

본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구비(951-0100-001-2)지원으로 수행되었으며 지원에 감사를 드립니다.

6 절기구 응용을 위한 3 위치 운동 생성용 4절 기구 합성을 위한 입력 크랭크의 합당해 영역

범진환*

Feasible Design Area of 4 Bar Input Crank for 3 Position Synthesis of Watt-II 6 Bar Mechanism

Jin-Hwan Borm*

ABSTRACT

In many automatization applications, a rigid body is required to go forward and backward repeatedly through a set of given positions/orientations precisely while a crank is rotated. Such a motion can be generated by 6 bar mechanism adding a dyad to a 4 bar mechanism. If this is the case for 3 position synthesis of the 4 bar mechanism, the feasible solution area for designing the 4 bar mechanism will be limited over the general solution area.

This paper proposes a procedure to synthesize 4 bar mechanism to be used to generate the required motion. It is found that the only input crank of the 4 bar mechanism should be limited to satisfy the condition. And the feasible design area for the circle point/ center point of the input crank is identified so that design of the undesired mechanism could be avoided. The method is tested and the results are shown.

Key Words : Feasible solution area (합당해 영역), 6 bar Mechanism application(6 절 기구 응용)
3 position synthesis of 4 bar Mechanism (4절 기구의 3 위치합성)

1. 서론

4절 기구는 가장 기본이면서 가장 널리 사용되는 기구로서, 이의 설계 방법론은 오래 전부터 연구가 수행되어 왔었다. 특히, 운동 생성용, 즉, 커플러가 몇 개의 주어진 위치/방향을 정확히 지나가도록 4 절 기구를 설계하는 문제는 19 세기말의 Burmester의 연구가 그 기본이 되고 있다. 상기의 기구학적 설계하는 커플러가 주어진 몇

개의 위치/방향을 일치하는 것만을 만족하는 기구학적 해이며, 이를 만족하는 해는 무수히 많다. 하지만, 상기 기구학적 해 중에는 크랭크가 회전함에 따라 커플러가 주어진 몇몇 위치/방향을 지나가기 위해서 기구를 분해해야하는(분기문제) 해도 있을 수 있으며 주어진 순서대로 지나가지 않는(순서문제) 해도 포함한다.

무수히 많은 기구학적 설계해 영역 중에서 상기 두 문제가 없는 합당해영역을 찾는 방법을 체계화하기 위해 많

* 아주대학교 기계 및 산업공학부

은 연구가 행해졌었다. Filemon⁽¹⁾은 분기문제를 일으키는 구동크랭크의 이동점(Circle point)해 영역을 구하는 방법을 제시하고 이를 기구학 해에서 제거시킬 수 있도록 함으로써 해의 정화과정(Solution Rectification) 즉, 설계의 잘못을 초기에 제거할 수 있는 과정을 최초로 도입하였다. 하지만 Filemon 방법은 잘못된 설계의 극히 일부분만을 정화시킬 수 있었고, 1980년대 Waldron등을 중심으로 본격적인 연구가 시작되었다. 즉, 피구동 크랭크의 설계에 있어서 고정점영역(Center Point Plane) 및 이동점 영역 모두에서 분기 문제를 야기시키는 영역을 찾아내어 이의 선택을 예방하였고^(2,3), 구동 및 피구동 크랭크 설계시 분기문제와 순서문제를 개략적으로 쉽게 짐작하기 위한 방안으로 이동점 영역과 고정점 영역의 주요 점들, 즉 폴(Pole), 이미지 폴(Image Pole)들 사이의 상관관계를 연구하였다^(4,6,7). 하지만, 실제 많은 자동화 기구 설계 응용에 있어서는, 많은 연구가 수행되었던 상기의 분기문제와 순서 문제뿐만 아니라 다른 여러 가지 문제 혹은 구속 조건들이 있을 수 있다.

본 연구에서는 아직 연구되어 있지 않는 특수한 경우, 즉, 2 절을 추가한 6 절 기구 응용을 위한 4 절 기구 커플러가 주어진 설계위치를 정확히 지나가면서 양끝 사이를 왕복하기를 원하는 경우, 4 절 기구 입력 크랭크의 기구학적 설계해 중에서 이를 만족하는 합당해 영역을 구하는 방법을 제시하여, 설계시 반복 시행을 거치지 아니하고 곧바로 합당해를 선택할 수 있도록 하고자 한다. Fig. 1 에서와 같이 4 절 기구에 2 절을 추가한 6 절 기구(Watt-II)를 이용하여 2 절 기구의 구동크랭크(e)가 1 회전하는 동안 4 절 기구의 커플러가 주어진 설계위치를 지나가면서 양끝 위치에서 정확히 멈추고 되돌아가는 왕복운동을 해야하는 자동화 응용이 매우 많다. 이 경우, 4

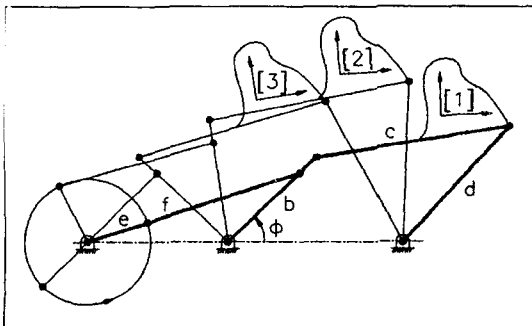


Fig. 1 6bar Mechanism(Dyad+4 bar Mechanism)with End Limit Positions [1] and [3]

절 기구의 설계해는 분기문제도 만족하여야 하지만, 입력 크랭크(b)의 회전 순서 및 변위각이 만족되어야 한다. 즉, Fig. 1 에서와 같이 커플러 좌표계가 설계좌표계 [1],[2] 및 [3] 을 정확히 왕복되어야 하는 경우에는 설계좌표계 [1]과 [3]이 극한위치가 된다. 이때, ϕ_{ij} 이 커플러 좌표계가 (i)에서 (j)로 가는 동안의 4절 기구 입력 크랭크(b)의 회전변위각이라 하면, $\phi_{12} \leq \phi_{13} \leq 180^\circ$ 혹은 $-180^\circ \leq \phi_{13} \leq \phi_{12}$ 를 만족하여야 한다.

본 연구에서는 3 위치 합성문제에서 상기의 설계조건을 만족하는 4 절 기구의 입력크랭크(b)의 이동점과 고정점의 합당해 영역을 구하는 방법을 제시하고 이를 컴퓨터 해석을 통하여 검증하고자 한다.

2. 4절 기구 합성을 위한 기구학적 해 (Kinematic Solutions)

Fig. 2 에서와 같은 4절 기구의 커플러상의 좌표계 [M]이 주어진 3 개의 설계좌표계(Design Frames) [1],[2] 및 [3] 을 지나가도록, 4절 기구를 설계하려한다 하자. 설계좌표계는 기준좌표계 [G]에 대하여 그 원점의 위치 (p_{Di}, q_{Di}) 및 x축과의 기울기 각 (θ_{Di}) 을 줌으로써 표현하도록 한다. 4절 기구를 설계한다 함은 입력 크랭크와 및 피구동 크랭크 각각의 고정점의 위치와 이동점의 위치를 각각 결정함을 의미한다. 고정점의 위치(A*,B*)는 고정좌표계 [G]에 대하여 표현하고, 이동점의 위치(A,B)는 이동좌표계 [M]에 대하여 표현하는 것이 편리하다.

Fig.2에서의 이동 좌표계 [M]이 설계좌표계 [1]에 일치되어 있을 때, 커플러상의 임의의 한 점 c의 고정좌표

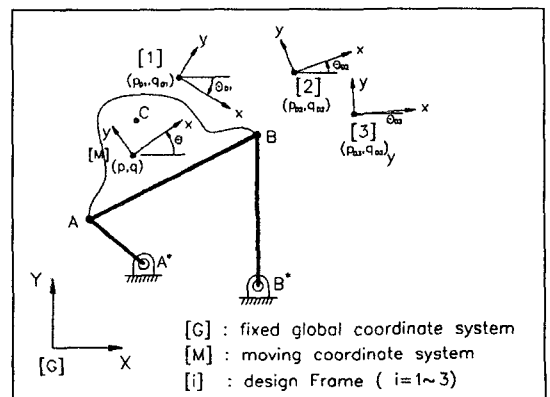


Fig. 2 4-bar Mechanism and Description of Design Frames

계 [G]에 대한 좌표(X,Y)와 이동좌표계 [M]에 대한 이점의 좌표(x,y)는 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{D1} & \sin\theta_{D1} \\ -\sin\theta_{D1} & \cos\theta_{D1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - p_{D1} \\ Y - q_{D1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

또한 설계좌표계 [i]의 위치/방향을 설계좌표계 [1]에 대하여 나타내주면 상기 식(1)에 의해 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} {}^1p_i \\ {}^1q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^1\theta_i & \sin^1\theta_i \\ -\sin^1\theta_i & \cos^1\theta_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{Di} - p_{D1} \\ q_{Di} - q_{D1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^1\theta_i = \theta_{Di} - \theta_{D1} \quad (i = 2, 3)$$

이때, $(p_{Di}, q_{Di}, \theta_{Di})$ 는 고정좌표계 [G]에 대한 i 번째 설계좌표계의 위치/방향이며, $({}^1p_i, {}^1q_i, {}^1\theta_i)$ 는 첫 번째 설계좌표계 [1]에 대하여 표현된 i 번째 설계좌표계의 위치/방향이다. 또, 설계좌표계 [1]에 대하여 표현된 각 설계 위치에서의 이동점 위치를 (x_i, y_i) 고정점 위치를 (x^*, y^*) 라고 하면, Fig. 3 에서와 같이 각 설계위치에서의 이동점 위치 (x_i, y_i) 는 고정점 위치 (x^*, y^*) 를 중심으로 한 임의의 원(circle) 선상에 놓여있음을 알 수 있다. 즉, 아래 식이 성립하여야 한다.

$$(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2 = R^2 \quad (3)$$

또한, 첫 번째 설계위치에서의 이동점 좌표 (x_1, y_1) 와 다른 위치에서의 이동점 좌표 (x_i, y_i) 와는 아래의 관계가 있다.

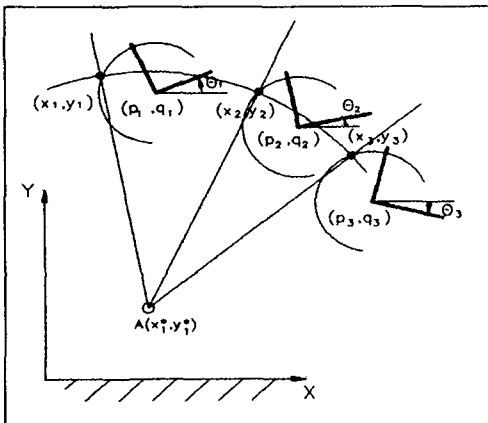


Fig. 3 Relationships between Circle point and Center Point

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^1\theta_i & -\sin^1\theta_i \\ -\sin^1\theta_i & \sin^1\theta_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1p_i \\ {}^1q_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

상기 식(4)을 식(3)에 대입하면,

$$({}^1p_i + x_1 \cos^1\theta_i - y_1 \sin^1\theta_i - x^*)^2 + ({}^1q_i + x_1 \sin^1\theta_i - y_1 \cos^1\theta_i - y^*)^2 = R^2 \quad (5)$$

또한, $i = 1$ 인 경우, 즉 첫 번째 설계위치에서는 ${}^1p_1 = {}^1q_1 = {}^1\theta_1 = 0$ 이므로, 식(5)은 아래와 같다.

$$(x_1 - x^*)^2 + (y_1 - y^*)^2 = R^2 \quad (6)$$

상기 식(6)을 식(5)에 대입하여 정리하면 아래와 같은 이동점 위치 (x_i, y_i) 와 고정점 위치 (x^*, y^*) 의 관계식을 구할 수 있다.

$$(x_1 a_i + y_1 b_i - {}^1p_i) x^* + (y_1 a_i - x_1 b_i - {}^1q_i) y^* + x_1 c_i + y_1 d_i + e_i = 0 \quad (i = 2, 3) \quad (7)$$

여기서, $a_i = 1 - \cos^1\theta_i$, $b_i = \sin^1\theta_i$, $c_i = {}^1p_i \cos^1\theta_i + {}^1q_i \sin^1\theta_i$, $d_i = -{}^1p_i \sin^1\theta_i + {}^1q_i \cos^1\theta_i$ 및 $e_i = \frac{{}^1p_i^2 + {}^1q_i^2}{2}$ 이다.

상기 2개의 식(7)이 설계좌표계 [1]에 대하여 표현된, 첫 번째 설계 위치에서의 이동점 위치 (x_1, y_1) 와 고정점 위치 (x^*, y^*) 의 관계를 나타내 주고 있다. 4절 기구의 커플러가 3개의 설계좌표계를 지나가도록 설계하는 경우(3 위치합성 문제)에는 상기 식(7)과 같이 2개의 식을 구할 수 있으며, 2위치 합성인 경우에는 1개의 식을 각각 구할 수 있다. 따라서, 4개의 설계변수 (x_1, y_1, x^*, y^*) 중 몇 개는 설계자가 자유로이 설정할 수 있는 것이다.

2위치 합성인 경우, 식(7)에서와 같이 식이 1개이고 설계변수는 4개이므로 3개의 설계변수를 자유로이 설정할 수 있다. 이동점 (x_1, y_1) 의 값을 임의로 설정하면 고정점 위치, x^* 와 y^* 는 상기 식(7)에서 보는 바와 같이 직선으로 나타나며, 다시 이 직선상의 임의의 점을 고정점으로 선택할 수 있다. 3위치 합성인 경우, 2개의 설계변수를 임의로 설정할 수 있기 때문에 이동점 (x_1, y_1) 을 임의로 설정하면 고정점 위치 (x^*, y^*) 는 식(7)의 두 식에 의해 계산되어지며, 반대로 고정점 위치 (x^*, y^*) 를 먼저 선택하면 이동점 (x_1, y_1) 역시 계산되어진다. 이 경우 설계자가 자유로이 선택할 수 있는 이동점 (x_1, y_1) 은 평면상의 임의의 점이 될 수 있으며, 이를 이동점 영역(circle point

Plane)상에서의 설계라고 부를 수 있을 것이다. 반대로 고정점 (x^*, y^*) 을 먼저 선택하면, 두 개의 식(7)으로부터 이동점을 계산할 수 있으며, 이를 고정점 영역(center point plane) 상에서의 설계라 부르겠다.

상기와 같이 3 위치 합성 문제에서는 이동점 영역이나 고정점영역은 평면이므로 기구학적 해는 무한하다. 하지만, 상기 기구학적 해 영역 중에는 크랭크가 회전함에 따라 커플러가 주어진 몇몇 위치/방향을 지나가기 위해서 기구를 분해해야하는(분기문제)해도 있을 수 있으며 주어진 순서대로 지나가지 않는(순서문제) 해도 포함한다. Filemon⁽¹⁾은 분기문제를 일으키는 구동크랭크의 이동점 해 영역을 구하였고, Waldron^(2,3,4,5) 등은 피구동 크랭크의 고정점영역(Center Point Plane) 및 이동점(Circle Point Plane) 영역 모두에서 분기 문제(Branch Problem)를 야기시키는 영역을 찾아내었고, 참고문헌⁽⁶⁾에서는 구동크랭크의 고정점영역에서의 분기문제영역을 찾아내어 기구학적 해 영역에서 이를 제거함으로써 합당해의 선택을 할 수 있도록 한 바 있다.

본 논문에서는 4 절 기구 커플러가 주어진 설계위치의 양끝 사이를 왕복하기를 원하는 경우, 입력크랭크의 기구학적 설계해 중에서 이를 만족하는 합당해 영역을 구하는 방법을 제시하고자 한다.

3. 4절 기구 입력크랭크의 합당해 영역

운동 생성 기구는 커플러가 주어진 몇몇 좌표계들을 정확히 지나가도록 하는 것이 목적이다. 하지만, 커플러 좌표계가 주어진 설계좌표계들을 정확히 지나가면서도 양 끝 좌표계사이를 왕복되어야하는 응용도 매우 많다. Fig. 1 에서와 같이 커플러 좌표계가 설계좌표계 [1],[2] 및 [3] 을 정확히 왕복되어야 하는 경우에는 설계좌표계 [1]과 [3]이 제한위치이며, 4절 기구의 입력 크랭크의 회전각 순서가 매우 중요하다. ϕ_{ij} 이 커플러 좌표계가 [i]에서 [j]로 가는 동안의 회전각변위이라 하면, 상기의 경우가 되기 위해서는 $\phi_{12} \leq \phi_{13} \leq 180^\circ$ 혹은 $-180^\circ \leq \phi_{13} \leq \phi_{12}$ 가 되어야 함을 쉽게 알 수 있다. 즉, 4절 기구가 (1)과 (3)을 양끝위치로 하고 (1)→(2)→(3)혹은 (3)→(2)→(1)의 순서를 따르기 위해서는 아래와 같은 조건을 만족하여야 함을 쉽게 알 수 있다.

$$\phi_{12}(+) \text{ and } \phi_{23}(+) \text{ and } \phi_{13}(+) \tag{8}$$

$$\phi_{12}(-) \text{ and } \phi_{23}(-) \text{ and } \phi_{13}(-)$$

여기서, $\phi_{ij}(+)$ 는 $0 \leq \phi_{ij} \leq 180^\circ$ 를, $\phi_{ij}(-)$ 는 $-180^\circ \leq \phi_{ij} \leq 0^\circ$ 를 의미한다.

3 위치 합성인 경우, 전 장에서 언급하였듯이 입력크랭크의 고정점 및 이동점 기구학적 해는 각각 평면이며, 평면상에 임의의 점을 고정점 (x^*, y^*) 이나 이동점 (x_i, y_i) 으로 선택 할 수 있다. 또한, 고정점이나 이동점 중 하나가 선택되어 지면 나머지 점은 식(7)에 의해 계산되어 질 수 있다. 하지만 상기 식(8)을 만족하는 고정점이나 이동점의 영역은 평면상의 일부에 지나지 않을 것이며, 지금부터 이 영역을 구하고자 한다.

3.1 고정점 영역(Center Point Plane)에서의 합당해 영역

입력크랭크 설계시, 고정점 (x^*, y^*) 을 먼저 선정하고자 할 때 식(8)을 만족하는 고정점 영역을 구해보도록 한다. 이는 고정점의 선정위치에 따라 크랭크 변위각(ϕ_{ij})이 어떻게 변화하는 지를 살펴봄으로써 알아낼 수 있을 것이다.

Fig. 4 은 주어진 설계좌표계들에대한 Pole 들의 위치와 고정점(C^*)과의 상관관계를 보여주고 있다. 여기서, C_i, C_j 및 C_k 는 각 설계좌표계에 대한 이동점 들이며, 고정점(C^*)과 이동점 C_i, C_j 및 C_k 를 연결한 선분이 4 절 기구의 크랭크이므로, $\overline{C_i C^*} = \overline{C_j C^*} = \overline{C_k C^*}$ 이다. [i]에서 [j]로의 이동만을 생각해 보면, $\overline{C_i C^*} = \overline{C_j C^*}$ 이고 $\overline{C_i P_{ij}} = \overline{C_j P_{ij}}$ 이므로, 선분 $\overline{C^* P_{ij}}$ 는 $\angle C_i C^* C_j$ 를 이등분한다. 따라서 $\angle P_{ij} C^* C_j = \frac{\phi_{ij}}{2}$ 이며, 같은 방법으로 $\angle P_{ik} C^* C_j = \frac{\phi_{ik}}{2}$ 이다. 결국 아래와 같은 관계가 성립한다.

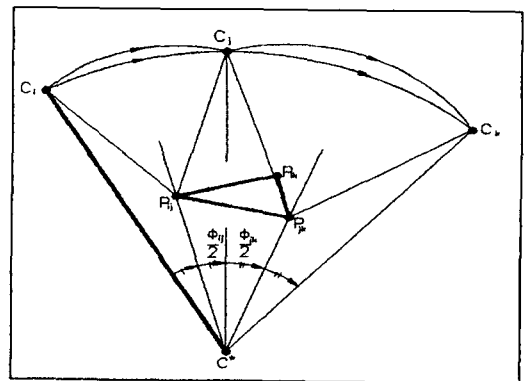


Fig. 4 Angle subtended by a Pole Pair(P_{ij}, P_{ik}) at a Center Point(C^*)

$$\angle P_{ij}C^*P_{jk} = \frac{\phi_{ij} + \phi_{jk}}{2} = \frac{\phi_{ik}}{2} \quad (9)$$

즉, 고정점 (C^*)에서 두 개의 Pole P_{ij} 와 P_{jk} 를 바라 볼 때의 각도는, 크랭크를 [i]에서 [k]로 회전시킬 때의 크랭크 회전각변위의 반($\frac{\phi_{ik}}{2}$)과 같다.

따라서, Fig. 5 에서와 같이 선분 $\overline{P_{ij}P_{jk}}$ 를 지름으로 하는 원상에 고정점을 위치하게 하면 $\phi_{ik} = 180$ 도가 될 것이며, P_{ij} 와 P_{jk} 를 잇는 직선상에 고정점을 위치하게 하면 $\phi_{ik} = 0$ 도가 될 것이다. 즉, 이 원과 직선이 ϕ_{ik} 의 부호를 변화시키는 경계선이 된다. 따라서, 이들 원과 직선으로 구분되어지는 영역들 중 임의의 1 개 영역에서의 부호만 알면 나머지 영역에서의 부호는 쉽게 알 수 있다. Fig. 5 에서 보는 예와 같이 고정점(C^*)이 경계 원 위쪽에 위치하는 경우, $\frac{\phi_{ik}}{2}$ 의 방향은 반시계 방향(+) 이고 크기는

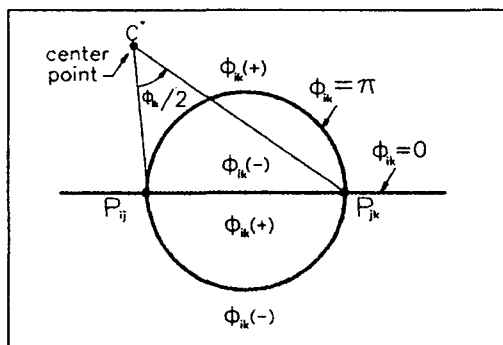


Fig. 5 Sets of Center Points which make $\phi_{ik} = \pi$, $\phi_{ik} = 0$

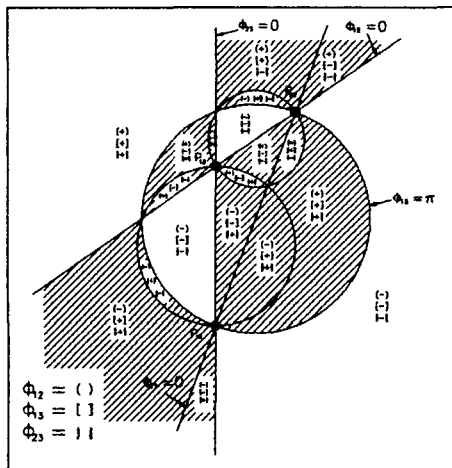
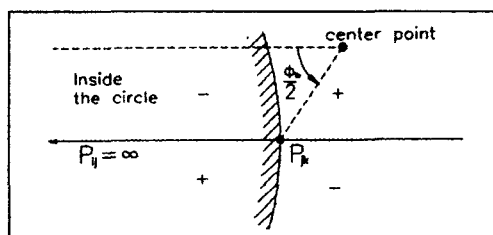


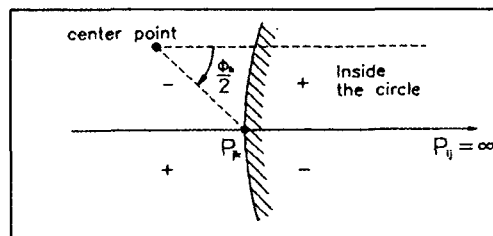
Fig. 6 Feasible Areas for Input Crank Center Point Selection satisfying Eq.(8)

90 도 보다 작으므로, $0 < \phi_{ik} < \pi$, 즉 $\phi_{ik}(+)$ 가 된다. 다른 영역의 부호는 경계원과 경계직선에서 부호가 변화하며 이는 Fig.5 과 같다. 삼기방법을 이용하여, ϕ_{12} , ϕ_{23} 및 ϕ_{13} 각각의 부호를 구할 수 있고, 식(8)을 만족하는 고정점의 영역을 구할 수 있다. Fig. 6 은 그 한 예를 보여 주고 있으며, 빗금이 쳐지지 않는 영역이 식(8)을 만족시키는 고정점 영역이다. 따라서, 빗금친 영역에 고정점을 설계할 경우, 설계된 4 절 기구는 식 (8)을 만족시키지 않는다.

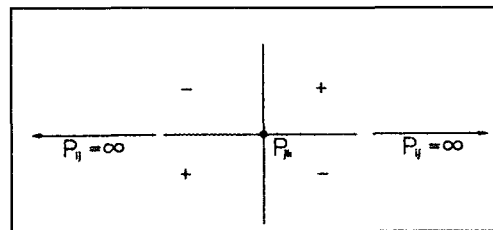
또한 한 쌍의 설계좌표계 [i]와 [j]가 평행할 경우에는 P_{ij} 는 무한대에 위치하게 되며, P_{jk} 및 P_{ik} 는 유한한 위치에 놓일 것이다. Fig. 7(a) 에서와 같이 P_{ij} 가 P_{jk} 로부터 유한한 거리에 있고, P_{jk} 의 왼쪽에 위치한다고 가정하면, Fig. 5 에서와 같은 방법으로 ϕ_{ik} 의 부호를 결정할 수 있다. 즉, 고정점이 Fig.7(a) 에서와 같이 우상 귀에 위치한 경우, $\frac{\phi_{ik}}{2}$ 의 방향은 반시계 방향(+) 이고 크기는 90 도



(a)



(b)

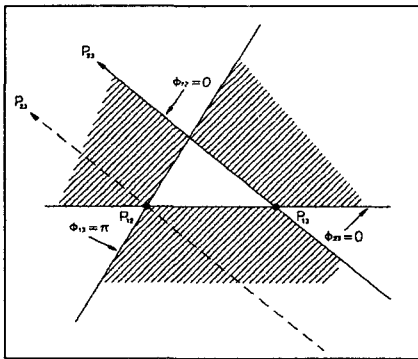


(c)

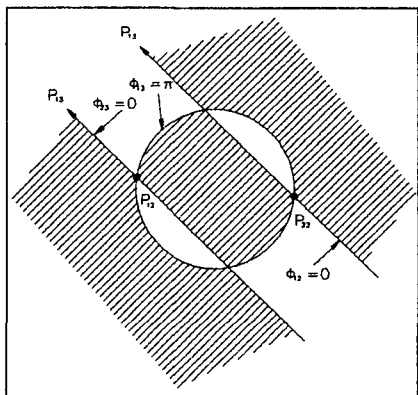
Fig. 7 Sign of Input Crank Angle Displacement (ϕ_{ij})when 2 Design Frames are parallel

보다 작으므로, $0 < \phi_{ik} < \pi$, 즉 $\phi_{ik}(+)$ 가 되며, 나머지 영역에서는 차례로 부호가 바뀌게 된다. 또, P_{ij} 가 P_{jk} 의 오른쪽에 위치한다면, ϕ_{ik} 의 부호는 Fig.7(b)에서와 같다. 이 두 그림 Fig.7(a) 및 7(b)를 비교하면 각각의 대응되는 구역에서 ϕ_{ik} 의 부호가 같다는 것을 알 수 있다. 실제로 P_{ij} 는 무한대 위치하므로 P_{ij} 가 P_{jk} 의 왼쪽에 있는 지 오른쪽에 있는 지는 알 수 없으나 ϕ_{ik} 의 부호는 Fig.7(c)와 같음을 알 수 있다. 상기의 방법을 이용하여, 주어진 설계좌표계중 한 쌍이 평행한 경우의 식(8)을 만족하는 영역을 구할 수 있으며, 이는 그림 Fig.8(a),(b)에서 빗금치 않은 영역이다. Fig.8(a)는 (2)와(3)이 평행한 경우이고, Fig.8(b)는 (1)과 (3)이 평행한 경우이다.

상기의 Fig.6 과 Fig.8 으로부터, 식(8)을 만족하는 입력 크랭크 고정점의 합당 해 위치는 $\phi_{13} = \pi$ 를 만드는 원과 $\phi_{12} = 0$ 과 $\phi_{23} = 0$ 를 만드는 직선들로 경계 지워짐을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 8 Feasible Region for selecting Input Crank Center Point satisfying Eq.(8) when 2 Design Frames are parallel

3.2 이동점 영역(Circle Point Plane)에서의 합당해 영역

이동점(x,y)을 먼저 선정하고자 할 때에도 역시, 식(8)을 만족하는 영역은 매우 제한적이며, 이를 구해보도록 한다. 본 절에서도 $\phi_{ij} = 0$ 와 $\phi_{ij} = 180$ 도를 만드는 입력 크랭크 이동점의 집합을 먼저 구함으로써, 이들 경계선이 구분 지어주는 각 구역들의 ϕ_{ij} 의 부호를 알아내는 방법을 사용하려 한다. 왜냐하면 이들 경계선을 기준으로 하여 ϕ_{ij} 의 부호가 바뀌기 때문이다.

Fig.9 은 크랭크와 커플러가 설계좌표계 [i]에서 [j]로 이동할 때의 각변위 등을 보여주고 있다. 여기서 Ψ_{ij} 는 [i]에서 [j]로 이동할 때의 크랭크와 커플러 사잇각의 변위이며, ϕ_{ij} 는 크랭크 각 변위이고, θ_{ij} 는 커플러 각 변위이다. 이들 사이에는 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\Psi_{ij} = \theta_{ij} - \phi_{ij} \quad (10)$$

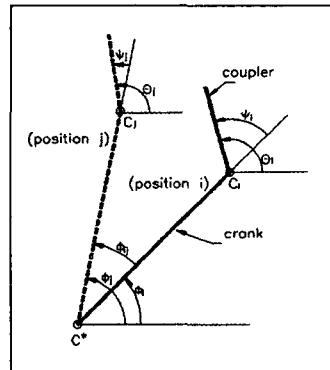


Fig. 9 Angle displacement from Design Position [i] to [j]

또한, 입력 크랭크의 이동점 위치와 Image Pole 및 크랭크/커플러 사잇각 (Ψ)의 변위 사이에는 아래 Fig.10와 같은 관계가 있음을 전 절의 Fig.5에서와 같은 방법으로 쉽게 증명할 수 있다. 즉, 이동점 C에서 두 개의 P'_{ik} 와 P'_{jk} 를 바라 볼 때의 각도는, 크랭크를 (i)에서 (k)로 회전시킬 때의 크랭크와 커플러사이의 각변위의 반($\frac{\Psi_{ij}}{2}$)과 같다. 또한 Fig.11에서와 같이, Image Pole Triangle 사이의 각들이 크랭크 회전각의 반($\frac{\theta_{ij}}{2}$)이라는 것은 널리 알려진 사실이다.

$\phi_{ij} = 0$ 인 경우, 식(10)에 의하여 $\Psi_{ij} = \theta_{ij}$ 가 되며, $\phi_{ij} = \pi$ 인 경우 $\Psi_{ij} = \theta_{ij} - \pi$ 가 된다. $\phi_{ij} = 0$ 이 되는, 즉, $\Psi_{ij} = \theta_{ij}$ 이 되는 이동점의 위치는 Image Pole P'_{ik} 와 P'_{jk} 에서 선을 그었을 때 그 사잇각이 $\frac{\theta_{ij}}{2}$ 인 점들이다. 이점들의 집합은 Fig. 12에서와 같이 3개의

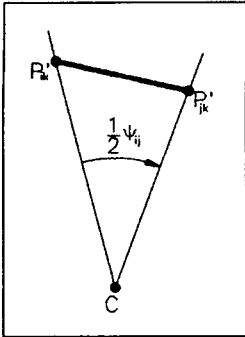


Fig. 10 Angle subtended by a Image Pole Pair (P'_{ij}, P'_{ik}) at a Circle Point(C)

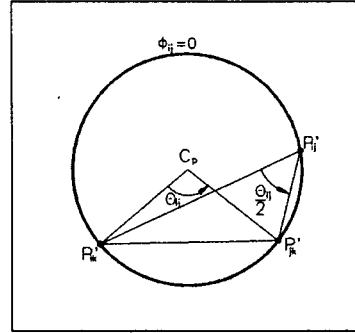


Fig. 12 Sets of Circle Points(image pole circle)which make $\phi_{ij} = 0$

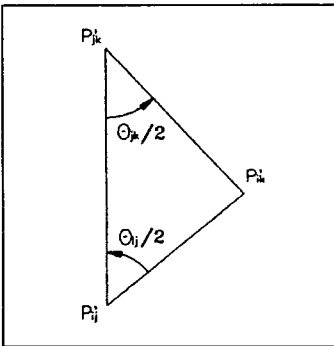


Fig. 11 Image Pole Triangle and Crank Angle Displacement

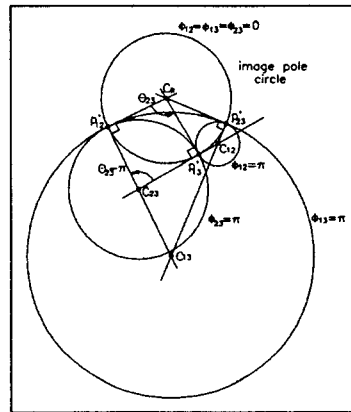


Fig. 13 Sets of Circle Points which make $\phi_{ij} = \pi$

Image Pole 들을 지나가는 원(Circle) 이 된다. 왜냐하면, Fig. 10 및 11 에서와 같이, Image Pole Triangle의 내각 $\angle P'_{jk}P'_{ij}P'_{ik}$ 이 $\frac{\theta_{ij}}{2}$ 이며 동시에 $\frac{\psi_{ij}}{2}$ 이기 때문이다. 같은 이유로 해서, Image Pole Circle 은 ϕ_{jk} 와 ϕ_{ik} 의 값이 0 이 되는 이동점 궤적이기도 하다.

또, $\phi_{ij} = \pi$ 가 되게 하는 이동점 궤적은 Image Pole P'_{jk} 와 P'_{ik} 에서 선을 그었을 때 그 사잇각이 $\frac{(\theta_{ij} - \pi)}{2}$ 인 점들이며, 이 궤적은 Fig. 13 에서와 같이 P'_{ik} 와 P'_{jk} 를 현으로 하고, 그 현에 대한 원주각이 $\frac{(\theta_{ij} - \pi)}{2}$ 인 원이다. 이 원의 중심점 위치는 P'_{ik} 및 P'_{jk} 로부터 Image Pole circle의 중심점(C_p)까지 이은 선분에 대해 각각 수직인 직선을 그렸을 때 이 두 직선이 만나는 점이다. 같은 방법으로 $\phi_{jk} = \pi$ 와 $\phi_{ik} = \pi$ 가 되는 크랭크 이동점의 궤적 원을 구할 수 있다.

Fig. 13 에서의 원들은 $\phi_{12} = \phi_{23} = \phi_{13} = 0$, $\phi_{12} = \pi$, $\phi_{23} = \pi$ 및 $\phi_{13} = \pi$ 이 되게 하는 이동점의 궤적들이며, ϕ_{12} , ϕ_{23} , ϕ_{13} 각각의 부호를 바꿔게 하는 경계선이기도 하다. 이들 크랭크 각변위의 부호를 결정하는 방법은

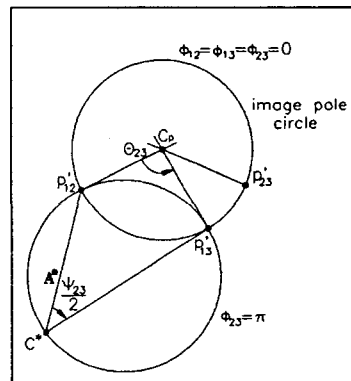


Fig. 14 Sign of ϕ_{23} depending on the Location of the Circle Point Selection

Fig. 14 의 예를 이용하여 설명하고자 한다. Fig.14 에서 그림에서 $\phi_{23} = \pi$ 인 원 선상의 점 C를 이동점으로 선택하였을 경우, Ψ_{23} 는 그림에서와 같이 시계방향의 값,

즉 (-) 값을 가지며, $\Psi_{23} = \theta_{23} - \pi$ 의 관계를 만족시킨다. 만약 점 C 를 원의 안쪽(A) 영역) 으로 조금 이동시켜 선택한다면, Ψ_{23} 의 절대값은 $\Psi_{23} = \theta_{23} - \pi$ 의 절대값보다 커지며 아래의 관계를 가질 것이다.

$$\Psi_{23} = \theta_{23} - \pi - \Delta \quad (11)$$

(Δ 는 매우작은 양의 값)

또, 식(10) 과 식(11) 으로부터

$$\phi_{23} = \theta_{23} - \Psi_{23} = \theta_{23} - (\theta_{23} - \pi - \Delta) = \pi + \Delta \quad (12)$$

따라서, Fig. 14에서 (A) 영역에 이동점을 선택하였을 경우, ϕ_{23} 은 π 보다 크기 때문에 음(-) 값을 갖게된다. 이와 같이 한 영역에서의 ϕ_{23} 부호가 결정되면, 다른 영

역에서의 부호는 경계원을 경계로 하여 바뀌게 되므로 모든 영역에서의 부호를 알 수 있다.

Fig. 15 은 입력 크랭크의 이동점 위치에 따르는 ϕ_{12} , ϕ_{23} 및 ϕ_{13} 들의 부호를 보여주는 한 예이며, 식(8)을 만족시키는 이동점의 영역은 빗금치지 않은 영역이다. 즉, 빗금친 영역이 불합당해 영역이며, 빗금친 영역에 이동점을 선택하면, 설계된 4 절 기구는 식(8)을 만족하지 않는다.

또한 한 쌍의 설계좌표계가 평행할 때의 경우, 즉 한 개의 Image Pole 의 위치가 무한대에 위치하는 경우 역시 상기와 같은 방법으로 ϕ_{12} , ϕ_{23} 및 ϕ_{13} 들의 부호를 구할 수 있다. Fig. 16 은 설계좌표계 [1] 과 [2] 및 [1]과 [3] 이 각각 서로 평행한 경우의 예를 보여주고 있으며,

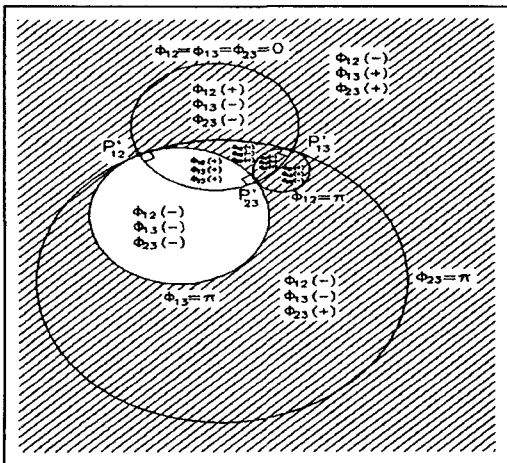
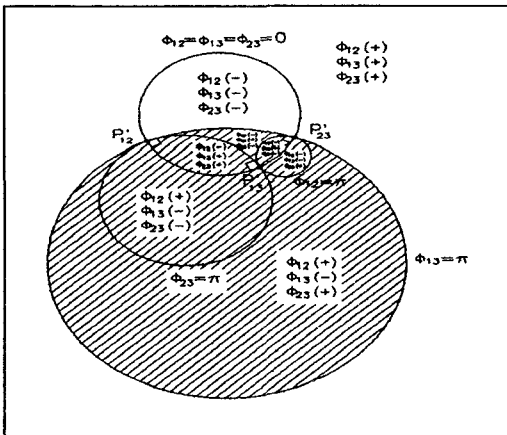


Fig. 15 Examples of Feasible Region for selection input Crank Circle Point satisfying Eq. (8)

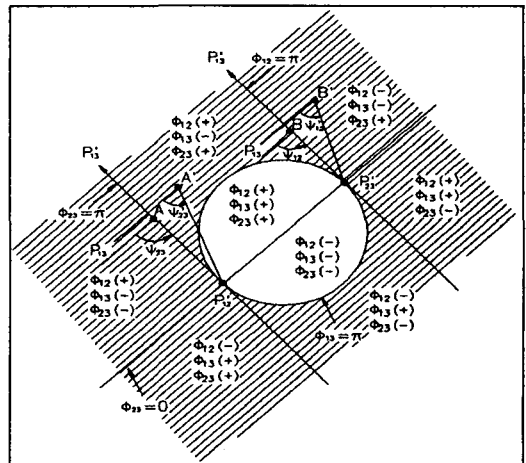
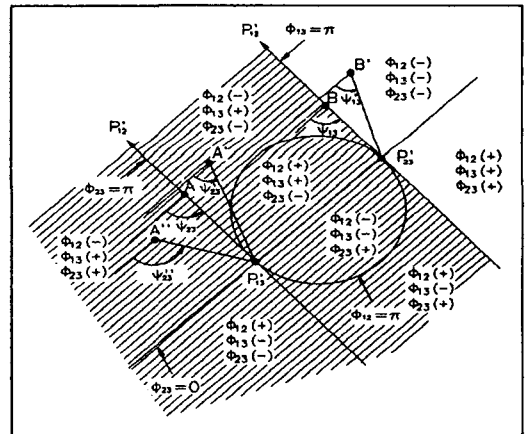


Fig. 16 Examples of Feasible Region for selecting Input Crank circle Point satisfying Eq.(8) when 2 Design Frames are parallel

빗금치지 않는 영역이 식(8)을 만족하는 영역이다.

상기의 그림들로부터, 식(8)을 만족하는 입력 크랭크 이동점의 합당 해 위치는 $\phi_{13} = \pi$ 의 곡선을 경계로 하는 구간 중 $\phi_{12} = \pi$ 및 $\phi_{23} = \pi$ 의 곡선이 지나가지 않는 영역임을 알 수 있다.

4. 설계 예 및 검증

상기의 방법론을 검증하기 위해 상기의 방법을 컴퓨터 프로그램 하였다. 그리고, Table 1 및 Fig. 17 에서와같은 설계좌표계를 지나며, 설계좌표계 [1]과 [3]사이를 지나는 동안 구동크랭크의 각변위가 식(8)을 만족하는 4절 기구를 상기 방법론을 이용하여 설계해 보고자 한다.

Table 1. Design Frames through which the coupler is carried

	설계좌표계 [1]	설계좌표계 [2]	설계좌표계 [3]
(p_{Dx}, q_{Dx})	(-100, 100)	(100, 150)	(250, 0)
θ_{Dx} (도)	-60	30	0

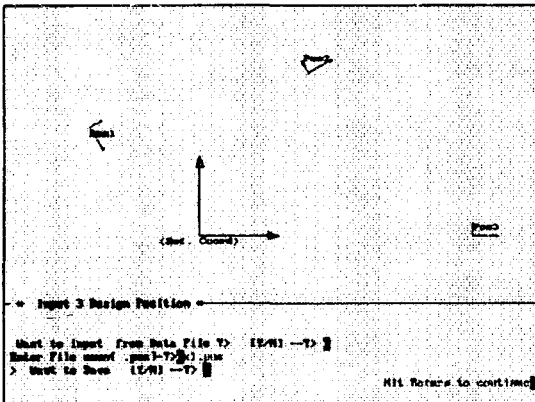


Fig. 17 Given Design Frames through which Coupler is carried

본 설계에 과정에서는 먼저, 피구동 크랭크를 설계하고 난 후 구동 크랭크를 설계한다. 피구동 크랭크 설계에 있어서는 Waldron^(4,5)의 방법을 이용하여 이동점 영역에서의 분기문제 영역을 구하여, 분기문제가 일어나지 않도록 피 구동크랭크 설계를 수행하고, 입력 크랭크 설계에 있어서는 Filemon 방법을 이용한 분기 문제영역과 본 논문에서 제시한 방법을 이용하여 식(8)을 만족하는 영역을 구하여, 분기문제 및 식(8)을 동시에 만족하는 기구를 설계하였다.

Fig. 18에서는 피구동크랭크를 설계하기 위한 이동점 영역에서의 분기문제 영역⁽⁶⁾을 보여주고 있다. 빗금친 영역에 피구동크랭크 이동점을 선택하면 분기문제를 피할 수 없다. 따라서 Fig. 18에서와 같이 빗금친 영역 밖의 임의의 위치에 피구동 크랭크 이동점을 선택하였다. 이동점이 주어지면 식(7)에 의해 고정점을 계산할 수 있으며 피구동 크랭크 설계를 마치게 된다. Fig. 19는 이동점 영역에서의 입력크랭크 설계를 위한 분기문제 영역(Filemon 방법)과 식(8)을 만족시키기 위해 본 논문에서 제안하는 영역을 보여 주고 있다. Fig. 19에서 원 안의 빗금친 영역은 식(8)을 만족치 못하는 영역이며, 두 직선사이의 빗금친 영역은 Filemon⁽¹⁾ 방법에 의한 분기 문제를 야기시키는 영역이다. 따라서, 입력크랭크 이동점은 빗금친 영역 밖에서 선택되어야 한다. 본 예에서도 Fig. 19

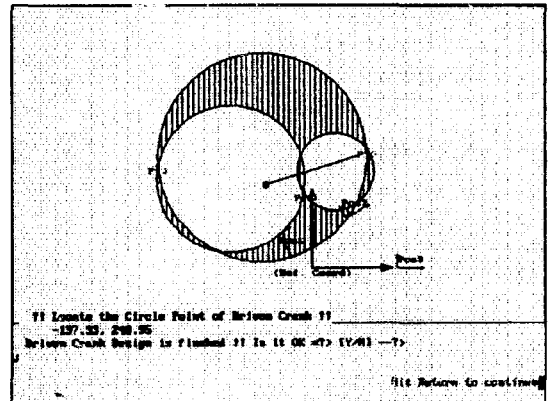


Fig. 18 Feasible Area for selecting Circle Point of driven Crank to avoid Branch Problem by Waldron's Method

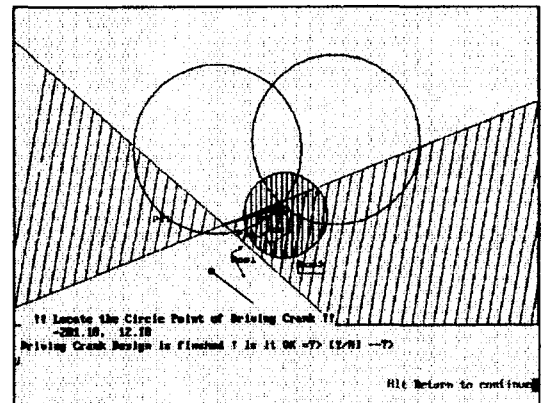


Fig. 19 Feasible Area for selecting Circle Point of Input Crank to satisfy Eq.(8)

- Three Position Motion Generation Synthesis", Transaction of ASME Journal of Mechanical Design, Vol.116, pp 88-91., 1994.
6. J.M. Prentis, "The Pole Triangle, Burmester theory and Order and Branch Problem-I (The Order Problem)", Mechanism and Machine Theory, Vol. 26, No. 1, pp.19-30.,1991.
 7. J.M. Prentis, "The Pole Triangle, Burmester theory and Order and Branch Problem-II (The Branch Problem)", Mechanism and Machine Theory, Vol. 26, No. 1, pp.31-39.,1991.
 8. 범진환, 김학렬, "4절 기구의 3 위치합성을 위한 구동크랭크 고정점 영역 상에서의 분기문제 해결", 한국정밀공학회, 제12권 6 호, pp80-86., 1995.
 9. A.S. Hall, "Kinematics and Linkage Design", Waveland Press in Purdue University, 1986.