의미한다. 이제 디리클레 형식의 정의는 아래와 같다.

정의 2.3. E, $\mathcal{B}(E)$, m 이 각각 하우스도르프 위상공간, 보렐 σ-대수, $\mathcal{B}(E)$ 위에서 σ-유한한 측도라고 하자. $L^2(E;m)$의 조밀한 부분공간 $D(\mathcal{E})$ 위에서 정의된 (대칭) 겹선형 형식 $\mathcal{E}: D(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ 가 양성이고 닫혔으며 $\mathcal{E}$ 에서 단위축약이 통하면 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 를 (대칭) 디리클레 형식이라고 한다.

참고 2.4. (가) 본 논문에서 비대칭 디리클레 형식은 다루지 않는다. 비대칭 디리클레 형식에 대한 것은 참고문헌 [42] 에 잘 나와 있다. 따라서 앞으로 디리클레 형식은 모두 대칭 디리클레 형식을 의미한다.

(나) 위 (2.4) 및 (2.6) 의 형식은 모두 확산형 (diffusion type) 디리클레 형식이다. 보이어링-데니 공식 (Beurling-Deny formula) 에 따르면 유한차원 공간에서 임의의 정규 (regular) 디리클레 형식은 유일하게 확산형, 비약형 (jump type), 사멸형 (killing type) 의 세부분으로 분해된다 [23, Sect. 2.2]. 우리는 확산형 디리클레 형식에만 관심을 둘 것이다.

2.3. 디리클레 형식의 생성원 (generator) 및 관련된 반군 (semi-group)

(2.5) 식의 관계식 중 마르코프 과정 $\mathbb{M}$ 만을 제외한 나머지 세 부류의 동등성은 순수히 해석적인 방법으로 얻어낼 수 있다. 자세한 것은 [42, Chap. 1], [23, Chap. 1] 을 참고하기 바라며 여기서는 근본적인 것만 간단히 보겠다.

$\mathcal{H}$ 가 임의의 힐버트 공간일 때 $\mathcal{H}$ 위에서 정의된 비양성 (non-positive definite) 인 자기수반 작용소들의 집합, 강하게 연속인 (strongly continuous) 반군들의 집합, 강하게 연속인 역핵 (resolvent) 들의 집합, 그리고 마지막으로 $\mathcal{H}$ 위에서 정의된 닫혀있고 대칭인 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 들의 집합사이에는 1-1 관계가 이루어진다. 이것을 도표로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{L,\ \text{생성원}} \arrow[r, Leftrightarrow, "\mathcal{E}(u,v)=(\sqrt{-L}u,\sqrt{-L}v)"] \arrow[d, Leftrightarrow, "T_t = e^{tL}"'] \arrow[dr, phantom, "\begin{array}{l}\mathcal{E}(u,v) = \\ \lim_{\beta\to\infty}\beta(u-\beta G_\beta u, v)_{\mathcal{H}}\end{array}"] & \boxed{\mathcal{E},\ \text{형식}} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\boxed{(T_t)_{t\ge 0},\ \text{반군}} \arrow[r, Leftrightarrow, "G_\alpha=\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t dt"'] & \boxed{(G_\alpha)_{\alpha>0},\ \text{역핵}}
\end{tikzcd}$$

表 2-1

한편, 정의 2.3 에서 나온대로 $\mathcal{H} := L^2(E;m)$ 이고 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 $L^2(E;m)$ 위에서의 디리클레 형식이면 이 형식 $\mathcal{E}$ 에 해당하는 반군 T_t, $t \geq 0$, 와 역핵 G_α, $\alpha > 0$, 은 더욱이 아래의 정의에 나오는 의미로 부분 마르코프 성질을 가진다.

정의 2.5. $A : L^2(E;m) \to L^2(E;m)$ 가 유계 선형작용소 (bounded linear operator) 라고 하자. 만일,

$$u \in L^2(E;m),\ 0 \leq u \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq Au \leq 1 \tag{2.11}$$

을 만족하면 A 는 <u>부분마르코프 성질</u>을 가진다 (sub-Markovian) 고 한다.

2.4. 디리클레 형식과 마르코프 과정

주어진 상공간 $(E, \mathcal{B}(E), m)$ 에 대한 힐버트 공간 $L^2(E;m)$ 위에 하나의 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 있다고 하자. 관계식 (2.5) 에서와 같이 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에 관계된 마르코프 과정 $\mathbb{M}$ 이 존재하려면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 특정한 정규성 (regularity) 을 띄어야 한다. E 가 국소적으로 컴팩트하고 분리가능한 하우스도르프 공간 (locally compact separable Hausdorff space) 일 때에 어떤 부분집합 $C_1 \subset D(\mathcal{E}) \cap C_0(E)$ 이 있어서 C_1 은 $\mathcal{E}_1^{1/2}$-노름으로 $D(\mathcal{E})$ 에서 조밀하고 동시에 고른 노름 (uniform norm) 으로 $C_0(E)$ 에서 조밀하면 C_1을 $\mathcal{E}$ 의 <u>핵</u> (core) 이라고 한다 [23, p. 5]. 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 핵을 가지면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 <u>정규적</u> (regular) 이라고 한다. 정규적인 디리클레 형식에 관련된 마르코프 과정의 건축에 대해서는 참고문헌 [23, Chap. 6] 에 자세히 나와 있다. 이것을 정리로 쓰면 아래와 같다. 아래에서 헌트과정 (Hunt process) 이란 특별한 마르코프 과정으로서 표본 경로 (sample path) 가 오른쪽으로 연속이고 (right continuous) 왼쪽극한을 가지며 강한 마르코프 성질 (strong Markovian property) 을 가진다. 또한 $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ 로서 Δ는 임의의 고정점으로 주어진 마르코프 과정의 모든 표본 경로는 그의 생존기한 (life time) 후에 Δ 에 "붙잡힌다". 자세한 것은 참고문헌 [23, Chap. 4], [42, Chap. IV] 를 참고하기 바란다. 아래 정리는 [23, Theorem 6.2.1] 의 내용이다.

정리 2.6. $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 $L^2(E;m)$ 위에서 정의된 정규 디리클레 형식이면 $\mathcal{E}$ 에 관련된 헌트과정 $\mathbb{M} := (\mathcal{X}, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in E_\Delta})$ 이 $(E, \mathcal{B}(E))$ 에 존재한다. 즉, 임의의 $u \in L^2(E;m)$ 에 대하여

$$(T_t u)(x) = \int_{\mathcal{X}} u(X_t) dP_x, \quad m - a.a.\, x \in E \tag{2.12}$$

이 성립한다.

E 가 예를 들어 무한차원 위상 벡터공간일 때와 같이 일반적으로 국소적으로 컴팩트하지 않을 경우 위 정리 2.6 을 이용할 수 없다. 이 어려움을 극복하기 위하여 알베베리오 (Albeverio), 마 (Ma), 뢰크너 (Röckner) 등이 개발한 준정규적 (quasi-regular) 디리클레 형식이라는 개념을 알아야 한다. E 와 $\mathcal{B}(E)$

를 각각 하우스도르프 위상 공간 및 해당하는 보렐 σ-대수라고 하자. $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 $L^2(E;m)$ 위에서 디리클레 형식이고 $(T_t)_{t\geq 0}$, $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ 을 각각 해당하는 반군 및 역핵이라고 하자. (2.3절 참조).

정의 2.7. (가) E 의 닫힌 부분집합의 열 (sequence) $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 이 증가하고 $(F_k \subset F_{k+1},\ k \in \mathbb{N})$ 집합 $\cup_{k\geq 1}\{u \in D(\mathcal{E})|\ u(x) = 0\, a.a.\, x \in E \setminus F_k\}$ 이 $\mathcal{E}_1^{1/2}$-노름으로 $D(\mathcal{E})$ 에서 조밀하면 $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 를 <u>$\mathcal{E}$-둥지</u> ($\mathcal{E}$-nest) 라고 부른다.

(나) 집합 $N \subset E$ 이 적당한 $\mathcal{E}$-둥지 $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 에 대하여 $N \subset (\cup_{k\geq 1}F_k)^c$ 이면 N 을 <u>$\mathcal{E}$-무시집합</u> ($\mathcal{E}$-exceptional) 이라고 한다. E 에 관한 어떤 성질이 적당한 $\mathcal{E}$-무시집합을 제외한 모든 곳에서 성립할 때 이 성질은 $\mathcal{E}$-준전체 ($\mathcal{E}$-quasi-everywhere) 에서 성립한다고 하고 짧게 $\mathcal{E} - q.e.$ 로 쓴다. E 에서 $\mathcal{E} - q.e.$ 로 정의된 함수 f 가 어떤 $\mathcal{E}$-둥지 $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 에 대하여 $f \in C(F_k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, 이면 f 는 $\mathcal{E}$-준 연속함수 ($\mathcal{E}$-quasi-continuous function) 라고 한다.

정의 2.8. $L^2(E;m)$ 위에서의 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 다음 성질을 만족하면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 준 정규적 디리클레 형식이라고 한다:

(가) 컴팩트 집합으로 이루어진 $\mathcal{E}$-둥지 $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 가 존재한다.

(나) $D(\mathcal{E})$ 에서 $\mathcal{E}_1^{1/2}$-노름으로 조밀한 부분집합인 $\mathcal{E}$-준 연속함수들의 집합이 존재한다.

(다) $\mathcal{E}$-준 연속함수들의 열 $u_n \in D(\mathcal{E})$, $n \in \mathbb{N}$, 과 $\mathcal{E}$-무시집합 $N \subset E$ 이 존재하여 집합 $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ 은 $E \setminus N$ 의 점들을 분리한다. ($\{u_n\}$ separates the points of $E \setminus N$).

준 정규적인 디리클레 형식과 마르코프 과정사이의 관계는 다음 정리에 잘 나타나 있다 [49, Chap. IV, Theorem 2.8].

정리 2.9. $L^2(E;m)$ 위에서의 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 준 정규적이면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에 관계된 정과정 (*right process*) [42, 49] $\mathbb{M} := (\mathcal{X}, \mathcal{F},\ (X_t)_{t\geq 0},\ (P_x)_{x\in E_\Delta})$ 이 존재해서 (2.12) 를 만족하고 그 역도 성립한다.

디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 아래성질 (2.13) 을 만족하면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 국소적 (local) 이라고 한다:

$$u, v \in D(\mathcal{E}),\ \mathrm{supp}[u] \cap \mathrm{supp}[v] = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{E}(u,v) = 0 \tag{2.13}$$

위에서 $\mathrm{supp}[u]$ 는 u 의 지지 (support) 를 말한다 [42, p. 148]. $\mathbb{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in E_\Delta})$ 이 상공간 E 에서, m 으로 엄격하고 특별한 표준과정 (m-tight special standard process) [42, p. 92] 으로 생존기한 (life time) ζ 를 가지는 마르코프 과정일 때 연속인 표본경로 (sample path) 를 가지면 즉,

$$P_x[[0,\zeta) \ni t \mapsto X_t \text{ 가 연속함수}] = 1, \quad \forall\, x \in E \tag{2.14}$$

를 만족하면 $\mathbb{M}$ 을 확산과정 (diffusion process) 이라고 한다. 아래 정리는 [42, Chap. V, Theorem 1.11] 의 내용이다.

정리 2.10. 준 정규적 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 국소적이면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에 관련된 확산과정이 존재하고 그 역도 성립한다.

한편 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에 관련된 마르코프 과정 $\mathbb{M}$ 이 생존기한이 무한하고 연속인 표본경로를 가지면 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\int d\mu_{\langle u,v\rangle}, \quad u, v \in D(\mathcal{E}) \tag{2.15}$$

로 표현될 수 있다 [24, Chap. 5]. 여기서 $\mu_{\langle u,v\rangle}$는 에너지 측도 (energy-measure) 라고 불리는, 부호가 있는 측도 (signed measure) 이며 다음의 연쇄법칙을 만족한다:

$$\mu_{\langle uw,v\rangle} = u\mu_{\langle w,v\rangle} + w\mu_{\langle u,v\rangle}, \quad u, v, w \in D(E) \tag{2.16}$$

위의 유한차원에서의 보기와 다음 절에서 소개하는 모든 보기는 $\mu_{\langle u,v\rangle} \ll m$ 을 만족하여

$$\mu_{\langle u,v\rangle} = \Gamma(u,v)m \tag{2.17}$$

이 된다. $\Gamma(u,v)$ 는 소위 제곱 장 작용소 (square-field operator) 라고 불리는데 특정한 그레디언트 형 (gradient type)

$$\Gamma(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle \tag{2.18}$$

이 될 것이다.

이제 지금까지 한 내용을 요약하면 일반적인 하우스도르프 공간 $(E, \mathcal{B}(E))$ 을 상공간으로 하는 확산형 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 를 $L^2(E;m)$ 위에서 찾고 그에 관련된 확산과정을 연구하기 위해서는 첫째, 공간 E 위에서 적당한 그레디언트 개념을 찾아야 하고 ((2.16)-(2.18) 참조) 둘째, 그런식으로 찾은 그레디언트를 이용하여 제곱 장 작용소 (2.18) 을 만들고 이를 통하여 예비 디리클레 형식 (pre-Dirichlet form) 을 정의하고 그의 닫힘성을 조사한 다음, 마지막으로 디리클레 형식이 준 정규적인가 아닌가를 조사하면 된다. 이제 3절에서는 추상 위너공간 (abstract Wiener space) 에 대한 것부터 시작하여 몇가지 통계역학적인 모델에 관련된 것을 구체적으로 알아보겠다.

3. 무한차원 상공간에서의 디리클레 형식

이 절에서는 구체적으로 몇가지 무한차원 상공간에서의 디리클레 형식에 대하여 알아보고자 한다.

3.1. 바나흐 (Banach) 공간에서의 디리클레 형식

E 를 분해가능한 실 바나흐 공간 (separable real Banach space) 이라고 하자. E' 을 E 의 쌍대 공간 (dual space) 이라고 하고 대응하는 쌍대 규칙을 ${}_{E'}<\cdot,\cdot>_E$: $E' \times E :\to \mathbb{R}$ 로 표시하자. m 을 $\mathrm{supp}m = E$ 가 되는 $(E, \mathcal{B}(E))$ 위에서의 유한한 측도라고 하자. 그레디언트를 정의하기 위해 시험함수 공간 (test functions) 으로

$$\mathcal{F}C_b^\infty := \{f(l_1, \cdots, l_m) | \, m \in \mathbb{N},\, f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m),\, l_1, \cdots, l_m \in E'\} \tag{3.1}$$

을 택하자. 여기서 $C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ 은 $\mathbb{R}^m$ 에서 정의된 무한번 미분가능한 함수들로써 모든 도함수도 유계되어 있는 함수들의 집합이다. 한-바나흐 정리 (Hahn-Banach theorem) 와 단조 집합 논거 (monotone class argument) [58, A.0.6] 에 의하여

$$\mathcal{F}C_b^\infty \text{ 는} L^2(E;m) \text{ 에서 조밀하다} \tag{3.2}$$

는 것을 알 수 있다. 이제 분해가능한 실 힐버트 공간 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ 이 있어서 H 는 E 에 조밀하고 연속적으로 포함된다 (densely and continuously embedded) 고 하자. $H' \equiv H$ 로 보면

$$E' \subset H' = H \subset E \quad (\text{조밀하고 연속적인 포함}) \tag{3.3}$$

이 됨을 알 수 있다. 더욱이 $E' \times H$ 로 제한시킬 때에 ${}_{E'}\langle\cdot,\cdot\rangle_E = \langle\cdot,\cdot\rangle_H$ 가 성립한다고 가정하자. 이제 $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$, $k \in E$ 에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial k}(z) := \frac{d}{ds}u(z+sk)|_{s=0}, \quad z \in E \tag{3.4}$$

라고 정의하자. 만일 $u = f(l_1, \cdots, l_m)$ 이면 어렵지 않게

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(l_1, \cdots, l_m)\ {}_{E'}\langle l_i, k\rangle_E \in \mathcal{F}C_b^\infty \tag{3.5}$$

가 됨을 알 수 있다. 따라서 $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$, $z \in E$ 에 대하여 $k \mapsto \frac{\partial u}{\partial k}(z)$ 는 H 위에서 연속인 선형함수가 되고 리즈 표현정리 (Riesz representation theorem) 에 의하여 "$\nabla u(z)$" $\in H$ 가 존재해서

$$\langle \nabla u(z), h\rangle_H = \frac{\partial u}{\partial h}(z), \quad h \in H \tag{3.6}$$

가 성립한다. 이제 예비 디리클레 형식을

$$\mathcal{E}(u,v) := \frac{1}{2}\int \langle \nabla u, \nabla v\rangle_H dm, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty \tag{3.7}$$

으로 정의하자. $\mathcal{E}$ 의 닫힘성을 알기 위하여 다음의 정의가 필요하다 [42].

정의 3.1. $k \in E$ 에 대하여 만일 $\beta_k \in L^2(E;m)$ 이 존재하여

$$\int \frac{\partial u}{\partial k} v\, dm = -\int u \frac{\partial v}{\partial k}\, dm - \int uv\beta_k\, dm, \quad \forall u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty \tag{3.8}$$

이 성립하면 k 는 <u>m-허용가능</u> (well m-admissible) 하다고 한다.

H 의 임의의 정규 직교 기저 (orthonormal basis) $K_0 \subset H$ 에 대하여

$$\sum_{k\in K_0} {}_{E'}\langle l, k\rangle_E^2 = \sum_{k\in K_0} \langle l, k\rangle_H^2 = \|l\|_H^2 < \infty, \quad \forall\, l \in E' \tag{3.9}$$

이므로 (3.5)-(3.7) 로부터

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{k\in K_0} \int \frac{\partial u}{\partial k}\frac{\partial v}{\partial k} dm \tag{3.10}$$

이 됨을 알 수 있다. 한편 K_0 의 모든 원소가 m-허용가능하면 (3.8)-(3.10) 으로부터

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u,v) &= (Lu, v)_{L^2(E;m)}, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty \\ (Lu)(z) &:= -\tfrac{1}{2}\Delta u(z) - \tfrac{1}{2}\ {}_{E'}\langle \nabla u(z), \beta(z)\rangle_E \\ (\Delta u)(z) &:= \sum_{k\in K_0} \frac{\partial^2 u}{\partial k^2} \\ {}_{E'}\langle l, \beta(z)\rangle_E &:= \sum_{k\in K_0} {}_{E'}\langle l, k\rangle_E \beta_k(z) \end{aligned} \tag{3.11}$$

이 됨을 알 수 있다. (3.11) 의 작용소 L 은 $L^2(E;m)$ 에서 조밀하게 음으로 정의되었고 대칭인 작용소이다. 따라서 후리드리히 확장정리 (Fridrich's extension theorem) 로부터 형식 (3.7) 은 닫힘성이 있다 [48]. $(\mathcal{E}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ 의 닫힘 형식을 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 로 두자. 한편 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 마르코프 성질을 갖는 것 즉, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에서 단위축약이 통하는 것을 어렵지 않게 보일수 있어서 [42, Chap. II, Proposition 4.5] $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 실제로 디리클레 형식이 된다. 더 나아가 위와 같은 조건하에서 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 가 준 정규성을 가지고 있다는 것이 참고문헌 [42, pp. 119-122] 에서 잘 정립되었다. 형식 (3.7) 은 그레디언트형이기 때문에 자동적으로 국소적이다 ((2.13) 참고). 따라서 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$

에 관련된 마르코프 과정은 확산과정이다. 이러한 내용을 정리하면 아래와 같은 정리로 된다 [42, Chap. II, Proposition 3.8, Chap. IV, Sect. 4 b)]:

정리 3.2. m-허용가능한 벡터들로 이루어진 H 의 정규 직교 기저 $K_0 \subset H$ 가 존재하면 예비 디리클레 형식 (3.7) 은 닫힘성이 있으며 그의 닫힘형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 준 정규적 디리클레 형식이 된다. 따라서 이 형식에 관련된 확산 과정이 존재한다.

특별히 (m, H, E) 가 추상 위너공간 (abstract Wiener space) [33] 인 경우를 보자. 즉, H 는 힐버트 공간, $E \supset H$ 는 바나흐 공간이며 m 은 $\mathcal{B}(E)$ 위에서 공분산 (covariance) 을 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ 로 갖는 가우스 측도이다. 다시말해 임의의 $l \in E'$ 은 m 에 대하여 $N(0, \|l\|_H^2)$-분포를 가진다. 선형함수

$$E' \ni l \longmapsto_{E'} \langle l, \cdot\rangle_E \in L^2(E; m) \tag{3.12}$$

는 E' $(\subset H' \equiv H)$ 에 H 의 노름을 부과할 때 등거리 변환 (isometry) 이므로 이 사상은 유일하게 사상

$$H \ni h \longmapsto X_h \in L^2(E; m) \tag{3.13}$$

으로 확장된다. 한편 어렵지 않게 임의의 $h \in H$ 는 m-허용가능하고 $\beta_h = -X_h$ 가 됨을 알 수 있다 [42, Chap II, Theorem 3.11]. 따라서 정리 3.2 의 모든 조건을 만족시킴을 알 수 있다. 구체적인 보기를 하나 들어보기로 하자.

$$\begin{aligned}
E &:= C_0([0,1] \to \mathbb{R}^d) := \{z : [0,1] \to \mathbb{R}^d \mid z \text{ 는 연속이고 } z(0) = 0\} \\
\|\cdot\|_E &:= E \text{ 에서의 고른 노름 (uniform norm)} \\
m &:= \mathcal{B}(E) \text{ 위에서의 위너측도} \\
H &:= \{z \in E \mid h \text{ 는 절대 연속 (absolutely continuous) 이고} \\
&\qquad \|h\|_H^2 := \int_0^1 |h'(t)|_{\mathbb{R}^d}^2 dt < \infty\}
\end{aligned}$$

로 정의하면 (m, H, E) 는 소위 고전 위너공간 (classical Wiener space) 이고 정리 3.2 의 모든 내용을 만족시킨다. 특히 이때의 H 를 고전 카메론-마틴 공

간 (classical Cameron-Martin space) 이라고 한다. 추상위너공간을 포함하여 일반적인 바나흐 공간에서의 디리클레 형식에 대하여 참고문헌 [34] 에서도 연구되었다.

많은 경우, 위에서 나온 바나흐 공간 $E \supset H$ 도 또다른 힐버트 공간이 되어 힐버트 공간 사이의 포함관계

$$\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_- \tag{3.14}$$

가 성립한다 (위에서 $H \longrightarrow \mathcal{H}_0$, $E \longrightarrow \mathcal{H}_-$, $E' \longrightarrow \mathcal{H}_+$). 위의 포함관계가 조밀하고 연속적이며 $\mathcal{H}_0$-노름에 대하여 $(\mathcal{H}_-)' = \mathcal{H}_+$ 가 되면, 즉 ${}_{\mathcal{H}_+}\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_-} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$ 가 성립하면 힐버트 공간 $\mathcal{H}_0$를 소위 지지된 힐버트 공간 (rigged Hilbert space) 이라고 한다 [25]. 특히 포함 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-$ 이 힐버트-쉬미트류 (Hilbert-Schmidt class) 이면 $\mathcal{H}_-$ 에 공분산을 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$ 으로 하는 가우스 측도가 존재하여 다시 추상 위너 공간이 된다. 다음 부분절에서 보듯이 많은 물리적인 모델에서는 그 모델에 관련된 지지된 힐버트 공간이 도입되고 $\mathcal{H}_-$ 위에서의 측도는 그 모델에서 물리적인 의미를 갖는 측도가 된다. 지지된 힐버트 공간에서의 디리클레 형식에 관한 연구와 응용은 뒤에 나오는 보기 외에 참고문헌 [3-4, 32] 등에서도 볼 수 있다.

3.2. 고전 비유계 스핀 모델에 관계한 디리클레 형식

이 부분절에서는 통계역학에서 격자모델 중에 하나인 고전 비유계 스핀모델에 관계한 디리클레 형식 및 그에 관련된 확산과정에 대하여 알아보기로 하겠다. 여기서는 개략적으로만 이야기 하겠으며 자세한 것은 논문 [38]을 참조하기 바란다.

ν-차원 격자공간 $\mathbb{Z}^\nu$ 의 각 위치 $i \in \mathbb{Z}^\nu$ 에 "스핀" $x_i \in \mathbb{R}^d$ 가 있다. 전체 스핀 배치 공간 (configuration space) 은 $\Omega := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^\nu}$ 로 나타내고 임의의 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^\nu} \in \Omega$ 에 대하여 x_i 는 스핀 배치 x 상태에서 i-격자에서의 스핀값을 말한다.

각 격자위치에 있는 스핀들은 상호작용을 한다. 편의상 이동 불변인 단체 (one-body) 및 이체 (two-body) 상호작용 만을 가정하여서 각각 $i, j \in \mathbb{Z}^\nu$ 위

치에 있는 스핀 x_i, x_j 에 대하여 단체 및 이체 상호작용은 각각

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\{i\}}(x_i) &:= P(x_i) \\
\Phi_{\{i,j\}}(x_i, x_j) &:= U(x_i, x_j; |i-j|) =: U(x_i, x_j)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

로 주어진다고 하자. 임의의 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ 에 대하여 Λ 안의 스핀 배치를 $x_\Lambda \in (\mathbb{R}^d)^\Lambda$ 로 표시할 때 Λ 안에서 배치 x_Λ 의 에너지는

$$
V(x_\Lambda) := \sum_{i\in\Lambda} P(x_i) + \sum_{\{i,j\}\subset\Lambda} U(x_i, x_j) \tag{3.16}
$$

가 되며 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ 일 때 x_{Λ_1} 과 x_{Λ_2} 의 상호작용 에너지를

$$
W(x_{\Lambda_1}, x_{L_2}) := V(x_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}) - V(x_{\Lambda_1}) - V(x_{\Lambda_2}) = \sum_{i\in\Lambda_1}\sum_{j\in\Lambda_2} U(x_i, x_j) \tag{3.17}
$$

로 두자.

배치공간 Ω 에 "기준측도"를 상호작용 Φ 에 해당하는 평형상태 (equilibrium state) 즉, 깁스측도 (Gibbs measure) 로 선택하고자 한다. Ω 는 거리를 줄 수 있는 공간 (metrizable) 인데 $\mathcal{F}$ 를 해당하는 보렐 σ-대수라고 하자. $\mathcal{F}$ 는 실제로 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$ 의 곱 위상공간의 보렐 측도와 같다. 원통형 집합 (cylinder sets) 들을 통하여 $\mathcal{F}$ 에는 부분 σ-대수 $\mathcal{F}_\Lambda$ ($\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$) 들이 많이 존재함을 알 수 있다.

임의의 부분집합 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ 에 대하여 Λ 가 유한한 집합이면 기호로 $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^\nu$ 라고 쓰기로 하자. 상호작용 Φ 에 대한 깁스규정 (Gibbs specification) $\gamma^\Phi = (\gamma_\Lambda^\Phi)_{\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^\nu}$ 는

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\Lambda^\Phi(A|y) \\
&:= \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(y)} \int dx_\Lambda \exp[-V(x_\Lambda) - W(x_\Lambda, y_{\Lambda^c})]\, 1_A(x_\Lambda y_{\Lambda^c}), \quad A \in \mathcal{F},\ y \in \Omega
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

로 주어진다 [26, 47]. 여기서 $Z_\Lambda^\Phi(y)$ 는 경계조건이 $y \in \Omega$ 일때의 Λ 의 분할함수 (partition function) 로 정규화 상수이다:

$$(3.19) \qquad Z_\Lambda^\Phi(y) = \int dx_\Lambda \exp[-V(x_\Lambda) - W(x_\Lambda, y_{\Lambda^c})]$$

또한 $1_A(\cdot)$ 는 집합 A 에 대한 특성함수 (characteristic function) 이고 dx_Λ 는 $(\mathbb{R}^d)^\Lambda$ 에서의 르벡측도이다. $(\Omega, \mathcal{F})$ 에서 상호작용 Φ 에 대한 깁스측도는 아래의 평형조건을 만족하는 확률측도를 말한다:

$$(3.20) \qquad \mu(A) = \int \mu(dx)\gamma_\Lambda^\Phi(A|x), \quad A \in \mathcal{F},\ \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^\nu$$

달리 말하면, μ 가 깁스측도가 되기 위해서는 임의의 $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^\nu$ 에 대하여 $\mathcal{F}$ 의 부분 σ-대수 $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ 에로의 μ 의 조건부 기대값 (conditional expectation) 이

$$(3.21) \qquad E_\mu(A|\mathcal{F}_{\Lambda^c})(y) = \gamma_\Lambda^\Phi(A|y), \quad A \in \mathcal{F},\ \mu - a.a.\, y \in \Omega$$

을 만족하는 것을 말한다.

상호작용 Φ 에 적당한 조건을 가함으로써 해당하는 깁스측도의 존재성과 특성에 대해 연구할 수가 있는데 특히 루엘 (Ruelle) 의 의미로 Φ 가 초안정적 (super stable) 이고 아래로 정규적 (lower regular) [57] 이라면 해당하는 깁스측도가 존재한다는 것이 증명되었다 [37].

이제 하나의 깁스측도 μ 를 고정하자. 형식적으로 쓰면 μ 는 다음과 같다고 볼 수 있다:

$$(3.22) \qquad d\mu(x) = \frac{1}{Z} \exp\Big[-\sum_{i\in\mathbb{Z}^\nu} P(x_i) - \sum_{\{i,j\}\subset\mathbb{Z}^\nu} U(x_i, x_j)\Big] \prod_{i\in\mathbb{Z}^\nu} dx_i$$

$L^2(\Omega;\mu)$ 위에서의 디리클레 형식을 정의하기 위하여 Ω 에 관계된 것으로 앞의 3.1 절에서 본 것처럼 좀 더 다루기 편리한 지지된 힐버트 공간 $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-$ 를 만들어 보자. Ω 의 부분집합으로

$$(3.23) \qquad \Omega_{\text{fin}} := \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^\nu} \in \Omega \,|\, \exists\, \Delta \subset\subset \mathbb{Z}^\nu,\ x_i = 0\ \forall i \notin \Delta\}$$

을 정의하자. 고정된 $\sigma > 0$ 에 대하여 Ω_{fin} 에 내적을 각각 아래와 같이 정의하자: $\forall\ x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^\nu},\ y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}^\nu} \in \Omega_{\text{fin}}$,

$$
\begin{aligned}
(x,y)_0 &:= \sum_{i\in\mathbb{Z}^\nu}(x_i, y_i) \\
(x,y)_- &:= \sum_{i\in\mathbb{Z}^\nu} e^{-\sigma|i|}(x_i, y_i) \qquad (3.24)\\
(x,y)_+ &:= \sum_{i\in\mathbb{Z}^\nu} e^{+\sigma|i|}(x_i, y_i)
\end{aligned}
$$

여기서 $(\cdot,\cdot)$ 는 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$ 에서의 보통 내적이다. 각각의 내적으로부터 유도된 노름을 각각 $|\cdot|_0$, $|\cdot|_-$, $|\cdot|_+$ 로 표시하고 이 노름들로 Ω_{fin} 을 완비화 (completion) 한 힐버트 공간들을 각각 $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_+$ 로 표시하자. 그러면 포함관계

$$
\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_- \qquad (3.25)
$$

가 성립하고 각각의 포함은 조밀하고 힐버트-쉬미트 류가 됨을 알 수 있다. 한편 위에서 고정된 깁스측도는 $\Omega \cap \mathcal{H}_-$ 에 지지를 갖고 있어서 (supported) 우리는 자연스럽게 $L^2(\Omega;\mu)$ 를 $L^2(\mathcal{H}_-;\mu)$ 로 이해할 수 있다. 이제 예비 디리클레 형식을 3.1 절에서와 같이 정의할 수 있다:

(3.26)

$$
\begin{aligned}
D(\mathcal{E}) &:= \mathcal{F}C_b^\infty := \{u : \mathcal{H}_- \to \mathbb{R} \mid \exists\, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^\nu,\ f \in C_b^\infty((\mathbb{R}^d)^\Lambda) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad s.t.\ u(x) = f(x_\Lambda)\} \\
\mathcal{E}(u,v) &:= \tfrac{1}{2}\int_{\mathcal{H}_-} (\nabla u, \nabla v)_0\, d\mu.
\end{aligned}
$$

위의 예비 디리클레 형식의 닫힘성과 준 정규성은 논문 [38] 에서 자세히 연구되었으며 그 결과만을 쓰면 아래와 같다 [38, Theorem 2.7, Theorem 2.8]:

정리 3.3. Φ 가 초안정적이고 아래로 정규적이며 이동불변인 단체 및 이체 상호작용일 때 예비 디리클레 형식 (3.26) 은 닫힘성이 있고 그의 닫힘형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 준 정규적인 디리클레 형식이다. 따라서 관련된 확산과정이 존재한다.

위 정리 3.3 의 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, \Delta(\mathcal{E}))$ 의 생성원은

$$(3.27)\quad \begin{aligned} \mathcal{E}(u,v) &\equiv (u, H_\mu v)_{L^2(\mathcal{H}_-;\mu)}, \quad u \in D(\mathcal{E}),\ v \in D(H_\mu) \\ (H_\mu v)(x) &= -\tfrac{1}{2}\Delta v(x) - \tfrac{1}{2}\ {}_{\mathcal{H}_-}\langle \beta(x), \nabla v(x)\rangle_{\mathcal{H}_-} \end{aligned}$$

와 같이 됨을 알 수 있다. 여기서 $\mathcal{H}_0$ 에 대한 임의의 정규 직교 기저 $\{e_l\}_l^\infty$ 에 대하여

$$\Delta v(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial e_l}\Big(\frac{\partial v}{\partial e_l}\Big)(x)$$

이고 측도 μ 의 로그미분 (logarithmic derivative) β 는

$$(3.28)\quad \begin{aligned} \beta(x) &= (\beta_i(x))_{i\in\mathbb{Z}^\nu} \in \mathcal{H}_- \\ \beta_i(x) &= -\partial^i P(x_i) - \sum\nolimits_{j\neq i}^{j\in\mathbb{Z}^\nu:} \partial^i U(x_i, x_j) \end{aligned}$$

이다. 위에서 ∂^i 는 x_i 변수에 대한 그레디언트 작용소를 말한다.

3.3. 무한 입자계에 관련된 디리클레 형식

이 부분절에서는 연속체 공간에서 상호작용하는 무한 입자계에 관련된 디리클레 형식에 관하여 다루어 보고자 한다. 즉, 디리클레 형식이 정의되는 상공간은 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$ 에서 음이 아닌 정수값을 갖는 라돈 측도 (Radon measure) 들의 집합이고 그 상공간에서의 기준측도는 주어진 상호작용에 대한 평형 상태, 즉 깁스 측도가 될 것이다. 3.2 절에서와 같이 개략적으로만 다루겠으며 자세한 것은 논문 [18] 을 참조하기 바란다. 관련된 내용을 참고문헌 [9-10, 44, 67]등에서 볼 수 있다.

$\mathcal{N}$ 을 $\mathbb{R}^d$ 위에서 $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$-값을 가지는 라돈 측도의 집합이라고 하자. 여기서 $\mathbb{Z}_+$ 는 음이 아닌 정수의 집합이다. 불완전 위상 (vague topology) 으로 $\mathcal{N}$ 은 폴리쉬 공간 (Polish space), 즉 완비된 분해가능한 거리공간 (complete separable metric space) 이다 [31]. $x \in \mathbb{R}^d$ 에 대하여 δ_x 를 x 점에 대한 디락 측도 (Dirac measure) 라고 하면 임의의 $\omega \in \mathcal{N}$ 는

$$\omega = \sum_{i\geq 1} n_i\, \delta_{x_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

꼴로 표시된다. 3.2 절에서와 같이 $\mathbb{R}^d$ 의 부분집합 Λ 가 유계되었으면 $\Lambda \subset\subset \mathbb{R}^d$ 로 쓰기로 하자. 임의의 $\Delta \subset\subset \mathbb{R}^d$ 에 대하여 셈 변수 (counting variable) n_Δ 를

$$n_\Delta(\omega) := \omega(\Delta), \quad \omega \in \mathcal{N} \tag{3.29}$$

로 정의하자. 주어진 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ 에 대하여 σ-대수 $\mathcal{F}_\Lambda$ 는 셈변수 n_Δ, $\Delta \subset\subset \Lambda$, 들로 생성된 σ-대수이다. 즉, $\mathcal{F}_\Lambda$ 를 생성하는 기본 집합은

$$\{\omega \in \mathcal{N} | n_\Delta(\omega) = m\}, \quad \Delta \subset\subset \Lambda, \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

들이다. $\mathcal{N}$ 에서의 σ-대수 $\mathcal{F}$ 는 $\cup_{\Delta\subset\subset\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_\Delta$ 에 의해 생성된 것이라고 하자. 상호작용이 있을 때에 우리가 관심을 두는 상공간 Ω 는 $\mathcal{N}$ 의 다음과 같은 부분 집합이다.

(3.30)

$$\Omega := \{\omega \in \mathcal{N} | \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \omega(x) = 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 이고 } \forall \ \Delta \subset\subset \mathbb{R}^d, \omega(\Delta) < \infty\}$$

Ω 에서의 σ-대수들은 $\mathcal{N}$ 의 σ-대수들로부터 자연스럽게 유래된 것들인데 같은 기호 $\mathcal{F}_\Delta$, $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}$ 등으로 쓰겠다 (예를 들면, $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cap \Omega$). 자연스럽게 대응관계

$$\Omega \ni \omega := \sum_{i\geq 1} \delta_{x_i} \longleftrightarrow \{x_i | i \geq 1\} \subset \mathbb{R}^d \tag{3.31}$$

가 성립하므로 앞으로 편리에 따라 $\omega \in \Omega$ 를 측도로 또는 대응되는 $\mathbb{R}^d$ 의 부분집합으로 이해할 것이다.

이제 Ω 위에서의 깁스측도에 대해 이야기하기 위해 상호작용 Φ 에 대해 말해보도록 하자. 우리가 다루는 상호작용 Φ 는 이동불변인 이체 (two-body) 상호 작용이라고 가정하겠다. 즉, m 개의 입자 $\omega = \{x_1, \cdots, x_m\} \subset \mathbb{R}^d$ 들의 상호작용 에너지는

$$V(\omega) \equiv V(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \Phi(x_i - x_j), & m = 2, 3, \cdots, \\ 0, & m = 0, 1. \end{cases} \tag{3.32}$$

로 주어진다. 공통부분이 없는 임의의 $\omega = \{x_1, \cdots, x_m\}$, $\eta = \{y_1, \cdots, y_n\}$ 에 대하여 $\omega\eta := \{x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n\}$ 이라고 하자. 두 배치 ω, η 에 대한 상호 작용 에너지는

$$W(\omega, \eta) := V(\omega\eta) - V(\omega) - V(\eta) \tag{3.33}$$

라고 정의하자.

측도 π 를 $\mathbb{R}^d$ 에서의 르벡 측도 dx 를 강도 (intensity) 로 하고 $z > 0$ 를 매개변수로 하는 $(\Omega, \mathcal{F})$ 에서의 푸아송 측도 (Poisson measure) 라고 하고 임의의 $\Lambda \subset\subset \mathbb{R}^d$ 에 대하여 π 를 $\mathcal{F}_\Lambda$ 로 제한한 것을 π_Λ 라고 표기하자. 즉, 임의의 $\mathcal{F}_\Lambda$-가측함수 f 에 대하여

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\omega)\pi(d\omega) &:= \int f(\omega)\pi_\Lambda(d\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z|\Lambda|}\frac{z^n}{n!}\int_{\Lambda^n} f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned} \tag{3.34}$$

이 된다. 위에서 $|\Lambda|$ 는 Λ 의 부피를 말한다. 상호작용 Φ 에 대한 깁스 측도는 $(\Omega, \mathcal{F})$ 위에서 다음과 같은 평형조건을 만족시키는 확률측도이다: $\forall\ f \in L^1(\Omega, \mu)$, $\Lambda \subset\subset \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) \\ &= \int_\Omega \mu(d\eta)\frac{1}{Z_\Lambda(\eta)}\int f(\omega_\Lambda \cup \eta_{\Lambda^c})\exp[-V(\omega_\Lambda) - W(\omega_\Lambda, \eta_{\Lambda^c})]\pi_\Lambda(d\omega), \end{aligned} \tag{3.35}$$

위에서 $Z_\Lambda(\eta)$ 는 경계조건 η 에 대한 Λ 안에서의 분할함수 (partition function) 이다. 즉,

$$Z_\Lambda(\eta) = \int \exp[-V(\omega_\Lambda) - W(\omega_\Lambda, \eta_{\Lambda^c})]\pi_\Lambda(d\omega) \tag{3.36}$$

깁스측도의 존재성은 루엘 (Ruelle) 의 업적에 기인하는데 상호작용 Φ 가 소위 루엘의 의미로 초안정적 (super stable) 이고 아래로 정규적 (lower regular) 이면 깁스측도가 존재한다는 것과 깁스측도 공간이 가지는 여러 성질이 밝혀졌다 [56]. 따라서 우리는 상호작용 Φ 가 초안정적이고 아래로 정규적이며 이

동불변인 이체 상호작용이라고 가정하고 존재성이 밝혀진 깁스측도 하나를 고정하고 그것을 μ 로 부르기로 하겠다. 3.2 절의 격자모형에서처럼 수학적인 엄밀성을 배제하고 형식적으로 μ 를 이해할 수 있는데 그러면 μ 는 아래와 같다고 할 수 있다:

$$d\mu(\omega) = \frac{1}{Z} \exp\Big[-\frac{1}{2} \sum{}^{\{x_i,x_j\}\subset\omega:}_{x_i\neq x_j} \Phi(x_i - x_j)\Big] \pi(d\omega) \tag{3.37}$$

이제 $L^2(\Omega;\mu)$ 에서 확산형 디리클레 형식을 정의하기 위해 Ω 에서 정의된 함수들에 대하여 미분개념을 도입해야 한다. 아래에 소개하는 것은 랑 (Lang) 에 의한 미분개념이다 [35-36]. 집합

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \{(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \Omega : x \in \omega\}, \\ \Omega^{**} &= \{(x,y,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \Omega : x \in \omega,\ y \in \omega \setminus x\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

을 도입하자. 위에서 $\omega\backslash x := \omega\backslash\{x\}$ 이다. 또한 아래에서 $\omega \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^d$ 에 대하여 $\omega\cup p := \omega\cup\{p\}$ 이다. Ω^* 와 Ω^{**} 에는 각각 $\mathbb{R}^d\times\Omega$ 와 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\Omega$ 에서 유래한 위상이 있다. 함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 이 있을 때 $(x,\omega) \in \Omega^*$ 와 $(x,y,\omega) \in \Omega^{**}$ 에 대하여 각각 $\mathbb{R}^d$ 와 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 위에서의 함수

$$\begin{aligned} &u_{\omega\backslash x}(p) := u((\omega \setminus x) \cup p), \quad p \in \mathbb{R}^d \\ &u_{\omega\backslash x\backslash y}(p,q) = u((\omega \setminus x \setminus y) \cup p \cup q), \quad p,q \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{3.39}$$

을 정의하자.

정의 3.4. 함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 이 다음 조건을 만족할 때 u 는 연속적으로 미분가능하다고 한다:

(가) $\forall\ (x,\omega) \in \Omega^*$, $u_{\omega\backslash x} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 은 x 에서 미분가능하다. 이 경우

$$D_x u(\omega) := \Big(\frac{\partial u_{\omega\backslash x}}{\partial p^1}(x), \cdots, \frac{\partial u_{\omega\backslash x}}{\partial p^d}(x)\Big). \tag{3.40}$$

로 쓴다.

(나) 사상 $(x,\omega) \mapsto D_x u(\omega)$ 이 Ω^* 에서 연속이다.

비슷하게 함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 의 두 번 미분 가능성에 대하여 정의할 수 있고 기호로

$$(3.41)\qquad \begin{aligned} D^2_{xx}u(\omega) &:= \left(\frac{\partial^2 u_{\omega\setminus x}}{\partial p^l \partial p^m}(x)\right)_{1\le l,\, m\le d} \\ D^2_{xy}u(\omega) &:= \left(\frac{\partial^2 u_{\omega\setminus x\setminus y}}{\partial p^l \partial q^m}(x,y)\right)_{1\le l,\, m\le d} \end{aligned}$$

와 같이 쓰기로 한다.

아래와 같은 유용한 함수공간들을 정의하자 $(k = 1, 2)$:
(3.42)

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) &:= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ 는 } k \text{ 번 연속적으로 미분가능}\} \\ C^k_{loc}(\Omega) &:= \{u \in C^\kappa(\Omega) \,|\, \exists\, \Lambda \subset\subset \mathbb{R}^d,\ u \text{ 는 } \mathcal{F}_\Lambda\text{-가측함수}\} \\ C^1_{b,loc}(\Omega) &:= \{u \in C^1_{loc}(\Omega) \,|\, u \text{ 는 유계되었고 } \sup_{(x,\omega)\in\Omega^*} |D_x u(\omega)| < \infty\} \\ C^2_{b,loc}(\Omega) &:= \{u \in C^2_{loc}(\Omega) \,|\, u \text{ 는 유계되었고 },\ \sup_{(x,\omega)\in\Omega^*} |D_x u(\omega)| < \infty, \\ &\qquad \sup_{(x,\omega)\in\Omega^*} |D^2_{xx} u(\omega)| < \infty,\quad \sup_{(x,y,\omega)\in\Omega^{**}} |D^2_{xy} u(\omega)| < \infty\} \end{aligned}$$

비슷한 방법으로 $k \ge 3$ 일 때도 $C^k(\Omega)$, $C^k_{loc}(\Omega)$ 등을 정의할 수 있다.

그레디언트 작용소를 정의하기 위해 필요한 "접공간" (tangent space) 은 앞선 두 부분절에서처럼 상공간의 각 점에 무관한 것이 아니라 상공간의 각 점에 의존하는 것으로 드러난다. 임의의 수 $\nu > d$ 를 고정시키자. $\omega \in \Omega$, $\varepsilon \in \{-, 0, +\}$ 에 대하여 실 힐버트 공간

$$(3.43)\qquad \mathcal{H}_{\omega,\varepsilon} := \{h : \omega \to \mathbb{R}^d \,|\, |h|_{\omega,\varepsilon} < \infty\}.$$

를 정의하자. 여기서 $|\cdot|_{\omega,\varepsilon}$ 는 아래와 같이 정의된 내적 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\omega,\varepsilon}$ 으로부터 유도된 노름이다: 두 함수 $h_1,\ h_2 : \omega \mapsto \mathbb{R}^d$ 에 대하여

$$(3.44)\qquad \big\langle h_1, h_2 \big\rangle_{\omega,\varepsilon} := \sum_{x\in\omega} (1 + |x|)^{\varepsilon\nu} \big\langle h_1(x), h_2(x) \big\rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

어렵지 않게 각각의 $\omega \in \Omega$ 에 대하여 포함관계

$$\mathcal{H}_{\omega,+} \subset \mathcal{H}_{\omega,0} \subset \mathcal{H}_{\omega,-} \tag{3.45}$$

가 성립하고 각 포함관계는 모든곳에서 조밀하다 (everywhere dense) 는 것을 알 수 있다. 즉, $\mathcal{H}_{\omega,0}$ 는 $\mathcal{H}_{\omega,+}$와 $\mathcal{H}_{\omega,-}$ 에 의해 지지된 힐버트 공간 (rigged Hilbert space) 이다. $T_\varepsilon(\Omega) := \cup_{\omega\in\Omega}\mathcal{H}_{\omega,\varepsilon}$ 로 두고

$$\begin{aligned}\Gamma(T_\varepsilon(\Omega)) := \{f : \Omega \to T_\varepsilon(\Omega)| \quad & \forall\omega \in \Omega\ f(\omega) \in \mathcal{H}_{\omega,\varepsilon} \text{ 이고},\\ & \omega \mapsto |f(\omega)|_{\omega,\varepsilon} \text{ 는 가측함수}\}\end{aligned}$$

로 정의하자. 이제 그레디언트와 라플라시안을 각각 작용소 $\nabla : D(\nabla) \equiv C^1_{b,loc}(\Omega) \to \Gamma(T_+(\Omega))$, $\Delta : D(\Delta) \equiv C^2_{b,loc}(\Omega) \to L^2(\Omega;\mu)$ 로서, 해당하는 정의역의 원소 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\nabla u(\omega) &:= (D_x u(\omega))_{x\in\omega} \in \mathcal{H}_{\omega,+},\ \omega \in \Omega\\ (\Delta u)(\omega) &:= \sum_{x\in\omega}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 u_{\omega\setminus x}}{\partial p^k \partial p^k}(x) \equiv \sum_{x\in\omega}\Delta_x u(\omega),\ \omega\in\Omega\end{aligned} \tag{3.46}$$

로 정의하자. 이제 주어진 깁스측도 μ 에 대하여 [44, Lemma 2.4] 에 의하면 $C^2_{b,loc}(\Omega)$ 는 $L^2(\Omega;\mu)$ 에서 조밀함을 알 수 있다. $L^2(\Omega;\mu)$ 에서의 예비 디리클레 형식은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}D(\mathcal{E}) &:= C^2_{b,loc}(\Omega)\\ \mathcal{E}(u,v) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega \langle\nabla u(\omega), \nabla v(\omega)\rangle_{\omega,0}\,\mu(d\omega)\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{x\in\omega}\langle D_x u(\omega), D_x v(\omega)\rangle_{\mathbb{R}^d}\,\mu(d\omega).\end{aligned} \tag{3.47}$$

참고 3.5. 참고문헌 [9-10, 44, 67] 등에서 다른 접근법으로 $L^2(\Omega;\mu)$ 위에서의 예비 디리클레 형식을 정의하였다. 그러나 $L^2(\Omega;\mu)$ 의 조밀한 부분집합, 예를 들어

$$\begin{aligned}\mathcal{F}C_b^\infty(\Omega) := \quad & \{u \in L^2(\Omega;\mu)|\ \exists l_1,\cdots,l_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \exists f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)\\ & \text{s.t. } u(\omega) = f(\langle l_1,\omega\rangle,\cdots,\langle l_n,\omega\rangle),\ \omega\in\Omega\}\end{aligned}$$

$(\langle l,\omega\rangle := \sum_{x\in\omega} l(x),\ \forall\, l \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$
위에서 모든 정의는 일치한다.

깁스측도의 존재성을 위하여 상호작용 Φ 에 부과된 조건 즉, 초안정성 및 아래로 정규성 외에 약간의 추가 조건을 부여함으로써 예비 디리클레 형식 (3.47) 은 닫힘성이 있음을 알 수 있다 [18]. 그 닫힘 형식은 디리클레 형식이 되고 그 형식의 생성원은

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,v) &\equiv (u, H_\mu v)_{L^2(\Omega;\mu)} \\
(H_\mu v)(\omega) &= -\tfrac{1}{2}\Delta v(\omega) - \tfrac{1}{2}\big\langle \beta(\omega), \nabla v(\omega)\big\rangle_{\omega,0}, \quad v \in C^2_{b,loc}(\Omega), \\
\beta(\omega) &:= \Big(-\sum_{y\in\omega\setminus x} (\mathrm{grad}\Phi)(x-y)\Big)_{x\in\omega}
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

이 됨을 알 수 있다. 한편 $\overline{\Omega}$ 를 Ω 의 닫힘 (closure) 이라고 할 때 자연스럽게 μ 를 $\overline{\Omega}$ 로 확장하고 $L^2(\Omega;\mu)$ 대신 $L^2(\overline{\Omega};\mu)$ 를 생각하여서 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 를 $L^2(\overline{\Omega};\mu)$ 에서의 형식으로 볼 수 있다. 그러면 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 는 준 정규적이어서 관련된 마르코프 과정이 존재한다. 이 마르코프 과정은 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$가 갖는 국소성 때문에 자동적으로 확산과정이 된다. 자세한 것은 논문 [67] 를 참고하기 바란다. 실제로 $d \geq 2$ 일 때에 이러한 확산 과정은 Ω 위에서 생존한다는 것 또한 밝혀졌다 [52].

3.4. 그 밖의 모델

지면 관계상 자세한 소개는 어렵고 다소간 지금까지 설명한 방법과 비슷하게 전개해 나가는 것으로 무한차원 상공간에서의 디리클레 형식과 그에 관련된 확산과정에 대한 여러 모델에의 응용에 대하여 그동안 연구되어왔던 분야를 간단히 소개하고자 한다. 먼저 (무한체적) 유클리드 Φ_2^4-양자장 (Euclidean (infinite volume) quantum field) 에 관계하여서 디리클레 형식이론을 [14-15] 에서 연구하였다. 또한 유전학에서 나오는 훌레밍-비옷 과정 (Fleming-Viot process) 에 대한 연구 [45], 컴팩트 리만 다양체 위에서의 고리공간 (loop space) 에서의

확산과정 [21], 양자 비유계 스핀계에 관련된 고리공간 [46] 및 배치공간 [39-40] 위에서의 디리클레 형식과 그에 관련된 확산과정에 대한 연구 등을 들 수 있다.

4. 디리클레 형식 및 관련된 확산과정의 응용

4.1. 확률 미분방정식 (SDE)에의 응용

E 가 분해가능한 실 바나흐 공간이라고 하고 μ 는 $\operatorname{supp}\mu = E$ 인 $\mathcal{B}(E)$ 위에서의 유한한 측도라고 하자. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ 는 실 힐버트 공간으로서 포함

$$E' \subset H' \equiv H \subset E \tag{4.1}$$

이 조밀하고 연속이라고 가정하자. 또한 조건

$$\begin{array}{l} \mu\text{-허용가능한 벡터들로이루어진 조밀한 부분집합} \\ K \subset E' \ (\subset H \subset E) \text{ 이 존재한다} \end{array} \tag{4.2}$$

을 만족한다고 하자. 그러면 3.1 절의 일반이론으로부터 형식

$$\mathcal{E}(u,v) := \frac{1}{2}\int_E \langle \nabla u, \nabla v\rangle_H, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty \tag{4.3}$$

는 닫힘성이 있고 그 닫힘형식은 디리클레 형식이 된다. 이 부분절에서는 적당한 조건하에서 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에 관련된 확산과정은 아래의 확률 미분방정식 (stochastic differential equation: SDE) 의 약한 해 (weak solution) 가 된다는 것을 알아보고자 한다:

$$\begin{aligned} dX_t &= \tfrac{1}{2}\beta(X_t) + dW_t \\ X_0 &= z\ (\in E) \quad (P_z \text{ 하에서}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

여기서 $(W_t)_{(t\geq 0)}$ 는 E-값을 가지는 H 위에서의 브라운 운동 (E-valued Brownian motion over H) 이며 $\beta : E \to E$ 이다. 먼저 유한차원 공간에서의 내용을 보자. $E := \mathbb{R}^d$, $\mu(dz) := \rho(z)dz$, $\int \rho dz < \infty$, 라고 가정하

자. 만일, $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ 가 약하게 미분가능하고 (weakly differentiable) $\beta := \nabla \log \rho = \frac{\nabla \rho}{\rho} \in L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \rho dz)$ 를 만족하면 형식

$$\mathcal{E}(u,v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathbb{R}^d} \rho dz, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \tag{4.5}$$

는 닫힘성이 있고 그의 닫힘형식은 준 정규적 디리클레 형식이며 따라서 관련된 확산과정 $\mathbb{M}$ 이 있다 (정리 3.2). 소위 후쿠시마 분해 (Fukushima decomposition) 에 의하면 확산과정 $\mathbb{M}$ 은 SDE (4.4) ($E = H = \mathbb{R}^d$, $\beta = \nabla \log \rho$) 의 해가 된다 [23]. 무한차원 상공간에서의 이야기는 어떠할까? 이에 관련된 내용은 참고문헌 [15, 49] 에 자세히 소개되었는데 여기서는 앞서의 몇가지 보기에 다 적용될 수 있는 조건하에서 이야기 해보도록 하겠다. 조건 (4.1)-(4.2) 외에 아래의 조건들을 더 부과하자:

$$\int_E {}_{E'}\langle k, z\rangle_E^2 \mu(dz) < \infty, \quad \forall\, k \in K. \tag{4.6}$$

또한 $\mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(E)$-가측함수 $\beta : E \to E$ 가 존재해서

$$\begin{aligned} &{}_{E'}\langle k, \beta\rangle_E = \beta_k,\ \mu - a.e., \qquad k \in K\ (\subset E')\ (\text{ 정의 3.1 참조}) \\ &\int_E \|\beta\|_E^2 d\mu < \infty \end{aligned} \tag{4.7}$$

를 만족한다고 하자. 조건 (4.2) 에 나오는 집합 K ($\subset E'$) 가 조밀하므로 정리 3.2 의 조건을 모두 만족시키고 디리클레 형식 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 에 관련된 확산과정 $\mathbb{M} := (\mathcal{X}, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in E_\Delta})$ 이 존재한다. 조건 (4.1)-(4.2), (4.6)-(4.7) 하에서 다음 정리가 성립한다 (실제로 아래 정리는 (4.7) 의 조건없이 성립한다) [49, Chap. V, Theorem 3.1]:

정리 4.1. 임의의 $t > 0$ 에 대하여 확률측도 μ_t 가 $(E, \mathcal{B}(E))$ 에 존재해서

$$\int \exp(i\, {}_{E'}\langle k, z\rangle_E)\mu_t(dz) = \exp(-\frac{1}{2}t\|k\|_H^2), \quad \forall\, k \in E' \tag{4.8}$$

을 만족한다고 하자. 그러면 사상 $W : \mathcal{X} \to C([0,\infty), E)$, $N : \mathcal{X} \to C([0,\infty), E)$ 가 존재해서 다음을 만족한다.

(가) $\omega \mapsto W_t(\omega) := W(\omega)(t)$ 와 $\omega \mapsto N_t(\omega) := N(\omega)(t)$, $\omega \in \mathcal{X}$, 는 모두 임의의 $t \geq 0$ 에 대하여 $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(E)$-가측이다.

(나) $\mathcal{E}-q.e.\ z \in E$ 에 대한 P_z 하에서 $(W_t)_{t\geq 0}$ 은 0 $(\in E)$ 에서 출발하며 공분산 (*covariance*) 이 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ 인 브라운 운동이다.

(다) $\forall\ k \in K$, $\mathcal{E}-q.e.\ z \in E$ 에 대하여

$$_E\langle k, N_t\rangle_E = \int_0^t \beta_t(X_s)ds, \quad t \geq 0,\ P_z - a.e.$$

가 성립한다.

(라) $\mathcal{E}-q.e.\ z \in E$ 에 대하여

$$X_t = z + W_t + N_t, \quad t \geq 0,\ P_z - a.e.$$

가 성립한다.

참고 4.2. (가) 정리 4.1 (다), (라) 로부터 $\mathbb{M}$ 은 SDE (4.4) 의 약한 해가 됨을 알 수 있다.

(나) 조건 (4.8) 은 공간 E 가 공간 H 보다 "충분히" 크면 성립한다. 예를 들어 추상 위너공간에서처럼 E 가 바나흐 공간일 때 E 의 노름이 가측 노름 (measurable norm)[33] 이면 된다. 또한 E 가 또다른 힐버트 공간일 때 포함 $H \subset E$ 가 힐버트-슈미트류 (Hilbert-Schmidt class) 이어도 충분하다.

3 절에서 다루었던 모든 보기는 정리 4.1 의 조건을 만족한다. 각각의 마르코프 과정이 해가 되는 SDE 를 써보면 아래와 같다.

(가) $(m, H, E) \equiv$ 추상 위너공간 (3.1절): $\beta_k = -X_k$ ((3.13) 참조).

(4.9) $$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + dW_t$$

(나) 고전 비유계 스핀계 (3.2절): (3.28) 에 주어진 β 에 대하여

(4.10) $$dX_t = \frac{1}{2}\beta(X_t)dt + dW_t$$

가 된다. 성분으로 표시하면

(4.11) $$dX_t^k = -\frac{1}{2}\Big[\partial^k P(X_t^k) + \sum\nolimits_{j\neq k}^{j\in\mathbb{Z}^\nu:} \partial^k U(X_t^k, X_t^j)\Big]dt + dW_t^k$$

이 된다. 여기서 $(W_t^k)_{t\geq 0}$ 는 모든 $k \in \mathbb{Z}^\nu$ 에 대하여 $\mathbb{R}^d$ 에서의 브라운 운동이다.

(다) 무한 입자계 (3.3 절): 집합 S 를 초기 배치 $(z_k)_{k\in S}$ 에 대한 붙임수 집합 (index set) 이라고 하자. (3.48) 의 β 를 이용하면 무한 입자계에 관계된 SDE 는

$$(4.12)\qquad \begin{aligned} dX_t^k &= -\tfrac{1}{2}\Big[\sum_{j\neq k} \operatorname{grad}\Phi(X_t^k - X_t^j)\Big]dt + dW_t^k \\ X_0^k &= z_k\ (\in \mathbb{R}^d), \quad k \in S \end{aligned}$$

가 된다. 여기서도 임의의 $k \in S$ 에 대하여 $(W_t^k)_{t\geq 0}$ 은 $\mathbb{R}^d$ 에서의 표준 브라운 운동이다.

4.2. 에르고딕성 (ergodicity), 극성 (extremality), 유일성 (uniqueness)

3.2 절의 보기를 보자. 우리는 상호작용 Φ 가 초안정적이고 아래로 정규적이면 Φ 에 해당하는 깁스측도가 존재함을 알았다. 어렵지 않게 이 깁스측도는 논문 [8] 의 의미로 순화된 (tempered) 깁스측도임을 알 수 있다. 상호작용 Φ 에 해당하는 순화된 깁스측도의 집합을 $\mathcal{G}^t(\Phi)$ 로 표시하자. 임의의 $\nu \in \mathcal{G}^t(\Phi)$ 에 대하여 디리클레 형식 ((3.26) 참조)

$$(4.13)\qquad \mathcal{E}^{(\nu)}(u,v) := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{H}_-} (\nabla u, \nabla v)_0 d\nu, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty$$

을 정의하자. 위의 형식 (의 닫힘) 에 해당하는 반군을 $(T_t^{(\nu)})_{t\geq 0}$ 으로 쓰자. [8] 의 결과로부터 아래의 내용을 알 수 있다. $\mathcal{G}_{\text{ex}}^t(\Phi)$ 는 $\mathcal{G}^t(\Phi)$ 의 극점 (extremal point) 들의 모임이다.

정리 4.3. $\nu \in \mathcal{G}_{ex}^t(\Phi)$ 일 필요충분 조건은 $(T_t^{(\nu)})_{t\geq 0}$ 가 에르고딕성을 가질 때이다. 즉, $\forall\ u \in L^2(\mathcal{H}_-;\nu)$, $\lim_{t\to\infty} \|T_t^{(\nu)}u - \int u\, d\nu\|_{L^2(\mathcal{H}_-;\nu)} = 0$ 이 성립할 때이다.

한편, 아래와 같은 부등식을 형식 $(\mathcal{E}^{(\nu)}, D(\mathcal{E}^{(\nu)}))$ (혹은 측도 ν) 에 대한 로그-소볼레프 부등식 (log-Sobolev inequality) 이라 한다 [27]: $\exists\, c_\nu > 0$,

$\forall\ f \in W_2^1 := \{u \in L^2(\mathcal{H}_-;\nu) |\ |\nabla u|_0 \in L^2(\mathcal{H}_-;\nu)\}$,

$$\begin{aligned}(4.14)\qquad &\int_{\mathcal{H}_-} |f(x)|^2 \log |f(x)|\, d\nu(x) \\ &\qquad \le c_\nu \int_{\mathcal{H}_-} |\nabla f(x)|_0^2 d\nu(x) + \|f\|^2_{L^2(\mathcal{H}_-;\nu)} \log \|f\|_{L^2(\mathcal{H}_-;\nu)}\end{aligned}$$

위에서 상수 c_ν 를 소볼레프 계수 (Sobolev coefficient) 라고 부른다. 로타우스-사이몬 (Rothaus-Simon) 의 양 간극 정리 (mass gap theorem) [55, 60] 에 의하면 $(\mathcal{E}^{(\nu)}, D(\mathcal{E}^{(\nu)}))$ 가 로그-소볼레프 부등식을 만족하면 $(\mathcal{E}^{(\nu)}, D(\mathcal{E}^{(\nu)}))$ 의 생성원 ($\equiv L^{(\nu)}$) 의 스펙트럼 (spectrum) 에 음의 부호를 붙인 것은 바닥값 0 으로부터 양수의 간극을 갖게된다 (소볼레프 계수가 c_ν 일 때 양 간극 $\ge (2c_\nu)^{-1}$). 따라서 이 경우 스펙트럼 표현정리 (spectral representation theorem) 를 이용하면 반군 $(T_t^{(\nu)})_{t\ge 0}$ 은 에르고딕성을 가진다는 것을 알 수 있고 정리 4.3 에 의하여 $\nu \in \mathcal{G}_{\text{ex}}^t(\Phi)$ 가 된다. 격자모델에서 이러한 연구는 [6, 38, 40, 46] 등에서 연구되었다. 한편, 로그-소볼레프 부등식의 또다른 응용으로, 도부루신 (Dobrushin) 의 유일성 정리 (uniqueness theorem) 를 통하여 격자모델에서 특정한 조건을 만족하는 상호작용에 해당하는 깁스측도는 유일하게 존재한다는 것을 보일 수 있다 [11]. 그외에도 로그-소볼레프 부등식 및 에르고딕성에 대한 많은 연구를 참고문헌 [19-20, 29, 41, 43, 61-63, 68] 등에서 볼 수 있다.

디리클레 형식에 관련된 또다른 중요한 연구분야로는, 처음에 다루기 쉬운 최소한의 정의역에서 정의된 예비 디리클레 형식에 대한 마르코프 유일성 (Markov uniqueness) 문제 [53-54, 64-65] 및 이보다 더 강한 조건으로 생성원 L 의 (최소 정의역에 대한) 본질적 자기 수반성 (essential self-adjointness) 을 연구하는 것이 있다 [6-7, 18, 32, 38, 40, 46, 66]. 이밖에도 참고문헌 [50] 의 8 절에 디리클레 형식과 관련하여서 연구되는 여러가지 분야를 소개했으니 관심있는 사람은 이를 참고하기 바란다.

참고문헌

[1] S. Albeverio, T. Hida, J. Potthoff, M. Röckner, and L. Streit, *Dirichlet forms in terms of white noise analysis I: construction and QFT examples*, Rev. Math. Phys. **1** (1990), 291-312.

[2] ______, *Dirichlet forms in terms of white noise analysis II: closability and diffusion processes*, Rev. Math. Phys. 1 (1990), 313-323.

[3] S. Albeverio and R. Høegh-Krohn, *Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces*, Z. Wahrsch. verw. Geb. **40** (1977), 1-57.

[4] ______, *Hunt processes and analytic potential theory on rigged Hilbert spaces*, Ann. Inst. Henri Poincare Sect. B **13** (1977), 269-291.

[5] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn and L. Streit, *Energy forms, Hamiltonians and distorted Brownian paths*, J. Math. Phys. **18** (1977), no. 5, 907-917.

[6] ______, *An approximate criterium of essential self-adjointness of Dirichlet operators*, Potential Anal. **1** (1992), 307-317.

[7] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev and M. Röckner, *Dirichlet operators via stochastic anaysis*, J. Funct. Anal. **128** (1995), no.1, 102-138.

[8] ______, *Ergodicity of L^2-semigroups and extremality of Gibbs states*, BiBoS Print, 1995.

[9] ______, *Analysis and geometry on configuration spaces*, SFB-343 Preprint 97-050, Bielefeld, 1997.

[10] ______, *Analysis and geometry on configuration spaces: Gibbsian case*, SFB-343 Preprint, Bielefeld, 1997.

[11] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, M. Röckner and T. V. Tsikalenko, *Uniqueness of Gibbs states for quantum lattice systems*, SFB 343 Preprint, No. 96-022.

[12] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, and T. V. Tsikalenko, *Stochastic dynamics for quantum lattice systems and stochastic quantization I: Ergodicity*, Random Oper. and Stoch. Equ. **2** (1994), no. 2, 103-139.

[13] S. Albeverio, Z. M. Ma, and M. Röckner, *Quasi-regular Dirichlet forms and Markov processes*, J. Funct. Anal. **111** (1993), 118-154.

[14] S. Albeverio and M. Röckner, *Classical Dirichlet forms on topological vector spaces-Closability and a Cameron-Martin formula*, J. Funct. Anal. **88** (1990), 395-436.

[15] ———, *Classical Dirichlet forms on topological vector spaces–The construction of the associated diffusion processes*, Prob. Th. and Rel. Fields **83** (1989), 405-434.

[16] A. Beurling and J. Deny, *Dirichlet spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **45** (1959), 208-215.

[17] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter, Berlin, 1991.

[18] V. Choi, Y. M. Park, and H. J. Yoo, *Dirichlet form and Dirichlet operators for infinite particle systems: essential self-adjointness*, To appear in J. Math. Phys. (1998).

[19] J. D. Deuschel and D. W. Stroock, *Large deviations*, Academic Press, Boston, 1989.

[20] ———, *Hypercontractivity and spectral gap of symmetric diffusions with applications to the stochastic Ising model*, J. Funct. Anal. **92** (1990), 30-48.

[21] B. K. Driver and M. Röckner, Construction of diffusions on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **315**, Série I, 603-608 (1992).

[22] E. B. Dynkin, *Markov processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[23] M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland, Amsterdam/Oxford/New York, 1980.

[24] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[25] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenk, *Generalized functions*, vol. 4. Applications of harmonic analysis, Academic Press, New York, 1964.

[26] H. O. Georgii, *Gibbs measures and Phase transitions*, de Gruyter studies in Mathematics, vol. 9, Berlin/New York, 1988.

[27] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061-1083.

[28] T. Hida, J. Potthoff, and L. Streit, *Dirichlet forms and white noise analysis*, Commun. Math. Phys. **116** (1988), 235-245.

[29] R. Holly and D. Stroock, *Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models*, J. Stat. Phys. **46** (1984), 1159-1194.

[30] G. A. Hunt, *Markov processes and potentials, I, II, and III*, Illinois J. Math. **1** (1957), 44-93, **1** (1957), 316-369, **2** (1958), 151-213.

[31] O. Kallenberg, *Random measures*, Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

[32] Yu. G. Kondratiev and T. V. Tsycalenko, *Infinite-dimensional Dirichlet operators I: Essential self-adjointness and associated elliptic equations*, Potential Anal. **2** (1993), 1-21.

[33] H. -H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 463, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[34] S. Kusuoka, *Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), 79-95.

[35] R. Lang, *Unendlich-dimensionale Wiener processe mit Wechsewirkung, I. Existenz*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete. **38** (1977), 55-72.

[36] ———, *Unendlich-dimensionale Wiener processe mit Wechselwirkung. II. Die reversiblen Maße sind kanonische Gibbs-Maße*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete. **39** (1977), 277-299.

[37] J. L. Lebowitz and E. Presutti, *Statistical mechanics of unbounded spins*, Commun. Math. Phys. **50** (1976), 195-218.

[38] H. Y. Lim, Y. M. Park and H. J. Yoo, *Dirichlet forms, Dirichlet operators, and log-Sobolev inequalities for Gibbs measures of classical unbounded spin systems*, J. Korean Math. Soc. **34** (1997), no. 3, 731-770.

[39] H. Y. Lim, Y. M. Park and H. J. Yoo, *Dirichlet forms and diffusion processes related to quantum unbounded spin systems*, J. Korean Math. Soc. **33** (1996), no. 4, 823-855.

[40] ———, *Dirichlet forms and Dirichlet operators for Gibbs measures of quantum unbounded spin systems: essential self-adjointness and log-Sobolev inequality*, J. Stat. Phys. **90** (1998), no. 3-4, 949-1002.

[41] S. L. Lu and H.-T. Yau, *Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki and Glauber dynamics*, Commun. Math. Phys. **156** (1993), 399-433.

[42] Z. M. Ma and M. Röckner, *An introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1992.

[43] F. Martinelli and E. Olivieri, *Approach to equilibrium of Glauber dynamics in the one phase region, I and II*, Commun. Math. Phys. **161** (1994), 447-514.

[44] H. Osada, *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 117-132.

[45] L. Overbeck, M. Röckner, and B. Schmuland, *An analytic approach to Fleming-Viot processes with interactive selection*, Ann. Prob. **23** (1995), 1-36.

[46] Y. M. Park and H. J. Yoo, *Dirichlet operators for Gibbs measures on loop spaces: Essential self-adjointness and log-Sobolev inequality*, J. Math. Phys. **38** (1997) no. 6, 3321-3346.

[47] C. Preston, *Random fields*, Lecture Notes in Mathematics vol. 534, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[48] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II. Frourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.

[49] M. Röckner, *General theory of Dirichlet forms and applications* in Dirichlet Forms, eds, G. Dell' Antonio and U. Mosco, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1563, Springer-Verlag, Berlin, 1992, pp. 129-174.

[50] ———, Dirichlet forms on infinite-dimensional "manifold-like" state spaces: a survey of recent results and some prospects for the future, Preprint.

[51] M. Röckner and B. Schmuland, *Quasi-regular Dirichlet forms: examples and counterexamples,* Can. J. Math. **47** (1995), 165-200.

[52] ———, *A support property for infinite dimensional interacting diffusion processes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **326** (1998), Série I, 359-364.

[53] M. Röckner and T. S. Zhang, *Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications*, J. Funct. Anal. **105** (1992), 187-231.

[54] ———, *Uniqueness of generalized Schrödinger operators -Part II*, J. Funct. Anal. **119** (1994), 455-467.

[55] O. S. Rothaus, *Diffusion on compact Riemannian manifolds and logarithmic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **42** (1981), 102-109.

[56] D. Ruelle, *Superstable interactions in classical mechanics*, Commun. Math. Phys. **18** (1970), 127-159.

[57] ———, *Probability estimates for continuous spin systems*, Commun. Math. Phys. **50** (1976), 189-194.

[58] M. T. Sharpe, *General theory of Markov processes*, Academic Press, New York, 1988.

[59] M. L. Silberstein, *Symmetric Markov processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 426, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[60] B. Simon, *A remark on Nelson's best hypercontractive estimates*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1975), 376-378.

[61] D. W. Stroock and B. Zegarlinski, *The logarithmic Sobolev inequality for continuous spins on a lattice*, J. Funct. Anal. **104** (1992), 290-326.

[62] ———, *The equivalence of the logarithmic Sobolev inequality and Dobrushin-Schlosman mixing condition*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 303-323.

[63] ———, *The logarithmic Sobolev inequalities for discrete spin systems on a lattice*, Commun. Math. Phys. **149** (1992), 175-193.

[64] M. Takeda, *On the uniqueness of Markovian self-adjoint extension of diffusion operators on infinite dimensional space*, Osaka J. Math. **22** (1985), 733-742.

[65] ———, *The maximum Markovian self-adjoint extensions of generalized Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan, **44** (1992), 113-130.

[66] N. Wielens, *On the essential self-adjointness of generalized Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **61** (1985), 98-115.

[67] M. W. Yoshida, *Construction of infinite dimensional interacting diffusion processes through Dirichlet form*, Prob. Th. Rel. Fields **106** (1995), 265-297.

[68] B. Zegarlinski, *The strong decay to equilibrium for the stochastic dynamics of unbounded spin systems on a lattice*, Commun. Math. Phys. **175** (1996), 401-432.

박용문
연세대학교
이과대학 수학과 및 수리과학 연구소
E-mail: ympark@bubble.yonsei.ac.kr

유현재
경북대학교
자연과학대학 수학과
E-mail: yoohj@gauss.kyungpook.ac.kr