

# 감쇠 요소를 포함하는 불균일 연속 보 구조물을 위한 엄밀한 모드 해석 방법

홍성욱\*, 김종욱\*\*, 박종혁\*\*\*

## A Method for Determining Exact Modal Parameters of Non-Uniform, Continuous Beam Structures with Damping Elements

Seong-Wook Hong\*, Jong-Wook Kim\*\*, and Jong-Heuck Park\*\*\*

### ABSTRACT

The present paper proposes a modal analysis procedure to obtain exact modal parameters (natural frequencies, damping ratios, eigenvectors) for general, non-uniform beam-like structures. The proposed method includes a derivation of the system dynamic matrix for a Timoshenko beam element. The proposed method provides not only exact modal parameters but also exact frequency response functions (FRFs) for general beam structures. A time domain analysis method is also proposed. Two examples are provided for validating and illustrating the proposed method. The first numerical example compares the proposed method with FEM. The second example deals with a non-uniform beam structure supported in joints with damping property. The numerical study proves that the proposed method is useful for the dynamic analysis of continuous systems consisting of beam-like structures.

**Key Words** : Continuous system(연속계), Modal parameters(모드 매개변수), Timoshenko beam element (티모셴코 보 요소), Frequency response function(주파수 응답 함수)

### 1. 서론

연속계에 대한 해석은 대상 물체에 대한 물리적 특성의 이해나 설계 또는 감도 해석 등에 유용하게 활용될 수 있음은 주지의 사실이다. 따라서 연속계 해석 결과를 근거로 하여 시스템의 특성을 이해하려는 많은 연구가 있어 왔다. 그러나 복잡한 형상과 경계조건을 가지는 대부분의 실제적인 계는 연속계의 해를 얻기가 쉽지 않다. 복잡한

계는 해석적인 과정을 통해 엄밀해를 구하기 보다 유한차유도로 이산화하여 동적 행렬을 얻은 후 이에 대한 수치해를 계산하고 있다. 컴퓨터의 발전과 더불어 계산의 정밀도나 효율성이 크게 개선되어 근사적 이산화 방법이 일반적인 구조 해석 등에 폭넓게 사용되고 있다.<sup>(1,2)</sup> 그러나 비록 컴퓨터의 발달에 따라 이산화 해법이 갖는 문제점들이 개선되어 오고는 있지만 정밀한 모델의 필요성이 더불어 커지면서 보다 개선된 모델링 방법의 개발에 관심이

\* 회원, 금오공과대학교 기계공학부

\*\* 금오공과대학교 대학원

\*\*\* 회원, 금오공과대학교 대학원

계속되어 왔다.<sup>(3-5)</sup> 특히, 수치적인 해법이 발전한다고 해도 일반적인 이산화 방법에서 구해진 수치는 엄밀해와 일치하지 않게 되므로 엄밀해를 이용한 해석이 필요한 경우에는 활용이 불가능하다는 문제점이 있다.

본 연구에서는 엄밀한 동적 요소를 이용하여 균일하지 않는 단면 형상을 가지며 감소요소까지 포함되는 연속 구조물에 대해 엄밀한 모드 해석을 수행할 수 있는 해법을 제시하였다. 먼저 회전관성 및 전단변형을 포함한 Timoshenko 보 요소의 운동방정식을 공간좌표에 관한 상태방정식 형태로 표현하였다. 그리고 시간에 대해 우선 라플라스 변환을 하여 얻어지는 라플라스 영역의 운동방정식을 다시 공간 좌표에 대하여 라플라스 변환을 적용한 후 단순화하여 이를 역변환하는 과정을 통해 엄밀한 동특성 행렬(System dynamic matrix)을 유도하였다. 이와 같이 얻어진 보에 대한 동특성 행렬과 보를 지지하거나 결합하는 결합부(Connecting elements) 및 집중 질량(Concentrated mass) 등에 대해서도 라플라스 영역의 운동방정식으로부터 얻어지는 동특성 행렬을 유도하여 전체 계의 모델링에 사용하였다. 실제 구조물의 모델링에서는 유한요소법과 마찬가지로 전체를 요소로 나누어 만들어지는 각 요소 행렬들을 합성하여 전체 동특성 행렬을 구성하였다. 요소를 나눌 때에는 균일한 부분을 길이나 폭 등에 상관없이 한 개의 요소로 처리함으로써 요소의 수를 크게 줄일 수 있을 것으로 기대된다.

이와 같은 과정을 통해 얻어진 구조물에 대한 동특성 행렬을 이용하면 엄밀한 모드 해석은 물론 주파수 영역 해석 등도 가능하게 된다. 시간응답 해석은 주파수 응답 함수의 푸리에 역변환에서 얻어지는 충격응답을 이용한 중합적분(Convolution Integral) 방법을 사용하는 간접적인 방법이 가능하다. 본 논문에서 제안한 응답식 유도 과정은 이와 유사한 특성을 갖는 여러 가지 연속체 응답식 유도에 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 본 논문에서 제안한 모델링 방법의 검증을 위해 먼저 단순 Timoshenko 보에 대해 제안한 방법과 유한요소법을 비교하였다. 또 다른 예제로서 제안한 방법의 유용성을 예시하기 위해 일반적인 다단 보 구조물에 대해 적용하였다. 제시된 예제에 대한 수치 해석 결과로부터 제안된 방법의 유용성을 확인할 수 있었다.

## 2. 일반적인 보 구조물의 모델링

### 2.1 보 요소의 모델링

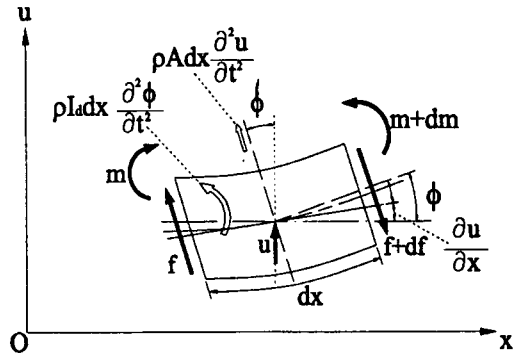


Fig. 1 Timoshenko beam model

Fig. 1과 같은 Timoshenko 보의 운동방정식을 보의 종축 좌표(x)에 대한 상태공간 형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{d\phi}{dx} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{df}{dx} &= -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{dm}{dx} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $u, \phi$ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고  $f, m$ 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또,  $\rho, G, E$ 는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영율(Young's modulus)를 의미하며,  $A$ 는 단면적,  $k$ 는 단면 형상 보정계수(Shape factor)로서 사각형 단면의 경우  $\frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$ 로 주어진다.<sup>(6)</sup> 또,  $I_d$ 는 직경 방향 단면 관성 모멘트(Diametral area moment of inertia)를 의미한다.

위 식을 시간에 대해 라플라스 변환하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = B \psi \quad (2)$$

여기서

$$\psi = \begin{pmatrix} u^* \\ \phi^* \\ f^* \\ m^* \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

단,

$$a = \rho I_d s^2, \quad b = \frac{1}{EI_d}, \quad c = \rho A s^2, \quad d = \frac{1}{kAG}$$

여기서  $s$ 는 시간에 관한 라플라스 변수이며 상첨자 \*는 해당 변수의 라플라스 변환 결과식을 의미한다. 한편 위에 기술된 네 개의 계수, 즉  $a, b, c, d$ 는 보의 요소 특성에 따라 Table 1과 같이 나타낼 수 있다.

Table 1 Coefficients for beam elements

Coefficient Type of beam	a	b	c	d
Euler-Bernoulli	0	$EI_d$	$\rho A s^2$	0
Rayleigh	$\rho I_d s^2$	$EI_d$	$\rho A s^2$	0
Timoshenko	$\rho I_d s^2$	$EI_d$	$\rho A s^2$	$\frac{1}{kAG}$

식(2)를 다시 공간 좌표  $x$ 에 관하여 라플라스 변환하면 다음 식과 같다.

$$\lambda \hat{\psi}(\lambda) - \psi(0) = B \hat{\psi}(\lambda)$$

또는

$$\hat{\psi}(\lambda) = [\lambda I - B]^{-1} \psi(0) \quad (3)$$

여기서,  $\lambda$ 는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며 ( $\sim$ )는 공간 좌표에 대해 라플라스 변환한 결과를 의미한다. 한편  $[\lambda I - B]^{-1}$ 는 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$[\lambda I - B]^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda(\lambda^2 - ab) & \lambda^2 & -[d(\lambda^2 - ab) - b] & b\lambda \\ -bc & \lambda(\lambda^2 - cd) & b\lambda & b(\lambda^2 - cd) \\ -c(\lambda^2 - ab) & -c\lambda & \lambda(\lambda^2 - ab) & -bc \\ -c\lambda & a(\lambda^2 - cd) - c & \lambda^2 & \lambda(\lambda^2 - cd) \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서,  $\Gamma = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

식(4)를 이용, 식(3)을 공간 좌표에 대해 라플라스 역 변환하면 다음 식을 얻는다.

$$\psi(x) = C \psi(0) \quad (5)$$

여기서,

$$C = \begin{bmatrix} g_3 - abg_1 & g_2 & -dg_2 + (abd + b)g_0 & bg_1 \\ bg_2 - bcdg_0 & g_3 - cdg_1 & bg_1 & bg_2 - bcdg_0 \\ -cg_2 + abdg_0 & -cg_1 & g_3 - abg_1 & -bcg_0 \\ -cg_1 & ag_2 - (acd + c)g_0 & g_2 & g_3 - cdg_1 \end{bmatrix}$$

$$g_0 = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha x - \frac{1}{\beta} \sinh \beta x \right\}$$

$$g_1 = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \cosh \alpha x - \cosh \beta x \}$$

$$g_2 = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha \sinh \alpha x - \beta \sinh \beta x \}$$

$$g_3 = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha^2 \cosh \alpha x - \beta^2 \cosh \beta x \}$$

식(5)를 길이  $\ell$ 인 균일 보 요소에 대해 Fig.2와 같은 경계치의 값을 부가한 후, 식을 재배치하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f_2^* \\ m_2^* \end{pmatrix} = D^b \begin{pmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u_2^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$D^b = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_4 & d_5 \\ d_2 & d_3 & -d_5 & d_6 \\ d_4 & -d_5 & d_1 & -d_2 \\ d_5 & d_6 & -d_2 & d_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

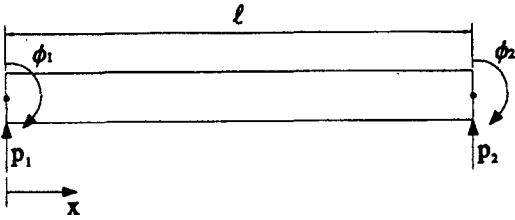


Fig. 2 Coordinates system for the beam element

이때,

$$\Delta = 2b(1 - \cosh at \cosh \beta l) + \frac{1}{c} \left( \frac{\beta}{\alpha} (cd - \alpha^2)^2 + \frac{\alpha}{\beta} (cd - \beta^2)^2 \right) \sinh at \sinh \beta l$$

$$d_1 = -\frac{cd - \alpha^2}{\alpha} \sinh at \cosh \beta l + \frac{cd - \beta^2}{\beta} \sinh \beta l \cosh at$$

$$d_2 = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ (ab - cd)(1 - \cosh at \cosh \beta l) - \left[ \frac{\beta}{\alpha} (cd - \alpha^2) + \frac{\alpha}{\beta} (cd - \beta^2) \right] \sinh at \sinh \beta l \}$$

$$d_3 = \frac{1}{bc} \{ \alpha (cd - \beta^2) \sinh at \cosh \beta l - \beta (cd - \alpha^2) \sinh \beta l \cosh at \}$$

$$d_4 = \left\{ \frac{cd - \alpha^2}{\alpha} \sinh at - \frac{cd - \beta^2}{\beta} \sinh \beta l \right\}$$

$$d_5 = -\cosh at + \cosh \beta l$$

$$d_6 = \frac{1}{bc} \{ -\alpha (cd - \beta^2) \sinh at + \beta (cd - \alpha^2) \sinh \beta l \}$$

### 2.2 집중 질량 요소 및 결합부의 모델링

집중 질량 (또는 관성) 요소에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$m^c \ddot{u} = f$$

$$J^c \ddot{\phi} = m \quad (8)$$

여기서  $m^c$ ,  $J^c$ 는 각각 집중 질량체의 질량 및 질량 관성 모멘트이다.

위 식을 라플라스 변환 후 정렬하면 다음과 같은 질량 요소 동특성 행렬식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} f^* \\ m^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m^c s^2 & 0 \\ 0 & J^c s^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ \phi^* \end{pmatrix} \quad (9)$$

한편 보의 결합을 위한 결합부 요소를 스프링과 감쇠 요소로 표현하면 두가지 형태의 운동 방정식을 얻을 수 있다. 먼저 보를 지지하는 형태의 결합부는 다음과 같이 표현된다.

$$f = c^i \dot{u} + k^i u$$

$$m = c^r \dot{\phi} + k^r \phi \quad (10)$$

여기서  $c^i$ ,  $c^r$ ,  $k^i$ ,  $k^r$ 은 각각 변위 및 각 변위에 대한 감쇠, 강성계수를 의미한다. 또한 구조물과 구조물을 결합하는 결합부는 다음과 같이 구조물 양측에 관련된 좌표에 준하여 다음과 같이 정의된다.

$$f = c^i (\dot{u}_i - \dot{u}_j) + k^i (u_i - u_j)$$

$$m = c^r (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_j) + k^r (\phi_i - \phi_j) \quad (11)$$

여기서  $i, j$ 는 각각 양 구조물이 결합된 위치에서의 좌표를 나타내는 지수이다. 식(10) 또는 (11)을 시간에 관해 라플라스 변환하면 다음과 같은 동특성 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} f^* \\ m^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} sc^i + k^i & 0 \\ 0 & sc^r + k^r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ \phi^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

또는

$$\begin{pmatrix} f_i^* \\ m_i^* \\ f_j^* \\ m_j^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} sc^i + k^i & 0 & -(sc^i + k^i) & 0 \\ 0 & sc^r + k^r & 0 & -(sc^r + k^r) \\ -(sc^i + k^i) & 0 & sc^i + k^i & 0 \\ 0 & -(sc^r + k^r) & 0 & sc^r + k^r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i^* \\ \phi_i^* \\ u_j^* \\ \phi_j^* \end{pmatrix} \quad (13)$$

### 2.3 전체 시스템 행렬의 구성

전체 구조에 대한 운동방정식을 얻기 위해서는 앞 절에서 얻었던 식(7), (9), (12) 및 (13)의 동특성 행렬을 이용하여 전체 시스템에 대해 요소 행렬을 조합할 필요가 있다. 주어진 모델의 균일한 보 부분을 한개의 요소로 고려한 이산화를 하여 각 요소에 대한 행렬을 구한 후 조합하고 집중 질량 요소나 결합부 요소의 행렬을 해당 절점 위치에 더하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$f^*(s) = D(s)q^*(s) \quad (14)$$

여기서,  $q^*$ 는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며  $f^*$ 는 이 좌표에 대응되는 힘벡터의 라플라스 변환이다. 식(14)는 주어진 시스템에 대한 라플라스 영역에서의 운동방정식을 나타내게 되며  $D(s)$ 는 시스템 동특성 행렬을 의미하게 된다.

### 3. 모드 해석

본 절에서는 불균일 연속 보에 대한 엄밀한 모드 해석 과정을 설명하도록 한다. 식(14)에서 표현된 동특성 행렬은 초월함수로 표현되므로 기존의 고유치 해법을 활용할 수 없다. 따라서 고유치를 결정하기 위해서는 일반적인 방정식 해법을 사용할 필요가 있으며 초기치 결정을 위해 주파수 응답 해석이 선행될 필요가 있다. 여기서는 주파수 응답 및 고유치 계산 방법을 설명하고 주파수 응답 함수를 이용하여 시간 응답을 간접적으로 계산하는 과정에 대해 간단히 기술하도록 한다.

#### 3.1 주파수 응답

식(14)로부터 전달 함수 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(s) = D^{-1}(s) \quad (15)$$

따라서 식(15)를 이용하여  $s$ 영역에서의 전달 함수를 구할 수 있다. 그리고 주파수 응답 행렬은 전달 함수 행렬에  $s = j\omega$ 를 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(j\omega) = D^{-1}(j\omega) \quad (16)$$

식(16)의 계산을 수행하기 위해서는 동특성 행렬에  $s = j\omega$ 를 대입하여 얻어지는 동강성 행렬에 대해 주파수를 변경시키면서 역행렬을 반복적으로 계산하는 직접 계산법이 활용될 수 있다. 주파수 응답 행렬을 구하는 목적으로 직접 계산법이 활용되고 있으며, 특히 일반 감쇠를 포함한 구조물에서는 직접 계산법이 효율적인 경우가 많다.<sup>(7,8)</sup> 직접 계산법에 의해 주파수 응답을 계산할 경우, 제안된 모델을 이용하여 계산하면 행렬의 크기가 유한요소법에 비교해서 적어지게 되므로 계산 소요 시간을 절감할 수 있다.

#### 3.2 고유치 문제

식(14)로부터 주어진 시스템에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(s)q^*(s) = 0 \quad (17)$$

따라서 고유치는 다음의 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\det\{D(s)\} = 0 \quad (18)$$

일반적인 고유치 문제가  $s$ 에 관한 2차식으로 표현되며 고유치 결정을 위해 행렬에 대한 반복 계산법<sup>(1)</sup>을 활용할 수 있는 반면 식(18)은  $s$ 에 관한 초월함수를 포함하므로 기존의 고유치 계산방법들을 사용할 수 없다. 본 논문에서는 식(18)을 풀기 위해 축차이분법(Successive bisection method)을 복소근 문제로 일반화시켜 적용하였다. 즉, 고유치의 허수부만을 변경시켜 먼저 근사해를 찾은 후, 허수부를 고정시키고 실수부를 변경시켜 실수부를 결정하고 다시 허수부 변경을 반복적으로 실행하는 과정을 통해 참해로 수렴시키는 방법을 이용하였다. 본 방정식을 풀기 위해서는 초기 구간 설정치가 매우 중요한데, 본 논문에서는 초기 구간 결정을 위해 전 절에서 논의한 주파수 응답을 먼저 계산하여 응답의 피크점을 찾아 이로부터 일정 간격을 두고 축차이분법 적용을 위한 구간을 설정하였다. 결정된 고유치를 식(17)에 대입하여 대응되는 고유벡터를 결정할 수 있다. 그러나 고유치는 무한히 많은 반면 고유벡터는 유한 자유도를 갖게 되므로 얻어지는 모든 고유벡터가 독립이라고 할 수 없다. 일반적으로 시스템 행렬  $D(s)$ 의 차수(Rank)만큼의 독립적인 고유벡터를 얻을 수 있다.

#### 3.3 시간 응답

주파수 영역 해석에서 얻어지는 주파수 응답 함수 행렬을 역 푸리에 변환하여 충격 응답 행렬을 구하면 중첩적분(Convolution integral)을 통해 간접적으로 시간 응답을 계산할 수 있다. 즉 다음과 같은 충격 응답 함수를 정의하자.

$$g_{ik}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ik}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (19)$$

그러나 주파수 응답이 양해(Explicit solution)로 얻어지지 않기 때문에 식(19)의 적분을 실제적으로는 유한 적분을 실행해야 하므로 적분 구간 한정에 따르는 오차가 발생하게 된다. 주어진 시스템이 causal하고 초기조건이 없다고 하면 일반적인 외력 조건에서 다음과 같이 응답식을 쓸 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$q(t) = \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (20)$$

여기서

$$G(t-\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t-\tau) & g_{12}(t-\tau) & \dots & g_{1N}(t-\tau) \\ g_{21}(t-\tau) & g_{22}(t-\tau) & \dots & g_{2N}(t-\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N1}(t-\tau) & g_{N2}(t-\tau) & \dots & g_{NN}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

식(20)을 이용하기 위해서는 시스템의 특성을 미리 고려할 필요가 있다. 즉, 대상 시스템에서 고려하고 있는 주파수 범위 또는 모드 수 등을 미리 고려하여 식(19)의 변환을 수행해야 하기 때문이다.

#### 4. 수치예제 및 토의

##### 4.1 예제 1: 양단 지지된 균일 보

본 예제에서는 제안한 방법의 타당성을 검증하기 위해 양단 지지된 단순보에 대해 유한요소법과 비교를 하였다. Fig. 3에 보인 바와 같이 길이 1 m, 폭과 높이가 모두

Table 2 Specifications of numerical model 1

Property	Data
Length	1.0 m
Thickness	2.5 cm
Width	2.5 cm
Young's modulus	200 GN/m <sup>2</sup>
Poisson's ratio( $\nu$ )	0.3
Shear coefficient(k)	$10(1+\nu)/(12+11\nu)$
Density	8000 kg/m <sup>3</sup>

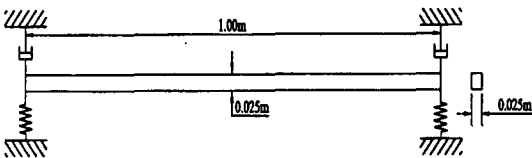
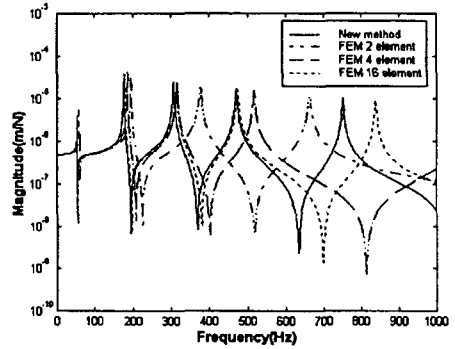
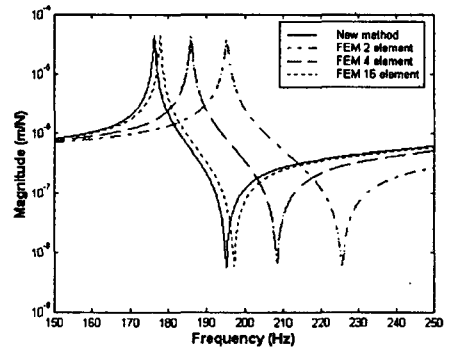


Fig. 3 A uniform beam system : numerical model 1

2.5 cm인 보의 양단이 스프링-감쇠로 지지되는 경우이다. 스프링 및 감쇠계수는 각각  $2 \times 10^6$  N/m, 20 Ns/m로 두었다. Table 2에는 고려한 시스템의 제원이 정리되어 있다. 제안한 방법에서는 비록 길이가 길지만 균일한 단면을 가지므로 한 개의 요소로 모델링하여도 엄밀한 해를 얻을 수 있다. 따라서 여기서는 제안한 방법에 의해 한 개의 요소로 모델링한 경우와 유한요소법에서 요소수를 증가시키면서 모델링 한 경우의 주파수 응답 함수를 비교하였다. 주파수 응답 함수 계산엔 직접 계산법을 이용하였다. Fig. 4는 계산 결과를 보여 주고 있다. 유한요소법으로 모델링 한 것이 요소수를 증가시킬수록 제안된 방법으로 계산한 주파수 응답 함수에 접근함을 볼 수 있다. 따라서 제안된 방법이 엄밀해를 제공하고 있음을 간접적으로 보여주고 있다. 한편 Table 3은 제안된 방법으로 계산된 고유치와 유한요소법으로 계산된 고유치를 비교해서 보여주고 있다. 주파수 응답 함수 비교에서 확인되었던



(a)



(b)

Fig. 4 (a) Direct driving frequency response functions at node 1 (b) Zoomed view in the vicinity of the second mode

Table 3 Comparison of eigenvalues from FEM and the proposed method for numerical model 1

Mode #	Real part of eigenvalue/Imaginary part of eigenvalue (eigenvalue $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$ )			
	FEM (2 elements)	FEM (4 elements)	FEM (16 elements)	Proposed method (1 element)
1	-6.7545e-002/ 3.3568e+002	-6.6720e-002/ 3.3453e+002	-6.6652e-002/ 3.3444e+002	-6.6651e-002/ 3.3444e+002
2	-3.5023e+000/ 1.1683e+003	-2.7644e+000/ 1.1111e+003	-2.7331e+000/ 1.1079e+003	-2.7327e+000/ 1.1079e+003
3	-1.4203e+001/ 1.9860e+003	-1.2563e+001/ 1.9429e+003	-1.2138e+001/ 1.9273e+003	-1.2133e+001/ 1.9271e+003
4	-2.2424e+001/ 3.2481e+003	-2.1488e+001/ 2.9958e+003	-2.0125e+001/ 2.9549e+003	-2.0106e+001/ 2.9542e+003
5	-3.7002e+001/ 6.8026e+003	-2.0213e+001/ 4.7456e+003	-2.0182e+001/ 4.7139e+003	-2.0135e+001/ 4.7111e+003

바와 마찬가지로 유한요소법에 의해 계산된 결과가 제안된 방법으로 계산된 결과에 접근해감을 알 수 있다.

4.2 예제 2: 집중 질량을 지지하는 다단 보 구조물

본 예제에서는 제안된 방법의 응용성을 보여 주기 위해 Fig. 5와 같은 다단 보 구조물을 고려하였다. 그림에 보인 바와 같이 양단이 스프링 및 감쇠로 표현되는 요소로 지지되고 있다. Table 4에 고려한 시스템의 제원이 정리되어 있다. 고려한 시스템의 중앙에 집중 질량이 위치하고 있으므로 절중 질량 위치를 절점으로 고려할 필요가 있다. 따라서 제안된 방법에서는 4개의 요소를 택하였다. 비교를 위해 유한요소법을 이용한 해석을 병행하였다.

Table 4 Specifications of numerical model 2

Beam	Length	$L_1 = 30\text{cm}$ $L_2 = 30\text{cm}$
	Depth	4cm, 6cm
	Width	4cm, 6cm
	Young's Modulus	200 GN/m <sup>2</sup>
	Density	8000 Kg/m <sup>3</sup>
Mass		20 Kg
Stiffness (2 identical)		2 MN/m
Damping (2 identical)		10 Ns/m

Fig. 6은 감쇠를 무시한 상태에서 계산된 고유벡터를 대표적인 몇 모드에 대해 질량이 위치한 곳의 값을 비교해서 보여 주고 있다. 유한요소법으로 계산된 고유벡터가 제안된 방법으로 계산된 고유벡터에 접근해감을 알 수 있다. Table 5는 감쇠를 포함시킨 경우의 고유치를 비교해서 보여주고 있다. 시간 응답을 살펴보기 위해 1번째 절점에 단위 충격이 가해진 경우에 중앙 위치에서 측정된 충격 응답을 구하였다. Fig. 7은 이때의 주파수 응답 함수와 주파수 응답 함수를 역변환하여 얻어진 충격 응답을 보여주고 있다. 한편 Fig. 8은 충격 응답을 구하는 과정에 있어 고려한 모드 수를 증가시키면서 응답을 비교해서 보여주고 있다. 모드 수의 증가에 따라 해당 모드의 특성을 반영하여 높은 주파수 성분이 나타나고 있으나 전체적인 양상은 일정하게 유지되고 있음을 알 수 있다. 주파수 응답 함수를 이용하여 시간 응답을 구해야 하는 경우에는 주파수 해상도와 모드 수(최대 주파수)의 결정이 응답 특성에 크게 영향을 미칠 수 있으므로 주의할 필요가 있다. 제안된 방법을 이용하면 복소 평면 상에서 시스템에 대한

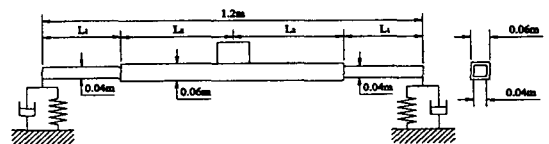
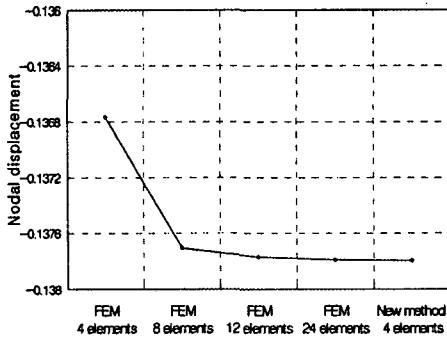


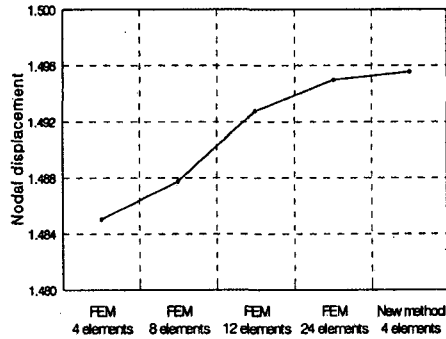
Fig. 5 A general beam system : numerical model 2

Table 5 Comparison of eigenvalues from FEM and the proposed method for numerical model 2

Mode #	Real part of eigenvalue/Imaginary part of eigenvalue (eigenvalue $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$ )				
	FEM (4 elements)	FEM (8 elements)	FEM (12 elements)	FEM (24 elements)	Proposed method (4 elements)
1	-1.3468e-001/ 2.2195e+002	-1.3467e-001/ 2.2194e+002	-1.3467e-001/ 2.2194e+002	-1.3466e-001/ 2.2194e+002	-1.3466e-001/ 2.2194e+002
2	-2.3851e+000/ 7.5482e+002	-2.3766e+000/ 7.5414e+002	-2.3759e+000/ 7.5408e+002	-2.3756e+000/ 7.5406e+002	-2.3755e+000/ 7.5406e+002
3	-5.6412e+000/ 1.6906e+003	-5.5461e+000/ 1.6841e+003	-5.5382e+000/ 1.6835e+003	-5.5350e+000/ 1.6833e+003	-5.5343e+000/ 1.6832e+003
4	-7.7305e+000/ 3.1985e+003	-7.5155e+000/ 3.1805e+003	-7.4798e+000/ 3.1770e+003	-7.4644e+000/ 3.1755e+003	-7.4604e+000/ 3.1750e+003
5	-5.5426e+000/ 4.6928e+003	-5.6016e+000/ 4.6725e+003	-5.5530e+000/ 4.6636e+003	-5.5306e+000/ 4.6594e+003	-5.5247e+000/ 4.6582e+003

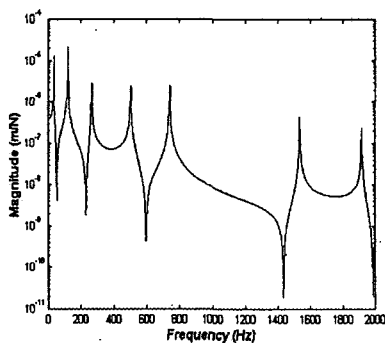


(a) 3rd mode

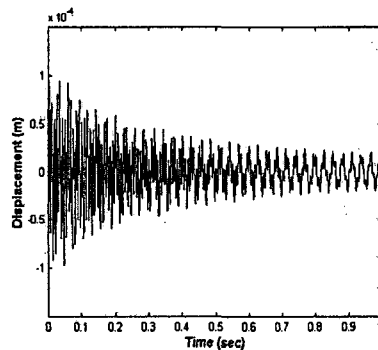


(b) 5th mode

Fig. 6 Comparison of eigenvector components at the middle of the beam structure



(a) frequency response



(b) impulse response

Fig. 7 Frequency and impulse responses : excited at the left end of the beam and measured at the middle of the beam



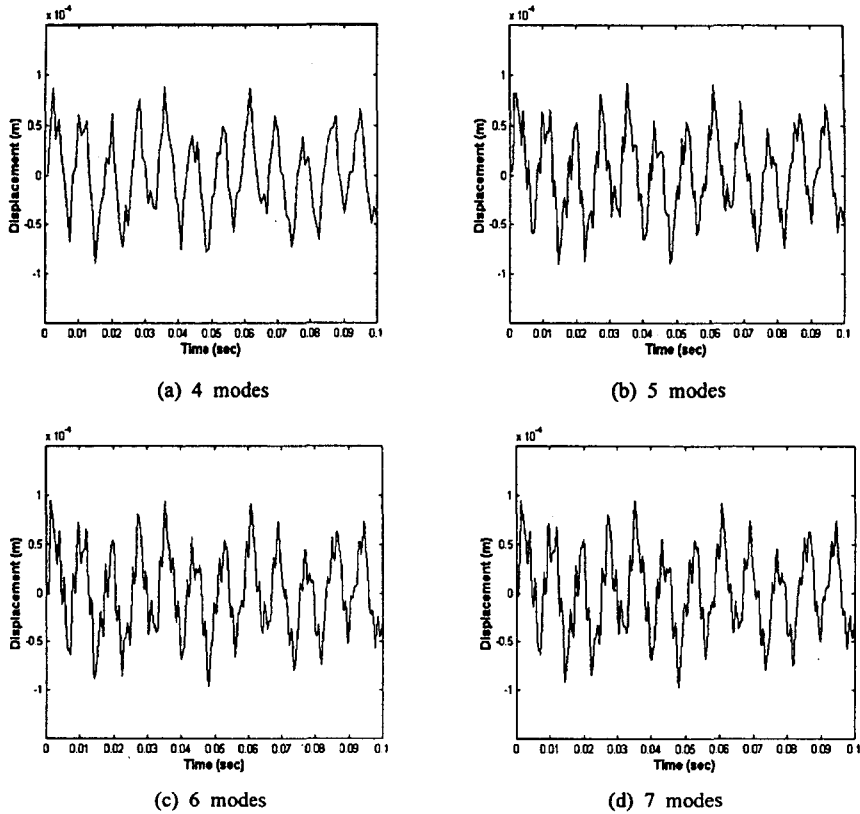


Fig. 8 Zoomed view of impulse responses excited and measured, respectively, at the end and the middle of the beam, with changing the number of modes considered.

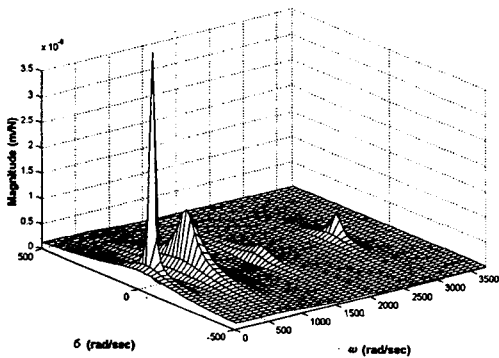


Fig. 9 A 3-D plot for the transfer function with input and output at the left end and the middle of the beam, respectively ( $s = \sigma + j\omega$ )

전달함수를 구할 수 있다. Fig. 9는 첫 번째 절점에서 입력과 출력이 있다고 가정할 때, 식(15)를 통해 계산된 전달함수의 절대치를 3차원으로 보여주고 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 시간 및 공간좌표에 대하여 동시에 라플라스 변환을 적용하여 Timoshenko 보 요소와 집중 질량 요소 그리고 스프링 및 감쇠로 표현되는 결합 요소를 갖는 구조물의 동특성에 대해 엄밀한 해를 얻을 수 있는 방법을 제시하였다. 요소에 대한 동특성 행렬을 유도하였고 이를 이용하여 전체 구조물의 동특성 행렬을 얻는 과정을 설명하였다. 또한 얻어진 동특성 행렬을 이용하여 구조물의 고유치 및 고유벡터를 구하거나 주파수 영역 해석 및 시간 영역을 수행하는 방법에 대해 논의하였다. 그리고 두가지 예제를 통해 제안한 방법의 타당성 및 응용성을

보였다.

제안된 방법에 의하면 보의 균일한 부분은 한 개의 요소로 모델링 될 수 있으므로 구조물의 모델링에 편리함을 제공하게 된다. 이는 구조물의 구성 상 보의 대부분이 균일한 형태를 갖는다는 점을 고려할 때 획기적으로 자유도를 줄이게 되면서도 엄밀해를 얻는 모델을 만들 수 있다. 제안된 방법은 엄밀해가 요구되는 모든 분야, 예컨대, 구조물의 물리적 특성 해석이나 구조물의 변수 변화에 대한 민감도 해석; 설계 문제에 응용이 가능할 것으로 기대된다. 제안된 방법을 주파수 응답 직접 계산에 활용할 경우에는 기존의 방법들에 비해 자유도는 낮추면서도 엄밀한 계산이 가능하므로 큰 장점을 갖게 되나 모드 해석에서는 기존의 고유치 문제 해법을 적용하지 못하기 때문에 계산 효율이 떨어진다. 고유치 계산을 위한 보다 개선된 방법이 개발된다면 더욱 유용하게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

#### 참고 문헌

1. Meirovitch, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publisher.
2. Paz, M., Structural Dynamics: Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold, 1991.
3. Leung, A.Y.T. and Zeng, S.P., "Analytical

formulation of dynamic stiffness," Journal of Sound and Vibration, Vol. 177, No.4, pp. 555-564, 1994.

4. Geradin, M and Chen, S.L., "An exact model reduction technique for beam structures: combination of transfer and dynamic stiffness matrices," Vol.185, No.3, pp. 431-440, 1995.
5. Leung, A.Y.T., "An accurate method of dynamic condensation in structural analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, pp. 1705-1716, 1979.
6. Pilkey, W.D., Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices, John Wiley & Sons, Inc.
7. 박종혁, 홍성욱, "성긴 일반 감쇠 행렬을 포함하는 구조물에 대한 효율적인 주파수 응답 계산 방법," 한국정밀공학회지, 제 12권 7호, pp. 99-106, 1995.
8. Yang, B., "Exact receptances of non-proportionally damped dynamic systems," Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.115, pp. 47-52, 1993.
9. Chen, C.T., Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston, 1984.