

구조화된 불확실성을 갖는 하드 비선형 시스템에 대한 강인한 다변수 비선형 제어

한 성 익*, 김 종 식**

Robust Nonlinear Multivariable Control for the Hard Nonlinear System with Structured Uncertainty

Seong-Ik Han*, Jong-Shik Kim**

ABSTRACT

We propose the robust nonlinear controller design methodology for the multivariable system which has hard nonlinearities (Coulomb friction, dead-zone, etc) and the structured real parameter uncertainty. The hard nonlinearity can be linearized by the RIDF technique and structured real parameter uncertainty can be modelled as the sense of Peterson-Hollot's quadratic Lyapunov bound. For this system, we apply the robust QLQG/ H_∞ control and then can obtain four Riccati equations. Because of the system's nonlinearity, however, one Riccati equation contains the nonlinear correction term that is very difficult to solve numerically. In order to treat this problem, using some transformations to Riccati equations, the nonlinear correction term can be eliminated. Then, only two Riccati equations need to design a controller. Finally, the robust nonlinear controller is synthesized via IRIDF techniques. To test this proposed control method, we consider the direct-drive robot manipulator system that has Coulomb frictions and varying inertia.

Key Words : Hard Nonlinearity(하드 비선형), RIDF(랜덤입력기술함수), LQG/ H_∞ , QLQG/ H_∞ , Structured Parameter Uncertainty(구조화된 파라미터 불확실성), Robot Manipulator(로봇 매니플레이터)

기호설명

$R, R^{r \times s}, R^r$	실수, $r \times s$ 실수행렬, $R^{r \times 1}$ 실수 벡터
S^n, N^n, P^n	대칭(symmetric), 양의 반한정(nonnegative definite), 양의한정(positive definite)행렬
$d, d_\infty, n, m, l, n_c, p, q, q_\infty$	양의 정수 ; \tilde{n}

* 순천제일대학 제어제측과
 ** 부산대학교 기계공학부

$x(t) \in R^n, x_c(t) \in R^{n_c}, u(t) \in R^m, y(t) \in R^l$	시스템 상태 벡터, 제어기 상태벡터, 제어입력 벡터, 출력벡터
$w_1(t) \in R^d, w_2(t) \in R^d$	비상관된 백색잡음 외란벡터 및 센서잡음벡터
$w_{1\infty}(t) \in R^{d_{\infty}}, w_{2\infty}(t) \in R^{d_{\infty}}$	비상관된 확정적 외란벡터 및 센서잡음벡터
$z_1(t) \in R^q, z_2(t) \in R^q$	오차벡터
$\tilde{x}(t), \tilde{w}(t), \tilde{w}_{\infty}(t), \tilde{z}(t)$	$[x(t) \ x_c(t)]^T, [w_1(t) \ w_2(t)]^T, [w_{1\infty}(t) \ w_{2\infty}(t)]^T, [z_1(t) \ z_2(t)]^T$
$f(x(t)) \in R^n$	구조화된 불확실성을 포함한 비선형 동적 벡터
$N(\sigma_i) \in R^{n \times n}, B \in R^{m \times n}, C \in R^{l \times n}$	시스템행렬, 입력행렬, 출력행렬
$\Delta N \in R^{n \times n}, \Delta B \in R^{m \times n}$	불확실성을 나타내는 행렬
$\tilde{N}, \Delta \tilde{N}$	$\begin{bmatrix} N(\sigma_{xi}) & BG \\ HC & N_c(\sigma_{xci}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Delta N & \Delta BG \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$N_c(\sigma_{xci}) \in R^{n_c \times n_c}$	제어기 시스템행렬
$H(\sigma_{xci}) \in R^{n_c \times l}, G(\sigma_{xci}) \in R^{m \times n_c}$	필터 게인행렬, 제어 게인 행렬
$\sigma_{xi}, \sigma_{xci}$	시스템 및 제어기의 상태 표준편차
$D_1 \in R^{n \times d}, D_2 \in R^{l \times d}$	백색잡음 외란 및 센서잡음에 대한 가중행렬
$D_{1\infty} \in R^{n \times d_{\infty}}, D_{2\infty} \in R^{l \times d_{\infty}}$	확정적 외란 및 센서잡음에 대한 가중행렬,
$E_1 \in R^{q \times n}, E_2 \in R^{q \times m}$	오차 가중행렬
$\tilde{D}, \tilde{D}_{\infty}, \tilde{E}$	$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & HD_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{1\infty} & 0 \\ 0 & HD_{2\infty} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2G \end{bmatrix}$
$\tilde{P}_{\Delta N} (= \lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{x}(t) \tilde{x}^T(t)])$	폐루프 시스템의 정상상태 공분산 (steady state covariance)행렬
\tilde{V}, V_1, V_2	$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & HV_2H^T \end{bmatrix}, D_1^T D_1, D_2^T D_2$
$\tilde{V}_{\infty}, V_{1\infty}, V_{2\infty}$	$\begin{bmatrix} V_{1\infty} & 0 \\ 0 & HV_{2\infty}H^T \end{bmatrix}, D_{1\infty} D_{1\infty}^T, D_{2\infty} D_{2\infty}^T = \beta^2 V_2$
\tilde{R}, R_1, R_2	$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & G^T R_2 G \end{bmatrix}, E_1^T E_1, E_2^T E_2$
r, β, E	음이 아닌 상수, 양의 상수, 기대치 연산자
$R (= \lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)r^T(t)])$	기준입력에 대한 가상된 백색잡음(white noise input)의 강도(intensity)

1. 서 론

선형 다변수 시스템에 대한 제어기법은 1960년대 이래로 LQG, LQG/LTR, H_∞ 등의 조직적인 제어기법들이

등장했고 계속 발전을 거듭하고 있다. 그러나 비선형 시스템에 대한 다변수 제어는 충분한 연속성을 갖는 시스템의 경우는 Taylor 급수 전개를 통해 선형화 하거나 여러 가지 근사적인 방법이 있으나 쿨롱마찰, 사역대, 백래쉬

같은 불연속을 갖는 하드 비선형의 경우 Taylor 급수전개를 할 수 없으므로 입력신호의 특성에 따라 준선형화(quasi-linearization) 기법⁽¹⁾인 SIDF(sinusoidal input describing function) 기법이나 RIDF(random input describing function) 기법을 이용하여 선형화된 시스템에 대해 제어기 설계를 시도한다.

Sinusoidal 입력에 대한 SIDF 기법보다 더 일반적인 RIDF 기법을 이용한 다변수 제어기법으로서 Beaman⁽²⁾이 NQG(non-linear quadratic Gaussian) 제어기법을 연구하였으나 대수 리카티(Riccati) 방정식에 나타나는 비선형 보정항(nonlinear correction term)이 나타나는 문제로 실용성이 제한되었다. 이러한 문제에 대해 루프전달회복(loop transfer recovery) 기법을 도입하여 비선형 보정항을 소거하는 QLQG/LTR(quasi-linear quadratic Gaussian/loop transfer recovery) 제어기법을 Kim⁽³⁾이 연구하였고 서보시스템이나 수중운동체의 하드 비선형 시스템에 적용하여 좋은 결과들을 얻을 수 있었다^(4,5,6). 이러한 제어기법들은 LQG(H_2) 최적제어에 기반을 둔 것이며 Han^(7,12)이 H_∞ 최적 제어로 확장하여 Bernstein과 Haddad⁽⁸⁾가 연구한 LQG/ H_∞ 제어기법을 도입하여 QLQG/ H_∞ /LTR 제어기법을 연구하였다. Kim과 Han이 비선형 보정항을 소거하기 위해 루프전달회복 기법을 도입하였으나 본 연구에서는 이러한 루프전달회복 기법이 불필요한 단순한 대수적인 변환을 통해 문제가 되는 비선형 보정항을 소거됨을 보이기로 한다.

또한 이러한 하드 비선형 뿐만 아니라 시스템의 구조화된 불확실성(structured uncertainty)을 갖는 경우를 고려하기로 한다. 시스템의 파라미터의 구조화된 변동에 대해 2차형식 리아프노프안정성(quadratic Lyapunov stability)을 보장하는 Petersen-Hollot 한계(bound)^(9,10)를 이용하는 강인 제어기법을 도입한다. 그 중에서도 상태공간에서 시스템 행렬과 입력행렬에서 구조화된 불확실성을 갖는 경우로 한정한다. 따라서 제안한 제어기법은 하드 비선형과 시간역에서의 불확실성을 동시에 취급할 수 있다. 제안한 제어기법을 관성이 변하고 쿨롱마찰(Coulomb friction)을 갖는 직접구동 로봇 매니플레이터의 제어기 설계를 통해 효율성을 보이기로 한다.

본 논문은 2장에서 구조화된 불확실성에 대한 강인한 QLQG/ H_∞ 제어, 3장에서 비선형 보정항 소거를 위한 리카티 방정식 변환, 최종적으로 4장에서 설계 예를 제시하는 순서로 구성하기로 한다.

2. 구조화된 불확실성에 대한 강인한 QLQG/ H_∞ 제어

2.1 H_∞ 구속조건을 갖는 강인한 QLQG 제어

다음과 같이 구조화된 불확실성을 포함하는 하드 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x(t)) + (B + \Delta B)u(t) + D_1 w_1(t) + D_{1\infty} w_{1\infty}(t) \quad (1)$$

여기서 $f(x(t))$ 는 구조화된 시스템 불확실성을 포함한 비선형 동적벡터, $w_1(t)$ 는 LQG 최적제어 관점에서의 외란입력, $w_{1\infty}(t)$ 는 H_∞ 최적제어 관점에서의 외란입력을 나타낸다. 시스템의 하드 비선형은 대칭이고, 불기억(memoryless), 단가(single-valued)이고 시스템에 충분한 저주파 통과 필터링이 존재한다고 가정하면 하드 비선형 시스템은 RIDF 기법에 의해 준선형화할 수 있다. 시스템 외란 및 센서에 대한 가중(weighting)과 시스템의 상태변수 및 제어입력에 대한 가중을 포함한 통계학적으로 선형화된(statistically-linearized) n 차의 안정가능(stabilizable)하고 검출가능(detectable)한 플랜트와 오차(weighted errors)행렬들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (N(\sigma_x) + \Delta N(\sigma_x))x(t) + (B + \Delta B)u(t) \\ &\quad + D_1 w_1(t) + D_{1\infty} w_{1\infty}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_2 w_2(t) + D_{2\infty} w_{2\infty}(t) \\ z_1(t) &= E_1 x(t), \quad z_2(t) = E_2 u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ΔN 와 ΔB 는 시스템 섭동(perturbation), $w_{1i}(t)$ 는 플랜트 외란입력, $w_{2i}(t)$ 는 센서잡음입력, $z_1(t)$ 는 평가된 상태출력, $z_2(t)$ 는 평가된 제어입력을 각각 나타낸다. n_c 차의 제어기의 동적방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= N_c(\sigma_c)x_c(t) + Hy(t) \\ u(t) &= Gx_c(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 N_c, H, G 는 제어기 동적행렬, 필터게인행렬, 제어게인행렬을 각각 나타낸다.

제어기를 포함한 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{N} + \Delta\tilde{N})\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{w}(t) + \tilde{D}_\infty\tilde{w}_\infty(t) \quad (4)$$

$\tilde{w}_\infty(t)$ 와 $\tilde{z}(t)$ 와 사이의 페루프 전달함수행렬 $H_\Delta(s)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_\Delta(s) = \tilde{E}(sI_{\tilde{n}} - (\tilde{N} + \Delta\tilde{N}))^{-1} \tilde{D}_\infty \quad (5)$$

통계학적으로 선형화된 시스템에 대해 강인 제어문제는 다음의 설계조건을 만족시키는 비선형 제어기 파라미터 (N_c, H, G) 를 결정하는 것이다.

1) 시스템 파라미터 불확실성을 표현하는 임의의 집합을 U 로 두면 모든 $(\Delta N, \Delta B) \in U$ 에 대해 (4)의 페루프 시스템이 점근적으로 안정 (asymptotically stable).

2) (5)의 $\tilde{w}_\infty(t)$ 와 $\tilde{z}(t)$ 사이의 페루프 전달함수행렬 $H_\Delta(s) \in R^{q \times d_\infty}$ 가 다음의 구속조건을 만족.

$$\|H_\Delta(s)\|_\infty \leq \gamma, (\Delta N, \Delta B) \in U \quad (6)$$

3) 성능가역함수

$$J(N_c, H, G) = \sup_{(\Delta N, \Delta B) \in U} \lim_{t \rightarrow \infty} E[x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)] \quad (7)$$

를 최소화.

4) 하드 비선형 특성에 대해 시스템의 안정도와 성능이 강인성을 유지.

2.2 QLQG와 H_∞ 구속조건

제어기 (N_c, H, G) 가 주어질 때 만일 $(\tilde{N} + \Delta\tilde{N})$ 이 모

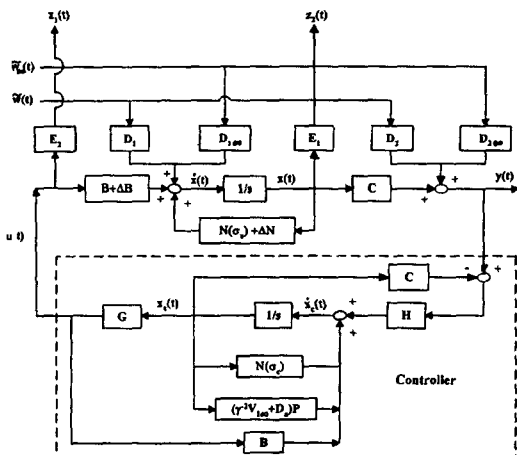


Fig. 2.1 Block diagram of the robust QLQG/ H_∞ control system

든 $(\Delta N, \Delta B) \in U$ 에 대해 점근적으로 안정하면 (7)의 가역함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J(N_c, H, G) = \sup_{(\Delta N, \Delta B) \in U} \text{tr} \tilde{P}_{\Delta\tilde{N}} \tilde{V} \quad (8)$$

$\tilde{P}_{\Delta\tilde{N}} (= \lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)])$ 은 다음의 $\tilde{n} \times \tilde{n}$ 대수 공분산 리아프노프 방정식을 만족한다.

$$(\tilde{N} + \Delta\tilde{N})^T \tilde{P}_{\Delta\tilde{N}} + \tilde{P}_{\Delta\tilde{N}} (\tilde{N} + \Delta\tilde{N}) + \tilde{R} = 0 \quad (9)$$

강인한 안정도-성능을 보장하기 위한 중요한 시도는 (9)의 공분산 Lyapunov 방정식에 포함된 불확실성을 임의의 한계치 함수 $\hat{\Omega}$ 로 대체하는 것이다. 또한 모든 $(\Delta N, \Delta B) \in U$ 에 대해 (6)의 외란억제에 대한 H_∞ 구속조건은 (9)를 페루프 상태 공분산에 대한 대수 리카티 방정식으로 대체함으로써 이루어진다.

보조정리 2.1 $\hat{\Omega}: R^{m \times n_c} \times N^{\tilde{n}} \rightarrow S^{\tilde{n}}$ 이 다음을 만족하고

$$\tilde{N}^T P + P \tilde{N} \leq \hat{\Omega}(G, P); (\Delta N, \Delta B) \in U \quad (10)$$

주어진 (N_c, H, G) 에 대해 다음을 만족하는 $P \in N^{\tilde{n}}$ 가 존재한다고 가정할 때

$$\tilde{N}^T P + P \tilde{N} + \gamma^{-2} P \tilde{V}_\infty P + \hat{\Omega}(G, P) + \tilde{R} = 0 \quad (11)$$

$(\Delta N, \Delta B) \in U$ 에 대해 $(\tilde{N} + \Delta\tilde{N})$ 가 점근적으로 안정하기만 한다면

$$([\tilde{R} + \gamma^{-2} P \tilde{V}_\infty P + \hat{\Omega}(G, P) - (\Delta\tilde{N}^T P + P \Delta\tilde{N})]^{1/2}, \tilde{N} + \Delta\tilde{N}) \quad (12)$$

은 검출가능하다. 이러한 경우

$$\|H_\Delta(s)\|_\infty \leq \gamma, (\Delta N, \Delta B) \in U \quad (13)$$

$$\text{그리고, } \tilde{P}_{\Delta\tilde{N}} \leq P, (\Delta N, \Delta B) \in U \quad (14)$$

여기서 $\tilde{P}_{\Delta\tilde{N}}$ 은 (9)의 해이다. 결과적으로 다음이 성립한다.

$$J(N_c, H, G) \leq J(N_c, H, G, P) = \text{tr} P \tilde{V} \quad (15)$$

증명: 참고문헌 (11, 12) 참조.

2.3 불확실성의 구조

불확실성 집합 $(\Delta N, \Delta B) \in U$ 를 다음과 같은 형태로 가정한다.

$$U = \{ (\Delta N, \Delta B) \in R^{n \times n} \times R^{n \times m}; \quad (16)$$

$$\Delta N = \sum_{i=1}^p F_i M_i N_i G_i,$$

$$\Delta B = \left\{ \sum_{i=1}^p F_i M_i N_i H_i, M_i M_i^T \leq \bar{M}_i, N_i N_i^T \leq \bar{N}_i \right\}$$

여기서, $i = 1, \dots, p$ 일 때

$F_i \in R^{n \times r_i}$, $G_i \in R^{i \times n}$, $H_i \in R^{i \times m}$ 는 각각 구조화된 불확실성을 나타내는 고정행렬, $\bar{M}_i \in R^{r_i}$, $\bar{N}_i \in R^{i}$ 는 주어진 불확실성에 대한 한계이고 $\bar{M}_i, \bar{N}_i = I$, $M_i \in R^{r_i \times r_i}$, $N_i \in R^{i \times i}$ 는 각각 한계 \bar{M}_i, \bar{N}_i 에 종속되는 불확실성 행렬.

그리고 불확실성의 페루프 행렬 구조는 다음의 형태로 된다.

$$\Delta \tilde{N} = \sum_{i=1}^p \tilde{F}_i M_i N_i \tilde{G}_i, \quad \tilde{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_i = [G_i \ H_i G].$$

다음으로 불확실성 집합 U 가 주어졌을 때 (10)을 만족하는 Peterson-Hollot 2차형식 리아프노프 한계 $\hat{\Omega}(G, P)$ 를 구하기로 한다.

정리 2.1: 함수

$$\hat{\Omega}(G, P) = \sum_{i=1}^p (\tilde{G}_i^T \bar{N}_i \tilde{G}_i + P \tilde{F}_i \bar{M}_i \tilde{F}_i^T P) + \tilde{R} = 0 \quad (17)$$

는 (16)에 의해 주어진 U 와 함께 (10)을 만족한다.

증명: 참고문헌 (9, 10) 참조.

(17)로 표현되는 $\hat{\Omega}(G, P)$ 에 대해 페루프 시스템에 대한 리카티 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} & \tilde{N}^T P + P \tilde{N} + \gamma^{-2} P \tilde{V} P \\ & + \sum_{i=1}^p (\tilde{G}_i^T \bar{N}_i \tilde{G}_i + P \tilde{F}_i \bar{M}_i \tilde{F}_i^T P) + \tilde{R} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

2.4 보조 최소화문제와 리카티 방정식 유도

보조정리 2.1의 결과에서 리아프노프 방정식을 리카티 방정식으로 대체함으로써 H_∞ 외란 구속조건이 만족되며 LQG 성능함수의 상한치가 유도됨을 보였다. 주어진 비선형 보상기 (N_c, H, G) 에 대해 (11)을 만족시키는 양의 반한정 해가 존재한다면 LQG 성능함수 $J(N_c, H, G)$ 의 상한치는 $J(N_c, H, G, P)$ 를 넘지 않는다. 그러므로 $J(N_c, H, G, P)$ 는 다음의 최적화 문제에 대한 보조가역함수로 간주할 수 있다.

보조 최적화문제 : $P \in N^{\tilde{n}}$ 와 함께 (18)에 종속된

$$J(N_c, H, G, P) = \text{tr} P \tilde{V} \quad (19)$$

를 최소화시키는 (N_c, H, G, P) 를 결정하는 것이다. 즉, (18)의 구속조건을 갖는 (19)를 최적화하는 문제이므로 Lagrangian을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} & L(N_c, H, G, P) \\ & = \text{tr} \{ P \tilde{V} + [\tilde{N}^T P + P \tilde{N} + \gamma^{-2} P \tilde{V} P \\ & + \sum_{i=1}^p (\tilde{G}_i^T \bar{N}_i \tilde{G}_i + P \tilde{F}_i \bar{M}_i \tilde{F}_i^T P) + \tilde{R}] Q \} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

행렬 $P \in R^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ 와 $Q \in R^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ 는 각각 다음의 $n \times n$, $n \times n_c$, $n_c \times n_c$ 의 부분블록(subblock)행렬들로 나눌 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P} + \hat{P} & \hat{P} \\ \hat{P} & \hat{P} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q} + \hat{Q} & -\hat{Q} \\ -\hat{Q} & \hat{Q} \end{bmatrix}$$

그리고 임의의 \bar{P} 에 대해 다음을 정의한다.

$$P_a = B^T \bar{P} + \sum_{i=1}^p H_i^T \bar{N}_i G_i, \quad D_a = \sum_{i=1}^p F_i \bar{M}_i F_i^T,$$

$$R_{2a} = R_2 + \sum_{i=1}^p H_i^T \bar{N}_i H_i, \quad E_a = \sum_{i=1}^p G_i^T \bar{N}_i G_i,$$

정리 2.2 : $\bar{P}, \hat{P}, \bar{Q}, \hat{Q}$ 가 존재하고

$$N^T \bar{P} + \bar{P} N + \gamma^{-2} \bar{P} V_{1\infty} \bar{P} + R_1 + \bar{P} D_a \bar{P} + E_a - P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & (N - \hat{S} \bar{Q} \bar{S} + [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] \bar{P})^T \hat{P} + \hat{P} (N - \hat{S} \bar{Q} \bar{S} + [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] \bar{P}) \\ & + \hat{P} (\gamma^{-2} [V_{1\infty} + \beta^2 \hat{S} \bar{Q} \bar{S} \hat{S}^T] + D_a) \hat{P} + P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & (N + [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] (\bar{P} + \hat{P})) \bar{Q} + \bar{Q} (N + [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] (\bar{P} + \hat{P}))^T + V_1 \\ & - \hat{S} \bar{Q} \bar{S} \hat{S}^T + \Psi(\bar{Q}, \hat{Q}, \bar{P}, N) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (N - B R_{2a}^{-1} P_a + [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] \bar{P})^T \hat{Q} + \hat{Q} (N - B R_{2a}^{-1} P_a + [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] \bar{P}) \\ & + \hat{S} \bar{Q} \bar{S} \hat{S}^T + \Phi(\hat{Q}, \hat{P}, N) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

또한 제어기(N_c, H, G)는

$$\begin{aligned} N_c &= N - \hat{S} \bar{Q} \bar{\Sigma} - BR_{2a}^{-1} P_a + [\gamma^{-2} V_{1a} + D_a] \bar{P} \\ H &= \hat{S} \bar{Q} C^T V_2^{-1}, \quad G = -R_{2a}^{-1} P_a \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $\hat{S} = (I_n + \gamma^{-2} \beta^2 \bar{Q} \hat{P})^{-1}$, $\bar{\Sigma} = C^T V_2^{-1} C$

$$\begin{aligned} \psi(\bar{Q}, \bar{P}, \hat{P}, N) &= 2 \operatorname{tr}[(\bar{Q} + \hat{Q}) \frac{\partial \hat{N}}{\partial (\bar{P} + \hat{P})} (\bar{P} + \hat{P}) - 2 \operatorname{tr}[\hat{Q} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{P}} \hat{P}]] \\ \phi(\hat{Q}, \hat{P}, N) &= 2 \operatorname{tr}[\hat{Q} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{P}} \hat{P}]. \end{aligned}$$

로 주어지면 $\tilde{N} + \Delta \tilde{N}$ 이 모든 $(\Delta N, \Delta B) \in U$ 에 대해 점근적으로 안정할 때 $(\tilde{E}, \tilde{N} + \Delta \tilde{N})$ 는 검출가능하다. 이 경우 페루프 전달함수행렬 $H_\Delta(s)$ 는 H_∞ 외란억제에 대한 구속조건

$$\|H_\Delta(s)\|_\infty \leq \gamma, \quad (\Delta N, \Delta B) \in U$$

를 만족시키며 (15)는 다음과 같이 된다.

$$J(N_c, H, G, P) = \operatorname{tr}[(\bar{Q} + \hat{Q}) R_1 + \hat{Q} \hat{S}^T P \bar{\Sigma} \hat{S} \hat{Q}] \quad (26)$$

증명 : 참고문헌 (8, 12) 참조.

여기서 제어기 설계에 필요한 필터 계인과 제어 계인을 구하려면 연성된(coupled) 4개의 리카티 방정식을 풀어야 하는데 시스템의 하드 비선형으로 인해 (23), (24)에 비선형 보정항 $\psi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ 가 존재한다. 그러나 (24)는 제어기 설계시 직접 필요한 식이 아니고 (24)의 해 \hat{Q} 가 음이 아닌 한정행렬이면 최적화 문제에 영향이 없으므로⁽¹²⁾ 수식 전개를 간단하기 위해 이에 연관된 식과 기호는 앞으로는 생략하기로 한다. 시스템에 포함된 하드 비선형은 입력의 통계학적 특성(표준편차)에 의해 선형화시키지만 입력의 표준편차를 알 수 없으므로 가정된 랜덤 입력의 강도(intensity)에 따른 표준편차와 각각의 제어기 설계 후 계산된 표준편차의 오차를 비교하여 어떤 값 $\epsilon(\ll 0)$ 이내로 수렴할 때까지 설계를 반복 수행하여 필요한 비선형 제어기 파라미터를 구한다. 이 과정에서 페루프 시스템에 대한 리카티 방정식 (18)과 (21), (22), (23)을 동시에 풀어야 한다. 그러나 (23)에 포함된 비선형 보정항 $\psi(\cdot)$ 는 수치적으로 매우 해를 구하기 어렵기 때문에^(2,3) 이러한 비선형 보정항이 소거되는 조건을 구하면 문제를 간단하게 해결할 수 있다^(3,7). 이 연구에서 루프전달회복 조건이 만족되면 비선형 보정항이 소거됨을 증명하였으나 루프전달회복을 적용하기가 어려운 수식형태이거나 또는 비최소위상 시스템이 경우에 간단한 대수적인 조작을 통해 이러한 문제가 해결됨을 3장에서 보이기로 한다.

3. 비선형 보정항 소거를 위한 리카티 방정식의 변환

Berntein과 Haddad⁽⁶⁾는 선형 시스템에 대해 본 연구에서 도입한 여러 가지 변환을 통해 3개의 연성된 리카티 방정식이 2개로 줄어들음을 보였다. 그런데 본 연구에서 이러한 변환이 통계학적으로 선형화된 시스템의 제어기 설계과정에서 비선형 보정항이 소거됨을 알아내었다. 이러한 과정을 다음의 2가지 단계를 거쳐 보이려고 한다. 얻어진 결과는 2가지형태로 나타난다.

3.1 제 1 단계

3.1.1 첫 번째 형태

보조정리 3.1: $\bar{Q}, \hat{P} \in N^n$ 에 대해 $\hat{Z} = \hat{S} \bar{Q}$ 로 정의하면, $\hat{Z} = \hat{Z}^T = \bar{Q} \hat{S}^T$ 로 된다.

여기서, $\hat{S} = (I_n + \gamma^{-2} \beta^2 \bar{Q} \hat{P})^{-1}$, $\hat{Z} \in N^n$. 만일 \bar{Q} 가 양의 한정이면, \hat{Z} 는 양의 한정이고

$$\hat{Z} = (\bar{Q}^{-1} + \gamma^{-2} \beta^2 \hat{P})^{-1} \quad (27)$$

증명은 간단하므로 생략한다.

정리 3.1: $\hat{P} \in N^n$ 로 두고 $\hat{Z} = \hat{S} \bar{Q}$, 와 (27)에 대해 (22), (23)을 만족하는 $\hat{P} \in N^n$ 와 $\bar{Q} \in R^n$ 이 존재한다면 (21), (22), (23), (25)는 다음과 같이 변환된다.

$$N^T \bar{P} + \bar{P} N + \gamma^{-2} \bar{P} V_{1a} \bar{P} + R_1 + \bar{P} D_a \bar{P} + E_a - P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (N - \hat{Z} \bar{\Sigma} + [\gamma^{-2} V_{1a} + D_a] \bar{P})^T \hat{P} + \hat{P} (N - \hat{Z} + [\gamma^{-2} V_{1a} + D_a] \bar{P}) \\ + \hat{P} (\gamma^{-2} [V_{1a} + \beta^2 \hat{Z} \bar{\Sigma} \hat{Z}^T] + D_a) \hat{P} + P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (N + [\gamma^{-2} V_{1a} + D_a] \bar{P} + [\gamma^{-2} V_{1a} + \gamma^{-2} \beta^2 V_1 + D_a] \hat{P}) \hat{Z} + \hat{Z} (N + \gamma^{-2} V_{1a} \\ + D_a) \bar{P} + [\gamma^{-2} V_{1a} - \gamma^{-2} \beta^2 V_1 + D_a] \hat{P} + V_1 - \hat{Z} (\bar{\Sigma} + \gamma^{-2} \beta^2 \hat{P} [\gamma^{-2} V_{1a} \\ + D_a - \gamma^{-2} \beta^2 V_1] \hat{P}) \hat{Z} + \gamma^{-2} \beta^2 \hat{Z} P_a^T R_{2a}^{-1} P_a \hat{Z} + \gamma^{-2} \beta^2 \hat{Z} P_a^T R_{2a}^{-1} P_a \hat{Z} \\ + (I_n - \gamma^{-2} \beta^2 \hat{Z} \hat{P}) \psi(\bar{Q}, \bar{P}, \hat{P}, N) (I_n - \gamma^{-2} \beta^2 \hat{Z} \hat{P}) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

또한 제어기(N_c, H, G)는

$$\begin{aligned} N_c &= N - \hat{Z} \bar{\Sigma} - BR_{2a}^{-1} P_a + [\gamma^{-2} V_{1a} + D_a] \bar{P} \\ H &= \hat{Z} C^T V_2^{-1}, \quad G = -R_{2a}^{-1} P_a \end{aligned} \quad (31)$$

증명 : (8, 12) 참조.

3.1.2 두 번째 형태

보조정리 3.2: 새로운 변수 \hat{Y} 를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{Y} = (\hat{Z}^{-1} + \gamma^{-2}\beta^2\bar{P})^{-1} = (\bar{Q}^{-1} + \gamma^{-2}\beta^2[\bar{P} + \hat{P}])^{-1} \quad (32)$$

만일 \bar{Q} 가 양의 한정이면 보조정리 3.1로부터 \hat{Y} 도 또한 양의 한정이다.

정리 3.2 : $\bar{P} \in N^n$ 와 (32)에서 정의된 \hat{Y} 와 함께 (22), (23)을 만족하는 $\hat{P} \in N^n$ 와 $\bar{Q} \in P^n$ 이 존재한다면 (21), (22), (23), (25)는 다음과 같이 변환된다.

$$N^T\bar{P} + \bar{P}N + \gamma^{-2}\bar{P}V_{1\infty}\bar{P} + R_1 + \bar{P}D_a\bar{P} + E_a - P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \quad (33)$$

$$(N - [\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]\bar{\Sigma} + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})^T \hat{P} + \hat{P}(N - [\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]\bar{\Sigma} + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P}) + \hat{P}(\gamma^{-2}[V_{1\infty} + \beta^2[\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]\bar{\Sigma} + [\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}] + D_a)\hat{P} + P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \quad (34)$$

$$(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} - \gamma^{-2}\beta^2V_1 + D_a][\bar{P} + \hat{P}])\hat{Y} + \hat{Y}(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} - \gamma^{-2}\beta^2V_1 + D_a][\bar{P} + \hat{P}])^T + V_1 + \gamma^{-2}\beta^2\hat{Y}(R_1 + E_a)\hat{Y} - \hat{Y}\bar{\Sigma}\hat{Y} - \gamma^{-2}\beta^2\hat{Y}([\bar{P} + \hat{P}][\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a - \gamma^{-2}\beta^2V_1][\bar{P} + \hat{P}])\hat{Y} + (I_n - \gamma^{-2}\beta^2\hat{Y}[\bar{P} + \hat{P}])\psi(\bar{Q}, \bar{P}, \hat{P}, N)(I_n - \gamma^{-2}\beta^2[\bar{P} + \hat{P}])\hat{Y} = 0 \quad (35)$$

또한 제어기 (N_c, H, G) 는

$$N_c = N - (\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P})^{-1}\bar{\Sigma} - BR_{2a}^{-1}P_a + (\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a)\bar{P}(\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P})^{-1} \\ H = (\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P})^{-1}C^T V_2^{-1}, \quad G = -R_{2a}^{-1}P_a \quad (36)$$

증명: (8, 12) 참조.

3.2 제 2 단계

제 1단계에서 변환된 결과에 대해 LQG와 H_∞ 제어에 대한 가중을 동일하게 하여 제2단계 변환을 수행하기로 한다. 즉,

$$V_{1\infty} = V_1, \quad \beta = 1 \quad (37)$$

3.2.1 첫 번째 형태

$$\hat{P} = \gamma^2\hat{Z}^{-1} \text{로 두면 } \hat{Z} = \hat{Z}_\infty \quad (38)$$

정리 3.3 : (37)의 가정 하에 다음을 만족시키는 $\bar{P} \in N^n$ 와 $\hat{Z}_\infty \in P^n$ 이 존재한다.

$$N^T\bar{P} + \bar{P}N + \gamma^{-2}\bar{P}V_{1\infty}\bar{P} + R_1 + \bar{P}D_a\bar{P} + E_a - P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \quad (39)$$

$$(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})\hat{Z}_\infty + \hat{Z}_\infty(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})^T + \hat{Z}_\infty(\gamma^{-2}P_a^T R_{2a}^{-1} P_a - \bar{\Sigma})\hat{Z}_\infty + V_{1\infty} + \gamma^2 D_a = 0 \quad (40)$$

또한 제어기 (N_c, H, G) 는

$$N_c = N - \hat{Z}_\infty\bar{\Sigma} - BR_{2a}^{-1}P_a + (\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a)\bar{P} \\ H = \hat{Z}_\infty C^T V_2^{-1}, \quad G = -R_{2a}^{-1}P_a \quad (41)$$

증명 : I) (29)식의 좌측에 $\gamma^{-2}\hat{Z}_\infty$ 를, 우측에 \hat{Z}_∞ 를 곱하면

$$\gamma^{-2}\hat{Z}_\infty(29) \hat{Z}_\infty \\ = (N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})\hat{Z}_\infty + \hat{Z}_\infty(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})^T + \hat{Z}_\infty(\gamma^{-2}P_a^T R_{2a}^{-1} P_a - \bar{\Sigma})\hat{Z}_\infty + V_{1\infty} + \gamma^2 D_a = 0 \quad (42)$$

II) (30)에 (38)을 대입하면

$$(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P} + [\gamma^{-2}V_{1\infty} - \gamma^{-2}\beta^2V_1 + D_a]\gamma^2\hat{Z}_\infty^{-1})\hat{Z}_\infty \\ + \hat{Z}_\infty(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P} + [\gamma^{-2}V_{1\infty} - \gamma^{-2}\beta^2V_1 + D_a]\gamma^2\hat{Z}_\infty^{-1})^T \\ + V_{1\infty} - \hat{Z}_\infty([\bar{\Sigma} + \gamma^{-2}\gamma^2\hat{Z}_\infty^{-1}][\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a - \gamma^{-2}V_{1\infty}]\gamma^2\hat{Z}_\infty^{-1})\hat{Z}_\infty \\ + (I_n - \gamma^{-2}\gamma^2\hat{Z}_\infty\hat{Z}_\infty^{-1})\psi(\cdot)(I_n - \gamma^{-2}\gamma^2\hat{Z}_\infty\hat{Z}_\infty^{-1}) = 0 \quad (43)$$

(43)의 마지막 항을 살펴보면 비선형 보정항이 소거됨을 알 수 있다. (43)를 다시 정리하면 (42)와 동일한 형태로 되어 (40)의 한 개의 방정식으로 줄어든다.

3.2.2 두 번째 형태

$$\hat{P} = \gamma^2\hat{Y}^{-1} - \bar{P} \text{로 두면 } \hat{Y} = \hat{Y}_\infty \quad (44)$$

정리 3.4 : (37)의 가정 하에 다음을 만족시키는 $\bar{P} \in N^n$ 와 $\hat{Y}_\infty \in P^n$ 이 존재한다.

$$N^T\bar{P} + \bar{P}N + \gamma^{-2}\bar{P}V_{1\infty}\bar{P} + R_1 + \bar{P}D_a\bar{P} + E_a - P_a^T R_{2a}^{-1} P_a = 0 \quad (45)$$

$$\hat{Y}_\infty N^T + N\hat{Y}_\infty + \hat{Y}_\infty(\gamma^{-2}[R_1 + E_a])\hat{Y}_\infty + \gamma D_a + V_{1\infty} = 0 \quad (46)$$

또한 제어기 (N_c, H, G)는

$$N_c = N - (\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P})^{-1}\bar{\Sigma} - BR_{2a}^{-1}P_a \quad (47)$$

$$+ (\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a)\bar{P}(\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P})^{-1}$$

$$H = (\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P})^{-1}C^T V_2^{-1}, \quad G = -R_{2a}^{-1}P_a$$

증명 : I) (44)을 (35)에 대입하면

$$(N - [\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]\bar{\Sigma} + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})^T \gamma^2(\hat{Y}_\infty^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P})$$

$$+ \gamma^2(\hat{Y}_\infty^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P})(N - [\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]\bar{\Sigma} + [\gamma^{-2}V_{1\infty} + D_a]\bar{P})$$

$$+ \gamma^2(\hat{Y}_\infty^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P})(\gamma^{-2}[V_{1\infty} + \beta^2[\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]\bar{\Sigma}][\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}\beta^2\bar{P}]$$

$$+ D_a)\gamma^2(\hat{Y}_\infty^{-1} - \gamma^{-2}\bar{P}) + P_a^T R_{2a}^{-1}P_a = 0 \quad (48)$$

정리하면,

$$\gamma^2 N^T \hat{Y}_\infty^{-1} + \gamma^2 \hat{Y}_\infty^{-1} N + \gamma^2 \bar{\Sigma} + \gamma^2 \hat{Y}_\infty^{-1} [\gamma^{-2} V_{1\infty} + D_a] \gamma^2 \hat{Y}_\infty^{-1}$$

$$+ R_1 + E_a = 0 \quad (49)$$

(49)의 좌우 측에 각각 $\gamma^{-2}\hat{Y}_\infty$, \hat{Y}_∞ 를 곱하면 (46)를 얻을 수 있다.

II) (44)를 (35)에 대입하면

$$(N + [\gamma^{-2}V_{1\infty} - \gamma^{-2}\beta^2V_{1\infty} + D_a]\gamma^{-2}\hat{Y}_\infty^{-1})\hat{Y}_\infty + V_{1\infty}[R_1 + E_a]\hat{Y}_\infty$$

$$- \hat{Y}_\infty \bar{\Sigma} \hat{Y}_\infty - \gamma^{-2}\beta^2\hat{Y}_\infty([\bar{P} + \hat{P}][\gamma^{-2}V_{1\infty} + D - \gamma^{-2}\beta^2V_{1\infty}][\bar{P} + \hat{P}]\hat{Y}_\infty$$

$$+ (I_n - \gamma^{-2}\gamma^2\hat{Y}_\infty^{-1})\psi(\cdot)(I_n - \gamma^{-2}\gamma^2\hat{Y}_\infty^{-1}) = 0 \quad (50)$$

(50)의 마지막 항을 살펴보면 마찬가지로 비선형 보정항이 소거됨을 알 수 있다. (50)을 정리하면 (49)와 동일하게 되어 (46)를 얻을 수 있다.

이러한 결과들을 살펴보면 연성된 3개의 리카티 방정식이 선형 시스템의 경우처럼 2개로 줄어들어 반복적으로 리카티 방정식의 해를 구하는 과정이 생략되어 수치적 계산이 간편해지고 또한 동시에 비선형 보정항이 소거되는 중요한 사실이 입증되었다. 비선형 보상기 합성에 대한 절차는 참고문헌 (7, 12, 14, 15)를 참조한다.

4. 설계 예

4.1 시스템 특성 및 설계사양

제안한 기법에 대한 성능과 효율성을 보이기 위해 쿨롱

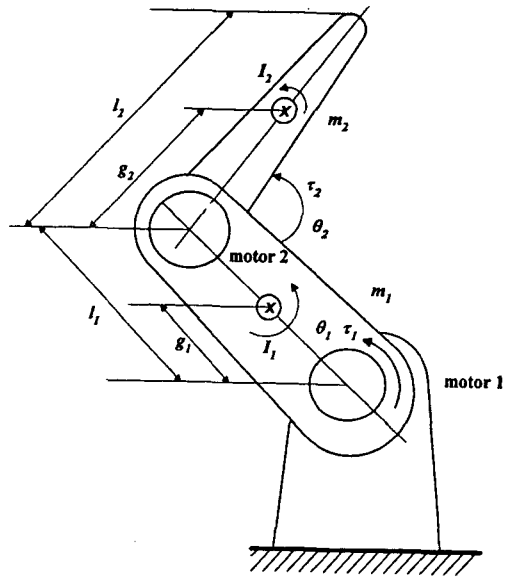


Fig. 4.1 A schematic diagram of a 2 D.O.F. direct-drive manipulator

마찰과 관성특성이 변하는 직접구동 2축 로봇 매니퓰레이터를 설계 예로 선정하였다⁽⁹⁾. 로봇에 대한 계략도는 그림 4.1과 같다.

θ_i 와 τ_i 는 i 번째 모터의 각도와 토크를 나타낸다. 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$H_{ii}\ddot{\theta}_i + \sum_{j \neq i} H_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial H_{ij}}{\partial \theta_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \theta_j} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k$$

$$+ \tau_{gi} + \tau_{ci} = \tau_i \quad i = 1, 2 \quad (51)$$

여기서 H_{ij} 는 모터 축과 연관된 로봇 팔 관성 텐서의 i, j 요소이다. (51)의 좌변의 1번째 항은 팔의 형상에 따르는 관성 토크, 2번째 항은 상승 관성 토크, 3번째 항은 원심력 및 Coriolis 효과에 기인하는 비선형 속도 토크, 4번째 항은 중력 토크, 5번째 항은 쿨롱마찰 토크를 나타낸다. 그림 4.1의 직접구동 로봇은 다음의 관성 텐서를 갖는다.

$$H_{11} = I_1 + m_1 g_1^2 + I_2 + m_2 (l_1^2 + g_2^2 + 2l_1 g_2 \cos(\theta_2)) \quad (52)$$

$$H_{22} = I_2 + m_2 g_2^2, \quad H_{12} = H_{21} = I_2 + m_2 g_2^2 - m_2 l_1 g_2 \cos(\theta_2)$$

각 링크의 크기와 질량특성은 다음의 표 4.1에 제시되어 있다.

Table. 4.1 Dimensions and mass properties of links

링크 번호	길이 l_i (m)	질량 m_i (kg)	관성모멘트 J_i (kgm^2)	모터중심에서 질량중심 간 편심거리 g_i (m)
1	0.65	7	1.6675	0.1
2	0.4	5	0.15	0.08

링크의 질량이 모터질량에 비해 무시 할만하면, $g_2 = 0$ 이고 관성 텐서가 시불변이 되며 비선형 속도 토크는 무시할 수 있다. 또한 중력 토크는 복잡성을 피하기 위해 무시한다. 이러한 가정하에 시스템 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (53)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{J_1}(\tau_{c1}(x_2) + \frac{H_{12}}{H_{22}}\tau_{c2}(x_4) + u_1 - \frac{H_{12}}{H_{22}}u_2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{J_2}(\frac{H_{21}}{H_{11}}\tau_{c1}(x_2) + \tau_{c2}(x_4) + \frac{H_{21}}{H_{11}}u_1 - u_2)$$

여기서,

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2], [u_1, u_2] = [\tau_1, \tau_2],$$

$$J_1 = H_{11} - \frac{H_{12}^2}{H_{22}}, J_2 = H_{22} - \frac{H_{21}^2}{H_{11}},$$

$$H_{11} = 4kgm^2, H_{12} = H_{21} = H_{22} = 0.15kgm^2.$$

(53)의 비선형 시스템을 불확실성을 포함하지 않은 통계학적으로 선형화된 상태공간 공칭모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = N(\sigma_x)x(t) + Bu(t) + D_{1\infty}w_{1\infty}(t) \quad (54)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_{2\infty}w_{2\infty}(t)$$

$$z_1(t) = E_1x(t), z_2(t) = E_2u(t)$$

여기서

$$N(\sigma_x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2597N_1 & 0 & 0.2597N_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2597N_1 & 0 & -6.9264N_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2597 & -0.2597 \\ 0 & 0 \\ -0.2597 & 6.9264 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \frac{T_{C1}\sqrt{(2/\pi)}}{\sigma_{x2}}, N_2 = \frac{T_{C2}\sqrt{(2/\pi)}}{\sigma_{x4}}.$$

N_1 과 N_2 는 각각 쿨롱마찰 τ_{c1} 과 τ_{c2} 에 대한 기술함수 제인이고, σ_{x2} 와 σ_{x4} 는 각각 상태변수 x_2 와 x_4 에 대한 표준편차이며 쿨롱마찰 토크 T_{c1} 과 T_{c2} 는 모두 0.1 Nm 이다. 설계사양은 다음과 같다; 1) 임의의 일정한 입력에 대해 정상상태 오차가 0 일 것. 2) 시스템의 하드 비선형에 대한 시간응답 성능이 강인할 것. 3) 2번째 링크의 관성모멘트 J_2 가 공칭값에서 최대 $1kgm^2$ 까지 변할 때 시간응답이 과도한 오버슈트(overshoot)없이(20%이내) 빠르게 1초 이내에 정상상태에 도달할 것.

4.2 선형 시스템에 대한 LQG/ H_∞ 시스템 설계

시스템의 쿨롱마찰을 무시한 선형 시스템의 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_{1\infty}w_{1\infty}(t) \quad (55)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_{2\infty}w(t)$$

$$z_1(t) = E_1x(t), z_2(t) = E_2u(t)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2597 & 0 & 0.2597 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2597 & 0 & -6.9264 \end{bmatrix},$$

$$D_{1\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{2\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.09 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_{1\infty} = D_{1\infty}D_{1\infty}^T, V_{2\infty} = D_{2\infty}D_{2\infty}^T,$$

$$R_1 = E_1^T E_1, R_2 = E_2^T E_2 \times 0.1, \gamma = 1.2$$

이러한 설계변수에 대해 설계한 선형 공칭시스템에 대한 루프 전달함수행렬의 특이값 선도는 그림 4.2에 나타

나고 선정된 제어 게인(control gain)과 필터 게인(filter gain) 행렬은 다음과 같다.

$$G = \begin{bmatrix} 2849.9 & 152.1 & -1376.3 & 22.9 \\ 15.4 & 2.13 & 31.7 & 2.23 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1000.1 & 0 & 0.023 & 0 \\ 0.023 & 0 & 1000.1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

그리고 그림 4.3은 계단입력에 대한 시간응답을 나타낸다.

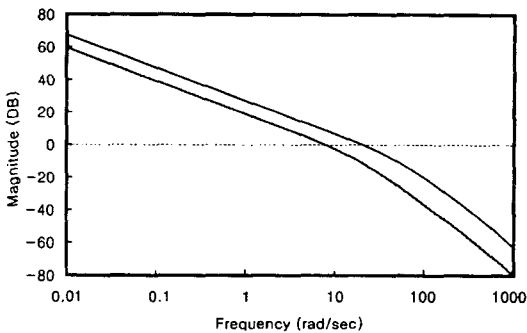


Fig. 4.2 Singular values of the loop TFM for the LQG/H_∞ control system

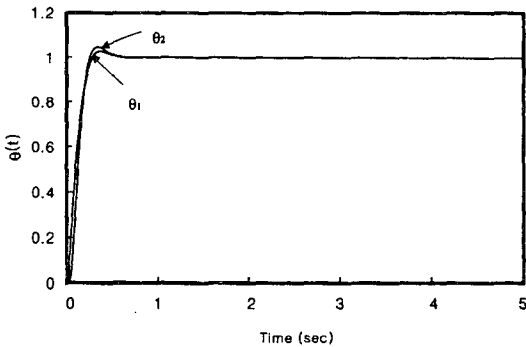


Fig. 4.3 Step response of the nominal LQG/H_∞ control system ; [1, 1]^T input direction

이러한 결과에서 주어진 입력에 대해 클롱마찰과 시스템 파라미터의 변동이 없는 경우에 대한 선형시스템에 대한 LQG/H_∞ 제어시스템은 만족한 성능을 나타내고 있다.

그러나 시스템에 클롱마찰이 존재하는 경우 비선형 플랜트와 LQG/H_∞ 제어기를 결합한 제어시스템에 대한 루프 전달함수의 특이값 선도와 시간응답은 그림 4.4 ~ 4.5 에 나타낸다.

그림 4.4에서 가상 입력의 강도에 따라 시스템의 클롱

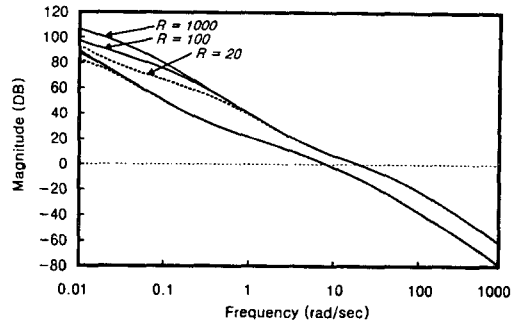


Fig. 4.4 Singular values of the loop TFM for the LQG/H_∞ controller with nonlinear plant

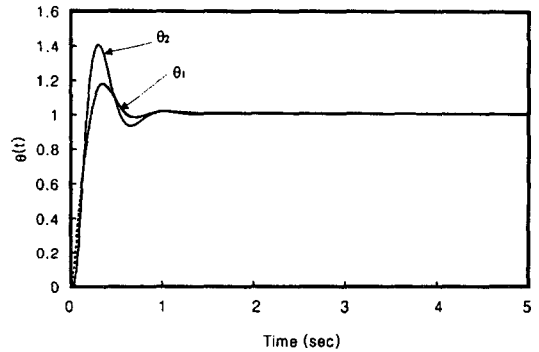


Fig. 4.5 Step responses of the nominal LQG/H_∞ controller with nonlinear plant ; [1, 1]^T input direction

마찰 비선형을 고려하지 않고 설계한 제어시스템은 루프 전달함수의 특이값이 변하고 있으며 그림 4.5에서는 클롱마찰의 영향으로 과도한 오버슈트가 발생하고 있다. 또한 로봇 링크의 관성모멘트 I_2 가 1 kgm^2 까지 변할 때 오버슈트가 더욱 증가하고 정착시간이 길어짐을 그림 4.6에서 알 수 있다.

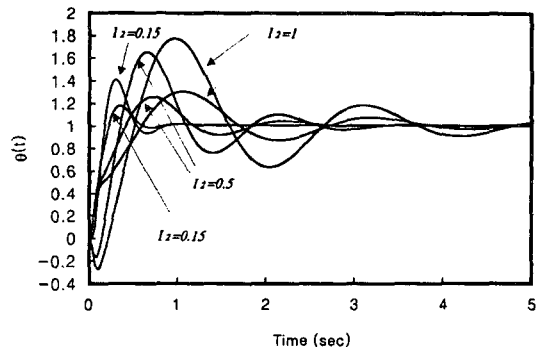


Fig. 4.6 Step responses of the LQG/H_∞ controller with nonlinear perturbed plant ;[1, 1]^T input direction

그래서 이러한 문제들을 해결하기 위해 제안한 제어기법 중에서 첫 번째 형태를 적용하여 응답성능을 개선하기로 한다.

4.3 비선형 시스템에 대한 QLQG/H_∞ 시스템 설계

쿨롱마찰을 고려한 비선형 시스템에 대한 상태공간 모델은 (54)에 제시되어 있다. 먼저 시스템 파라미터의 변동이 없는 공칭모델에 대한 제어시스템을 설계하여 성능을 평가하기로 한다. 쿨롱마찰에 대한 기술함수의 입력의 표준편차는 알 수 없으므로 먼저 가상된 백색잡음 입력의 강도 R을 각각 표준편차에 대한 오차와 주어진 리카티 방정식의 해가 수렴하도록 일정한 작동 범위를 찾는다. 이때 선정된 작동범위에 따른 계산된 기술함수 게인 그리고 표준편차는 표 4.2에 나타나 있다. 여기서 σ_{xc2} 와 σ_{xc4} 는 각각 제어기의 상태변수 $x_{c2}(t)$ 와 $x_{c4}(t)$ 에 대한 표준편차이다. 그리고

Table 4.2 DF gains and standard deviations at all assumed operating points

R	1000	500	100	50	30	20
N_1	4.334×10^{-4}	8.678×10^{-4}	4.383×10^{-3}	8.882×10^{-3}	1.508×10^{-2}	2.318×10^{-2}
N_2	7.321×10^{-3}	1.469×10^{-2}	7.540×10^{-2}	1.559×10^{-1}	2.716×10^{-1}	4.310×10^{-1}
σ_{xc2}	184.119	91.946	18.204	8.983	5.291	3.442
σ_{xc4}	10.899	5.432	1.058	0.512	0.294	0.185

제어기에 구현할 비선형 함수를 구하기 위해서는 표 4.2의 기술함수와 표준편차의 관계를 역기술함수법 (inverse random input describing function technique)^{(14),(15)}을 이용하여 구한다. 이때 구현된 비선형 함수는 그림 4.7과 같다.

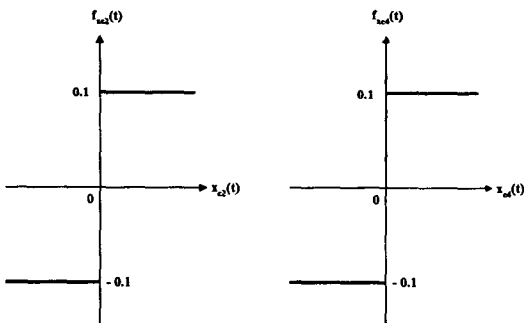


Fig. 4.7 Desired nonlinear function via IRIDF techniques

그리고 제어 게인과 필터 게인은 비선형 특성을 나타내지 않고 입력강도 R에 대해 거의 일정하게 나타났으며 R= 50일 때 제어 게인과 필터 게인은 다음과 같다

$$G = \begin{bmatrix} 2580.9 & 133.2 & -1831.2 & 49.3 \\ 20.5 & 2.55 & 28.8 & 2.73 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1000.05 & 0 & 0.242 & 0 \\ 0.242 & 0 & 1000.05 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

그림 4.8은 비선형 함수를 구현한 QLQG/H_∞ 제어시스템의 루프전달함수에 대한 특이값 선도이며 그림 4.9는 시간응답을 나타내고 있다.

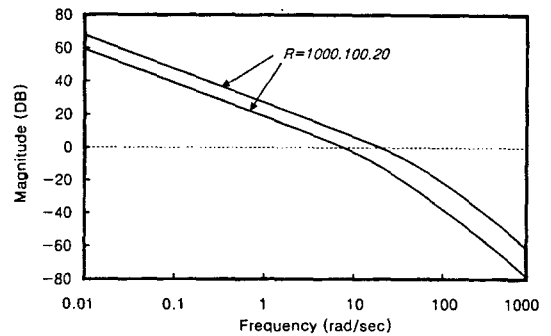


Fig. 4.8 Singular values of the loop TFM for the QLQG/H_∞ control system

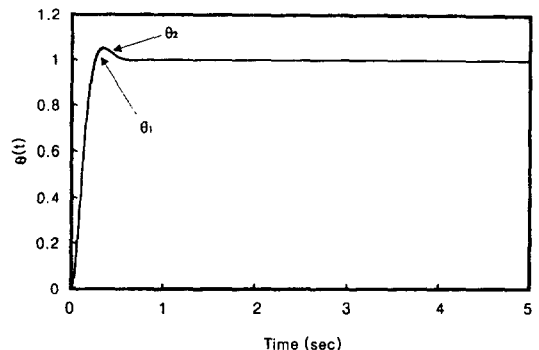


Fig. 4.9 Step response of the nominal QLQG/H_∞ control system ; [1, 1]^Tinput direction

위의 결과에서 쿨롱마찰을 고려한 QLQG/H_∞ 제어시스템은 비선형에 강한 성능을 유지하고 있음을 알 수 있다. 그러나 로봇 링크의 관성모멘트 I_2 가 1 kgm²까지 변

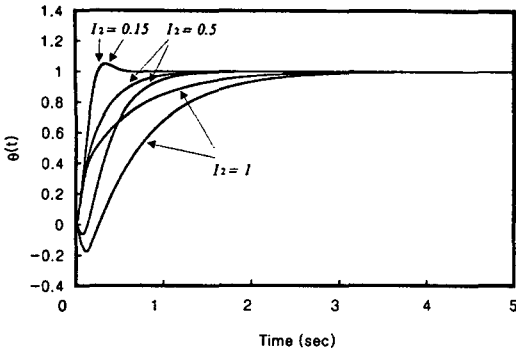


Fig. 4.10 Step responses of the QLQG/H_∞ controller with perturbed nonlinear plant; [1, 1]^T input direction

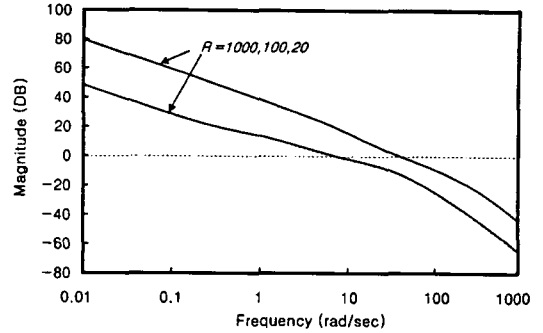


Fig. 4.11 Singular values of the loop TFM of the robust QLQG/H_∞ control system

할 때 QLQG/H_∞ 제어시스템은 언더슈트가 증가하고 정착시간이 매우 길어짐을 그림 4.10에서 알 수 있다.

그래서 비선형 특성에 의해서 시스템 파라미터의 변동에 대한 강인한 제어를 설계하기 위해 최종적으로 제안한 강인한 QLQG/H_∞ 제어기법을 이용하여 제어기를 설계하기로 한다.

4.4 불확실성과 비선형을 고려한 강인한 QLQG/H_∞ 시스템 설계

플랜트의 비선형 쿨롱마찰과 로봇 링크의 관성모멘트 I_2 가 공칭값 0.15 kgm²에서 최대 1kgm²까지 변동할 때를 고려한 상태방정식은 다음과 같다. 나머지 상태방정식과 설계변수들은 전자의 경우와 동일하다.

$$\dot{x}(t) = (N(\sigma_x) + \Delta N)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_{1\infty}w_{1\infty}(t) \quad (56)$$

여기서,

$$\Delta N(\sigma_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.667N_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5.667 \end{bmatrix}$$

주어진 파라미터 변동에 대한 각 행렬과 설계변수는 다음과 같이 정하였다.

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.667 \end{bmatrix}^T, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_1 = 310.$$

이러한 설계변수들을 고려한 강인한 QLQG/H_∞ 제어시스템에 대한 루프전달함수 행렬에 대한 특이값선도는 다음과 같다.

선정한 작동범위에 따른 계산된 기술함수 계인 그리고 표준편차는 표 4.3에 나타나 있다.

Table 4.3 DF gains and standard deviations at all assumed operating points

R	1000	500	100	50	30	20
N_1	1.4043	1.4037	1.3992	1.3936	1.3861	1.3759
N_2	3.1139	3.1123	3.0997	3.0840	3.0635	3.0381
σ_{z2}	0.05681	0.05684	0.05721	0.05725	0.07569	0.05795
σ_{z4}	0.02562	0.02563	0.02574	0.02587	0.02604	0.02626

그리고 제어 계인과 필터 계인은 비선형 특성을 나타내지 않고 입력강도 R에 대해 거의 일정하게 나타났으며 R= 50일 때 제어 계인과 필터 계인은 아래와 같다. 그리고 제어기에 구현할 비선형 함수는 표 4.3에서 기술함수와 표준편차의 관계를 역기술함수법을 이용하여 구한다. 이 때 구현된

$$G = \begin{bmatrix} 2952.4 & 224.6 & -1150.4 & 31.16 \\ 21.54 & 8.41 & 51.47 & 7.60 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1000.19 & 75.73 & 2.57 & 2661.5 \\ 2.57 & 689.7 & 1192.3 & 202587.9 \end{bmatrix}^T$$

비선형 함수는 그림 4.7과 동일하게 계산되었다. 그리고 로봇 링크의 관성모멘트 I_2 가 공칭값 0.15 kgm²에서 최대 1 kgm²까지의 변동할 때 그림 4.12의 시간응답을 살

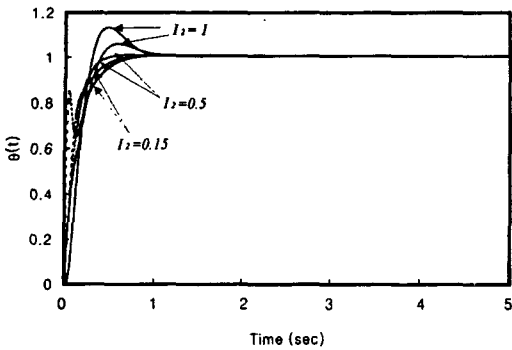


Fig. 4.12 Step responses of the robust QLQG/H_∞ controller with perturbed nonlinear plant; [1, 1]^T input direction

퍼보먼 최대 변동값 1kgm^2 에서 오버슈트가 약간 증가하고 빨리 정착하고 있다. 다만 I_2 의 공칭값인 0.15kgm^2 일 때 응답이 상승하는 구간에서 다소 성능이 떨어지는 점이 있다. 결과적으로 비선형과 불확실성을 동시에 고려하여 설계한 제안된 QLQG/H_∞ 제어시스템은 전자들의 경우보다 성능이 양호하게 개선됨을 보이고 있다.

5. 결 론

하드 비선형의 불연속적인 특성으로 인한 비선형 다변수 제어기 설계문제와 또한 시간역에서의 구조화된 파라미터 불확실성 문제를 고려할 수 있는 제어기법을 제안하였다. 선형 다변수 시스템에서 이미 알려진 강인성을 고려할 수 있는 LQG/H_∞ 제어기법을 응용하여 일정한 조건과 일반적인 가정 하에서 비선형 제어기 설계시의 문제점을 해소함으로써 구조화된 불확실성에 대한 강인성과 하드 비선형을 동시에 고려하여 제어시스템을 설계할 수 있음을 보였다. 제안된 강인한 QLQG/H_∞ 제어기법을 각 회전축에서 클러마찰이 존재하는 다변수 로봇 매니퓰레이터의 제어기 설계에 응용하여 효용성을 보였다. 제안된 제어기법은 제어기 구동시스템인 유체펌프에 존재하는 사역대, 기어의 백래쉬같은 다른 하드 비선형 다변수 시스템에도 적용할 수 있다고 본다. 이러한 사실은 다른 비선형 다변수 시스템에 대한 제어기 설계기법인 QLQG/LTR⁽⁶⁾, QLQG/H_∞/LTR⁽⁷⁾ 제어기법에 대한 설계 예를 살펴보면 예상할 수 있다.

그러나 이러한 하드 비선형에 대한 RIDF기법은 원래 근사시키는 과정에서 오차의 H₂ 노름(norm) 최소화하는

관점에서 기술함수를 구성하기 때문에 H_∞ 노름 구속조건이 포함되는 경우 통계학적 변수를 구하는 과정에서 페루프 시스템에 대한 리카티 방정식의 해를 구할 때 입력 설계변수 선정이 다소 어렵다는 문제점이 있다. 그래서 제어 게인이나 필터 게인이 각 작동점에서 변하는 경우 이에 대한 비선형 함수를 찾는 데 어려움이 나타난다. 그러나 준선형화 방법이 근사적인 방법이므로 페루프 시스템에 대한 리카티 방정식의 해가 존재하고 통계학적 변수의 오차가 작동범위 내에서 수렴하는 경우 큰 무리없이 제어기를 설계 할 수 있다고 사료된다.

추후 이러한 문제점을 해결하기 위해 RIDF 기법보다 SIDF기법을 이용하여 준선형화를 시도한 경우에 대한 제어기 설계기법을 연구해야 하겠고 디지털 제어기법 개발과 실제 실험을 통해 제안한 기법을 적용해보는 것이 연구과제이다.

참 고 문 헌

1. Gelb A, and Vander Velde, W. E., Multiple-Input Describing Function and Nonlinear System Design, McGraw-Hill, 1968.
2. Beaman, J. J., "Non-linear Quadratic Gaussian Control," Int. J. of Control, Vol. 39, No. 2, pp. 343-361, 1984.
3. Kim, J. S., "Nonlinear Multivariable Control Using Statistical Linearization and Loop Transfer Recovery," Ph.D. Thesis, Dept. of Mech. Eng., M.I.T., 1987.
4. Kim, J. S., "QLQG/LTR Control for Hard Non-linear Multivariable Systems," Proc. Instn. Mech. Engrs., J. of Sys. and Cont. Eng., Vol. 208, pp. 177-187, 1994.
5. Kim, J. S., "Nonlinear Position Servo Design Using the QLQG/LTR Method," KSME, J., Vol. 3, No. 2, pp. 86-94, 1989.
6. 김종식, 한성익, "수중운동체를 위한 QLQG/LTR 심도 제어시스템 설계," 한국정밀공학회지, 제 10 권, 제 4호, pp. 118-127, 1989.
7. Han, S. I., and Kim, J. S., "H_∞- Constrained Quasi-Linear Quadratic Gaussian Control with Loop Transfer Recovery," KSME, Inter. J., Vol. 11, No. 3, pp. 255-

- 266, 1997.
8. Bernstein, D. S., and Haddad, W. M., "LQG Control with an H_∞ Performance Bound : A Riccati Equation Approach," IEEE, Trans. A. C., Vol. 34, No. 8, pp. 831-305, 1989.
 9. Petersen, I. R., and Holot, C. V., "A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear System," Automatica, Vol. 22, No. 4, pp. 397-411, 1986.
 10. Bernstein, D. S., and Haddad, W. M., "The Optimal Projection Equation with Pertersen - Holot Bound: Robust Stability and Performance Compensation via Fixed-Order Dynamic Compensation for Systems with Structured Real-Valued Parameter Uncertainty," IEEE, Trans. A. C., Vol. 33, No. 6, pp. 578-582, 1988.
 11. Bernstein, D. S., Haddad, W. M., and Madiwale, A. N., "Robust H_∞ Control Design for Systems with Structured Parameter Uncertainty," Proc. CDC, pp. 945-972, 1988.
 12. Han, S. I., "Robust Quasi-Linear Quadratic Gaussian Control with the H_∞ Performance Constraint," Ph.D. Thesis, Dept. of Mech. Design Eng., Pusan National Univ., 1995.
 13. Wonham, W. M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, New York: Springer-Verlag, 1979.
 14. Suzuki, A., and Hedrick, C. V., "Nonlinear Controller Design by An Inverse Random Input Describing Function Method," Proc. ACC, pp. 1236-1241, 1985.
 15. Atherton, D. P., "Inverse Random Input Describing Function," Eletron Lett., pp. 1236-1241, 1974.