

# 바퀴달린 로봇의 동적 제어

은 희 창\*, 정 동 원\*\*

## Dynamic Control of a Robot with a Free Wheel

Hee-Chang Eun\*, Dong-Won Jung\*\*

### ABSTRACT

Mobile wheeled robots are nonholonomically constrained systems. Generally, it is very difficult to describe the motion of mechanical systems with nonintegrable nonholonomic constraints. An objective of this study is to describe the motion of a robot with a free wheel. The motion of holonomically and/or nonholonomically constrained system can be simply determined by Generalized Inverse Method presented by Udwadia and Kalaba in 1992. Using the method, we describe the exact motion of the robot and determine the constraint force exerted on the robot for satisfying constraints imposed on it. The application illustrates the ease with which the Generalized Inverse Method can be utilized for the purpose of control of nonlinear system without depending on any linearization, maintaining precision tracking motion and explicit determination of control forces of nonholonomically constrained system.

**Key Words** : Generalized Inverse Method(일반화된 역행렬 방법), Wheeled Robot(바퀴달린 로봇), Control(제어), Constraint Force(구속력), Nonholonomic Constraint(구속식)

### 1. 서 론

18세기 Lagrange 이후 구속된 시스템의 운동을 묘사하기 위한 많은 시도가 있었으나 대부분의 방법은 Lagrange multiplier를 보다 정확하게 결정하기 위한 수치해석에 의존하였다. 또한 이들 방법들에 의해 nonholonomic 시스템을 묘사하기란 상당한 어려움이 있다.

지난 200여년동안 구속된 시스템의 운동을 묘사하기 위한 많은 연구에도 불구하고 이를 명확하게 결정하지 못

하였다. 1992년 Udwadia와 Kalaba<sup>(1)</sup>는 Moore-Penrose Inverse<sup>(2)</sup>와 가우스 원리를 사용하여 구속 시스템의 운동을 묘사하는 Generalized Inverse Method를 제시하였다. 이 방법은 주어진 구속식을 시간에 관해 단지 미분을 취하여 제시한 운동방정식의 각 계수행렬에 대입함으로써 그 운동을 묘사할 수 있는 장점이 있다. 이는 역학분야의 중요한 결과로 이에 대한 검증 및 타당성이 여러 방법<sup>(3),(4)</sup>에 의해 행해지고 있다.

이 방법의 효율성 및 용이함은 특히 로봇의 제어 분야

\* 제주대학교 건축공학과  
\*\* 제주대학교 기계공학과

에서 찾을 수 있다. Yao<sup>(6)</sup>는 각각 세 개의 팔로 구성된 두 개의 로봇에 쥐어진 물체를 원을 따라 이동시키기 위해 필요한 구속력을 결정하였다. McClamroch<sup>(6)</sup>는 holonomic 구속조건에 의해 구속된 로봇의 변위, 속도 및 구속력을 결정하기 위한 피드백 모델을 제시하였다. Bloch<sup>(7)</sup>는 nonholonomic이며 비선형 시스템에 피드백을 사용하여 그 운동을 묘사하였다. 또한 d'Andrea-Novel<sup>(8)</sup>은 바퀴달린 로봇의 거동을 선형화된 피드백에 의해 그 운동을 묘사하였다. 이외에도 로봇에 대한 그 거동을 결정하기 위한 많은 연구들이 있었으나 이들의 대부분은 비선형 시스템의 선형화와 피드백을 사용하였다.

본 연구에서는 nonholonomic 시스템인 바퀴달린 로봇의 거동을 Generalized Inverse Method를 사용하여 그 운동 및 구속력을 산정한다. 이 방법은 기존의 방법들과는 달리 어떠한 선형화 과정을 요하지 않으며, 주어진 구속조건을 정확히 만족함과 동시에 시스템에 작용하는 구속력을 명확히 결정함으로써 로봇의 제어분야에 용이하게 사용할 수 있음을 보인다.

## 2. Generalized Inverse Method

$n$ -벡터  $q = [q_1 \sim q_2 \cdots q_n]^T$ 로 그 운동이 묘사되는 시스템을 고려하자. 이 시스템의 자유운동방정식은 Newton이나 Lagrange 역학으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$M(q, t)\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

여기서  $M$ 은  $n \times n$  대칭인 질량행렬을,  $F$ 는  $n \times 1$  외력 벡터이다. 위의 식에서 자유운동의 가속도는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\ddot{q} = M^{-1}F = a(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

이 시스템이 다음과 같은  $m$ 개 holonomic과 nonholonomic의 구속조건에 의해 그 자유운동이 구속된다고 가정하자. 단, 부등식 관계의 nonholonomic 구속식은 본 연구에서 제외된다.

$$\phi_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

이 식에서 구속식은 모든 시간  $t$ 에서도 반드시 만족하고 있다.

위의 구속식들이 미분이 가능하다고 가정하여 시간에 관해 적절하게 미분을 취하면 다음 형태의 수식을 얻을

수 있다.

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (4)$$

여기서  $A$ 는  $m \times n$  행렬이 된다.

구속된 시스템의 운동방정식을 결정한다는 것은 자유운동방정식(1)과 구속식(4)를 조합하는데 있다. 1992년 Udawadia와 Kalaba는 이들 관계를 가우스 원리와 Moore-Penrose Inverse에 의해 적절하게 조합하였다. 이를 Generalized Inverse Method라 하며 구속된 시스템의 운동방정식을 다음과 같이 제시하였다.

$$\ddot{q} = a(q, \dot{q}, t) + M^{-1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (5)$$

여기서 '+'는 Moore-Penrose Inverse\*를 일컫는다. 이 식을 통하여 구속된 시스템의 운동을 명확하게 묘사할 수 있으며 이들 구속조건들을 만족하기 위해 자연에 의해 가해지는 구속력은 다음과 같이 명확하게 표현된다.

$$F^c = M^{1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (6)$$

이를 사용한다면 부등관계의 구속식을 제외한 어떠한 구속조건이 시스템에 주어질 경우에 그 운동방정식을 간단하게 쓸 수 있으며 그 때의 구속력을 명확히 산정할 수 있다. 다음은 이를 이용하여 nonholonomic 시스템인 바퀴달린 로봇의 동적인 해석이 이루어진다.

## 3. 바퀴달린 로봇의 동적거동

### 3.1 자유운동방정식

Fig.1은  $X_1$ - $X_2$ 평면상을 움직이는 바퀴달린 로봇을 나타낸다. 점 0의 위치를  $x$ 와  $y$ 로 표현하였으며, 이 점 0로부터  $X_1$ 의 (+)와 (-)방향으로 각각  $L$ 만큼 떨어진 앞의 두바퀴 2와 3은 좌우 방향전환이 불가능하고 단지 전진

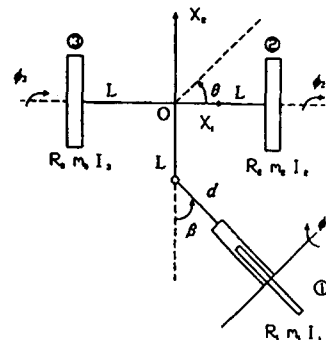


Fig. 1 A robot with a free wheel

\* Moore-Penrose Inverse는 다음과 같이 정의된다. (1)  $AA^*A = A$ , (2)  $A^*AA^* = A^*$ , (3)  $(AA^*)^T = AA^*$ , (4)  $(A^*A)^T = A^*A$

방향으로만 회전이 이루어진다. 점 0으로부터  $X_2$ 의 (-) 방향으로 L위치에 힌지로부터 d만큼 떨어져 뒷바퀴 1이 위치하며 이 바퀴는 방향 전환( $\beta$ )이 가능하다. 앞의 두바퀴가  $X_1$ - $X_2$ 평면과 이루는 각을  $\theta$ 로, 바퀴들의 회전각을  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ 로 각각 표현하였다.

각 바퀴들은 강체(rigid body)로 각 축들의 질량은 없는 것으로 가정하여 이 로봇의 거동을 다음 7개의 일반화된 좌표(generalized coordinates)에 의해 묘사할 수 있다.

$$q = [x \ y \ \theta \ \beta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T \quad (7)$$

바퀴의 질량은 각각  $m_1, m_2, m_3$ 이며 반경은  $R_1, R_2, R_3$ 이다. 또한  $I_1, I_2, I_3$ 는 각 바퀴의 단면 2차모멘트를 나타낸다. 이 시스템의 자유운동방정식은 Newton이나 Lagrange 역학에 의해 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A1 & 0 & A2 & A3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A1 & B1 & B2 & 0 & 0 & 0 \\ A2 & B1 & C1 & C2 & 0 & 0 & 0 \\ A3 & B2 & C2 & D1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서 행렬의 각 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A1 &= m_1 + m_2 + m_3, \\ A2 &= L(m_3 - m_2)\sin\theta - m_1L\cos\theta \\ &\quad - m_1(d + R)\cos(\beta - \theta), \\ A3 &= m_1(d + R)\cos(\beta - \theta), \\ B1 &= L(m_3 - m_2)\cos\theta + m_1L\sin\theta \\ &\quad - m_1(d + R)\sin(\beta - \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= m_1 + m_2 + m_3, \\ A2 &= L(m_3 - m_2)\sin\theta - m_1L\cos\theta \\ &\quad - m_1(d + R)\cos(\beta - \theta), \\ A3 &= m_1(d + R)\cos(\beta - \theta), \\ B1 &= L(m_3 - m_2)\cos\theta + m_1L\sin\theta \\ &\quad - m_1(d + R)\sin(\beta - \theta), \\ B2 &= m_1(d + R)\sin(\beta - \theta), \\ C1 &= L^2(m_1 + m_2 + m_3) + m_1(d + R)^2 \\ &\quad + 2m_1L(d + R)\cos\beta, \\ C2 &= -m_1L(d + R)\cos\beta - m_1(d + R)^2, \\ D1 &= m_1(d + R)^2 \\ E1 &= (m_3 - m_2)L\cos\theta\dot{\theta}^2 + m_1L\sin\theta\dot{\theta}^2 \\ &\quad - m_1(d + R)(\dot{\beta} - \dot{\theta})^2 \sin(\beta - \theta) \\ E2 &= (m_2 - m_3)L\sin\theta\dot{\theta}^2 + m_1L\cos\theta\dot{\theta}^2 \\ &\quad + m_1(d + R)\cos(\beta - \theta)\sin(\dot{\beta} - \dot{\theta})^2, \\ E3 &= m_1L(d + R)\sin\beta\dot{\beta}^2 - 2m_1L(d + R)\dot{\beta}\dot{\theta}\sin\beta, \\ E4 &= m_1L(d + R)\sin\beta\dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (9)$$

이 시스템의 운동방정식은 비선형 관계임을 볼 수 있다. 대부분의 연구들은 이를 선형화시키고 있으나, 본 연구에서는 선형화 과정없이 명확하게 주어진 구속조건을 만족하는 운동을 결정할 것이다.

### 3.2 구속식

이 시스템의 거동은 바퀴가 지표면과 접촉하는 점에서 속도의 각 성분이 0이 되도록 순수하게 구르는 조건과 바퀴가 미끄러짐을 막기위한 속도 성분이 0임을 고려하여 다음과 같은 5개의 nonholonomic 구속조건을 얻을 수 있다.

$$\sin(\theta - \beta)\dot{x} + \cos(\theta - \beta)\dot{y} - L\sin\beta\dot{\theta} + R\dot{\phi}_1 = 0 \quad (10)$$

$$-\sin\theta\dot{x} - \cos\theta\dot{y} + L\dot{\theta} + R\dot{\phi}_2 = 0 \quad (11)$$

$$\sin\theta\dot{x} - \cos\theta\dot{y} + L\dot{\theta} + R\dot{\phi}_3 = 0 \quad (12)$$

$$\cos\theta\dot{x} + \sin\theta\dot{y} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & -\text{Cos}(\beta - \theta)\dot{x} + \text{Sin}((\beta - \theta)\dot{y} \\
 & + (d + L\text{Sin}\beta)\dot{\theta} + d\dot{\beta}_1 = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

위의 구속식들은 적분이 불가능하나 미분이 가능한 nonholonomic 구속식들이다. 구속된 시스템의 운동방정식(5)를 사용하기 위하여 위의 구속식들을 시간에 관해 한 번 미분을 취하면 식(4)의 형태로 표현되며 각 계수 행렬들은 다음과 같다.

$$A^T = \begin{bmatrix} \text{Sin}(\theta - \beta) & -\text{Sin}\theta & \text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta & -\text{Cos}(\beta - \theta) \\ -\text{Cos}(\theta - \beta) & \text{Cos}\theta & -\text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta & \text{Sin}(\beta - \theta) \\ -L\text{Sin}\beta & L & L & 0 & d + L\text{Sin}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$b = \begin{bmatrix} (\beta - \theta)\dot{x}\text{Cos}(\theta - \beta) + (\beta - \theta)\dot{y}\text{Sin}(\theta - \beta) + L\dot{\beta}\theta\text{Cos}\beta \\ \dot{\theta}\dot{x}\text{Cos}\theta + \dot{\theta}\dot{y}\text{Sin}\theta \\ -\dot{\theta}\dot{x}\text{Cos}\theta - \dot{\theta}\dot{y}\text{Sin}\theta \\ \dot{\theta}\dot{x}\text{Sin}\theta - \dot{\theta}\dot{y}\text{Cos}\theta \\ (\theta - \beta)\dot{x}\text{Sin}(\beta - \theta) + (\theta - \beta)\dot{y}\text{Cos}(\beta - \theta) - L\dot{\beta}\theta\text{Cos}\beta \end{bmatrix} \tag{16}$$

자유운동방정식과 위의 식(15)와 (16)의 계수행렬을 구속된 운동방정식(5)에 사용하면 이 시스템의 운동을 묘사할 수 있는 2차 미분방정식을 얻을 수 있다.

한편 이 시스템의 점O가 곡선  $y=x^3$ 의 기울기를 따라 움직일 수 있도록 뒷바퀴의 회전을 구속하고 싶다고 가정하면 다음과 같은 구속식이 추가될 것이다.

$$\beta - \theta = 3X^2 \tag{17}$$

이는 holonomic 구속식으로 앞선 5개의 nonholonomic 구속식과 구속식(17)을 시간에 관해 두 번 미분을 취하여 식(4)의 형태로 표현이 가능하다.

### 3.3 수치해석

운동방정식을 적절한 적분에 의한 수치해석을 행하기 위해 시스템의 각 물성치로 다음을 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 L=5, R=2, d=3, m_1=m_2=m_3=1, \\
 I_1=I_2=I_3=2.
 \end{aligned} \tag{18}$$

또한 초기조건으로 구속식을 만족하는 값들을 선정하였다.

$$\begin{aligned}
 x=0.2954, y=0.0258, \theta=\pi/4, \beta=\pi/3, \\
 \phi_1=\phi_2=\phi_3=0, \\
 \dot{x}=-1.5145, \dot{y}=-\dot{x}, \dot{\theta}=0.6, \\
 \dot{\beta}=-2.0843, \dot{\phi}_1=1.8345, \dot{\phi}_2=-2.5709, \\
 \dot{\phi}_3=-0.4291
 \end{aligned} \tag{19}$$

위의 값들을 사용하여 소프트웨어인 MATLAB의 ODE45(Runge-Kutta법)에 의해 수치적분이 행해졌다. 이때 tolerance는  $10^{-6}$ 으로 설정하였으며 초기부터 10초동안의 운동을 결정하였다.

### 3.4 수치결과의 고찰

Fig. 2는 각 바퀴의 질량 중심의 거동을 보인다. 추가적인 구속식의 유무에 따라 그 거동을 달리함을 볼 수 있다. (a)는 시간과 뒷바퀴의 전환에 따라 각 바퀴들이 위치들이 결정되며 거의 비슷한 거동을 보임을 알 수 있다. (b)는 추가적인 구속조건(17)에 의해 시간이 증가함에 따라 기울기가 증가함으로 거의 직진하는 경향을 나타낸다.

Fig. 3은 구속식(17)의 유무에 따른 시간과  $(\beta - \theta)$ 의 관

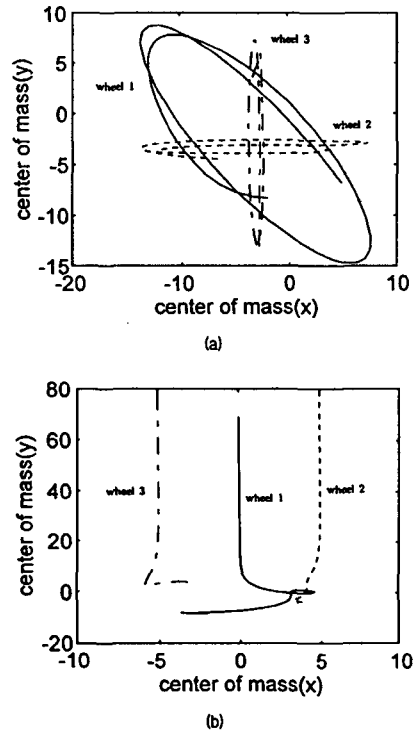


Fig. 2 Motion of center of mass of wheels (a) without (b) with the additional constraint

계를 보인다. 추가식으로 인하여 결과를 달리함을 알 수 있으며 특히 추가조건에서 알 수 있듯이  $\beta$ 와  $\theta$ 가 거의 같아짐을 볼 수 있다.

구속된 시스템의 경우 주어진 구속조건을 만족하기위해 구속력이 작용한다. Fig. 4는 로봇의  $\beta$ 방향에 작용하는 구속력을 보인다. 이 역시 추가적인 구속조건에 의해 구속력이 다름을 볼 수 있다. 특히 (a)와 (b)를 비교할 때, 추가적인 구속조건에 의해 이를 만족하기위해서 초기에 커다란 구속력이 작용함을 볼 수 있으며, 이후로는 작은 구속력이 작용함을 알 수 있다.

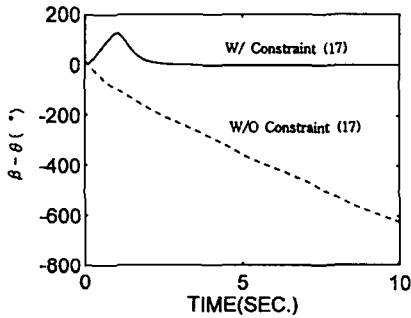


Fig. 3 Transition of  $(\beta-\theta)$  component of the wheeled robot

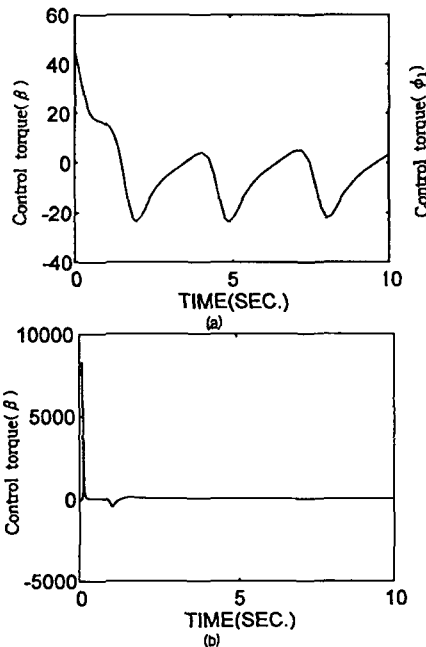


Fig. 4 Constraint force of the  $\beta$ -component of the robot (a) without (b) with the additional constraint

Fig. 5는 방향에 작용하는 구속력을 보인다. 이 역시 추가적인 구속조건에 의해 그 추이를 달리하고 있으며, 추가조건에 의해 초기에 커다란 구속력이 작용함을 볼 수 있다.

앞서 행해진 수치해석들을 검증하는 방법으로 구속조건을 만족여부로 판단할 수 있다. 즉, 구속조건은 모든 시간에 관해 만족하여야 한다. 구속조건 (12)와 (17)의 만족의 정도(ERROR)를 다음과 같이 정의하였다.

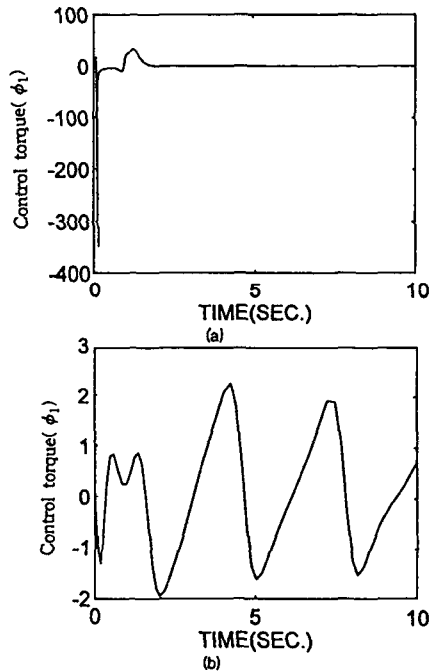


Fig. 5 Constraint force of the  $\phi_1$ -component of the robot (a) without (b) with the additional constraint

$$\varepsilon_1 = \text{Sin}\theta\dot{x} - \text{Cos}\theta\dot{y} + L\dot{\theta} + R\dot{\phi}_3 \quad (20)$$

$$\varepsilon_2 = \beta - \theta - 3x^2 \quad (21)$$

Fig. 6은 구속조건을 만족하지 않는 오차를 보이고 있다. 이들 오차는  $10^{-5}$ 정도를 보이고 있으나 이를 tolerance이하로 줄이는 방법이 필요하다. 이는 구속된 시스템의 운동방정식의 계수인 식(4)이외에 구속식 자체를 운동방정식에 사용함으로써 줄일 수 있을 것이며, 이에 대한 연구가 보다 필요하다.

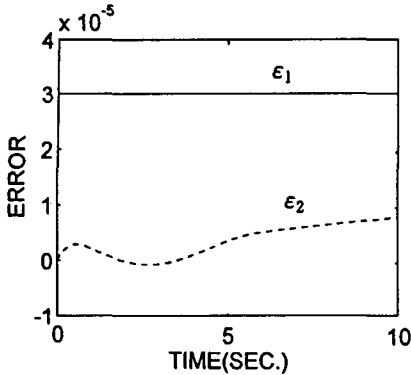


Fig. 6 Error in the satisfaction of the constraint (12) and (17)

4. 결 론

바퀴달린 로봇의 운동을 묘사하는 운동방정식은 비선형이며 nonholonomic 시스템으로 이에 대한 운동을 묘사하기란 상당한 어려움이 있다. 대부분의 연구에 의하면 비선형일 경우 이를 선형화하여 해석이 이루어지고 있다. 본 연구에서는 Generalized Inverse Method를 사용하여 어떠한 선형화 과정없이 로봇의 동적 거동을 고려하여 다음의 결과를 얻을 수 있었다.

nonholonomic 시스템인 바퀴달린 로봇의 거동과 구속력은 Generalized Inverse Method를 사용하여 주어진 구속식을 만족하며, 명확하고 용이하게 그 거동 및 구속력을 결정할 수 있었다. 또한 이 로봇에 추가적으로 원하는 바로 운동을 유도하기 위한 구속조건을 가할 경우에도 가해진 모든 조건을 만족하는 운동을 묘사할 수 있었다. 이 과정에서 비선형인 시스템에도 어떠한 선형화를 취할 필요가 없었다. 또한 자연에 의해 주어지는 구속력도 명확하게 산정할 수 있었으며 이를 인위적으로 가한다면 그 시스템은 주어진 구속조건을 따라 그 거동이 행해질 것이다. 단지, 수치해석이 행해지는 모든 시간에서도 구속조건을 만족하여야 하지만 해석 결과 불만족하는 오차가 발생하였으며 이는 시간이 증가함에 따라 증가한다. 이러한 오차를 감소시킴으로써 주어진 구속조건을 항상 만족시키기 위한 연구가 보다 필요하다.

5. 참고 문헌

1. Udwadia, F.E. and Kalaba, R.E., "A new Perspective on Constrained Motion", Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 439, pp. 407~410, 1992.
2. Moore, E.H., "On the reciprocal of the general algebraic matrix", Abstract, Bull. Am. Math. Soc. 26, pp. 394-395, 1920.
3. Eun, H.C., "On the Dynamics and Control of Constrained Mechanical & Structural Systems", Univ. of Southern California PhD. Thesis., 1995.
4. 정 현수, 은 희창, 곽 노현, "구속된 구조물의 운동에 관한 연구", 대한건축학회 논문 집, 제 13권 제 2호, pp. 159~167, 1997.
5. Yao B., Gao W.B., Chan S.P., and Cheng M., "VSC Coordinated Control of Two Manipulator Arms in the Presence of Environmental Constraints", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 37, No. 11, pp. 1806-1811, Nov. 1992.
6. McClamroch, N.H. and Wang, D., "Feedback Stabilization and Tracking of Constrained Robots", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 33, No. 5, pp. 419-426, May 1988.
7. Bloch, A.M., Reyhanoglu, M., and McClamroch, N.H., "Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 37, No. 11, pp. 1746-1757, Nov. 1992.
8. B. d'Andrea-Novell, G. Bastin, G. Campion, "Dynamic Feedback Linearization of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots", Proceedings of the 1992 IEEE, International Conference on Robotics and Automation, pp. 2527-2532, 1992.