

## 중첩법에 의한 복합응력확대계수의 결정

조재웅\*, 한문식\*\*

### Determination of Compound Stress Intensity Factor by Superposition Method

Cho, Jae-Ung\* and Han, Moon-Sik\*\*

#### ABSTRACT

In this study, the stress intensity factors of center crack are analyzed when it is surrounded by symmetrically distributed small cracks. The values of stress intensity factors of the center crack are greatly influenced by the locations of distributed small cracks. When small cracks overlap or approach near the tip of a center crack, the effect of interaction arisen by these cracks becomes noticeable. In case of multiple distributed small cracks, the stress intensity factor of a center crack is found to be efficiently determined by the superposition method.

**Key Words** : Stress Intensity Factor(응력확대계수), Distributed Small Cracks(분포된 작은 크랙들) Interaction(상호간섭), Superposition Method(중첩법)

#### 1. 서론

일반적으로 강도상에 있어서 충분한 여유를 가지고 설계된 기계 내지 구조물에 있어서 파손이 일어나는 경우가 허다하며 특히 고장력강 등과 같은 경우 의외로 항복응력보다 훨씬 낮은 저응력하에서도 파괴가 잘 일어난다. 왜냐하면 기계 또는 구조물의 파손은 대부분 재료 내부에 존재하고 있는 결함에서부터 발생하는 크랙진전에 의한 것이기 때문이다. 그리고 실제적으로 이들 크랙은 밀집하여 존재하는 일이 허다하기 때문에 단일 피로크랙의 성장 특성과 함께 근접분포 크랙의 간섭 합체에 의한 성장도 생각하지 않으면 안된다. 또한 크랙 상호간의 간섭은 중

요한 연구대상의 하나로서 크랙진전의 양상도 단일크랙 때와는 달리 특이한 현상을 나타내는 경우가 많다. 결국 재료의 파괴는 재료내부에 존재하고 있는 근접된 분포크랙의 간섭, 합체에 의한 성장으로 일어나는 것이 대부분임을 생각할 때, 그러한 크랙들을 가진 탄성체의 강도를 확실히 평가할 필요가 있다. 본 연구에서는 기초적으로 해석의 간편화를 위하여 대칭배치 크랙이 분포되어 있을 때에 대하여 해석하여 보았다. 이와같은 해석의 결과로 불규칙분포 크랙의 발생, 간섭, 합체에 의한 파괴를 통계적인 방법과 유한요소법 등을 포함시켜 해석할 수가 있을 것으로 생각이 된다<sup>(1)</sup>.

실제상의 피로파괴는 근접 분포크랙의 간섭, 합체에 의

\* 천안공업대학 자동차과

\*\* 계명대학교 공과대학 자동차공학부

한 성장에 기인한다고 볼 수 있는데 이에 대한 연구로는 結成良治<sup>(2)</sup>의 유한판중의 임의형상 균열 및 양단굴절 또는 양단분기 균열의 등각사상에 의한 해석이 있다. 또한 石田<sup>(3)</sup> 및 西谷<sup>(4)</sup>은 타원공과 균열을 포함하는 무한판 그리고 임의의 직선 균열균을 갖는 판의 응력확대계수 (Stress Intensity Factor:K)를 구하였고, Irwin은 2개 원공을 가진 무한판을 크랙이 전파하는 경우에 대하여 해석하였다. 한편, 균일 인장을 받는 유한판 내에서의 구멍들 사이를 크랙이 전파하는 경우 및 유한판중의 대칭배치의 3개 균열에 대한 해석도 발표되어 있고<sup>(5)</sup> 비대칭 크랙분포에 대하여도 해석이 발표되어 있다. 그리고, 크랙에 대한 실험적인 연구로는 피로크랙 진전에 대한 연구가 거의 대부분을 차지하며, 분포크랙에 대한 크랙 상호간섭의 영향을 규명하기 위한 광탄성 실험 및 변형률 측정 등도 유용하게 사용되고 있다.<sup>(6)</sup> 이러한 분포크랙의 발생의 응력부식(Stress Corrosion) 내지 부식피로(Corrosion Fatigue)에 있어서 잘 나타나는데 이들에 대하여는 파괴역학과 통계적인 방법을 이용한 여러 가지 연구가 발표되어 있다.<sup>(7)(8)</sup> 또한 압력용기에 있어서 내압에 의하여 응력을 받고 있는 내측에 다수의 표면크랙이 존재하고 있을 때의 응력 확대계수에 대하여서도 실험결과가 발표되어 있다<sup>(9)</sup>. 종래의 유사한 연구결과에서는 무한판에서 두 개의 평형크랙들 사이에 크랙선단의 상호 간섭도를 수학적인 해<sup>(10)</sup>로써 계산하여 응력확대계수를 결정하였다. 그러나 본 연구에서는 작은 크랙이 중앙 크랙선단 주위에 대칭으로 배치 분포되어 있는 유한 평판의 경우에 대한 것으로, 우선 균일분포하중을 받는 정방형판에 분포크랙이 있는 경우 분포크랙의 위치에 따른 중앙 크랙 선단에서의 응력확대계수의 변화를 유한요소법으로 해석하였다. 또한 본 논문에서 중첩법으로 계산한 응력확대계수값과 비교 검토하여 그 크랙들간에 일어나는 상호간섭으로 인한 오차를 검증하였다. 이러한 중첩법은 그 오차가 적어 효율적으로 사용할 수가 있다. 또한 크랙들 사이의 상호간섭에 의해 크랙들이 가까워지면 그 크랙들 간에 상호간섭이 커져 그 안정성을 검토하여 보았다. 본 논문의 연구결과를 종합하여 놓으면 구조물내에 분포되어 있는 크랙 또는 결함들의 위치와 개수에 대응하여 그 안정성을 검토할 수 있는 설계기준을 정할 수 있다. 이러한 사항을 체계적으로 연구, 그 결과를 종합하여 놓으면 재료의 재질의 향상, 기계 내지 구조물의 안전설계 또는 안전성 평가 등에 이용이 클 것으로 사료된다.

## 2. Simulation 해석 절차 및 결과

### 1) 본 연구에서 채택한 2차원 Model 및 해석절차

본 연구에서는 관통크랙이 한 방향으로 분포되어 있는 경우에 대하여 응력확대계수를 구하고 이들 크랙의 상호간섭에 의한 응력확대계수의 변동 및 그 오차도 아울러 검토하여 보기로 하였는데, 본 연구에서는 우선 2차원 Model을 대상으로 하되, 연구의 기본 Model로서는 중앙에 크랙을 갖는 정방형판을 선택하였다. 이때 이 중앙 크랙 주변에 이 크랙보다 크기가 작은 크랙들이 발생하였을 때의 중앙 크랙선단에서의 응력확대계수가 분포되어 있는 크랙의 위치에 따라 어떻게 변하는가를 해석하기 위하여 4개, 8개 및 12개의 크랙들이 중앙 크랙 주변에 대칭으로 분포되어 있는 Fig.1과 같은 Model을 선택하였다. 이 그림에서도 알 수 있는 바와 같이 크랙들을 내포하고 있는 정방형판이 크랙선에 대하여 직각방향으로 하중의 작용을 받을 때 Fig.1의 모든 경우에 있어서 조건이 상하, 좌우 모두 대칭이므로 해석은 판의 1/4의 사선친 부분에 대하여 행하였다.

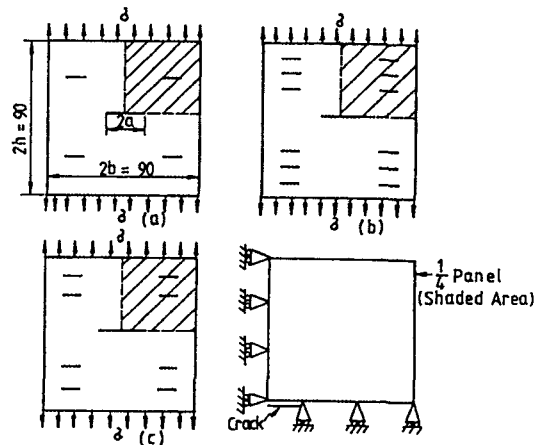


Fig. 1 Center Cracked Models with Symmetrical Small Cracks and Boundary Condition

본 연구에서는 분할요소로, 유한요소법에 적용하기가 가장 간편한 3각형 요소를 사용하였고, 중앙 크랙 선단에서의 응력확대계수를 구하는데 있어 요소수가 적어도 비교적 오차가 작은 에너지법(Energy Method)인 전에너지법(Total Energy Method)을 이용하였다. 또한 응력확대계수에는 중첩법이 적용되므로 크랙군이 존재할 때

에 대하여는 중첩법의 적용여부 및 그 오차도 검토하여 보았다.

중첩법의 원리는 다음과 같이 적용된다.

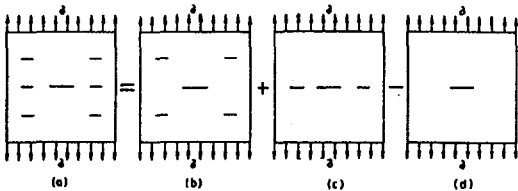


Fig. 2 Superposition Concept Applied to Compound Stress Intensity Factors

지금 Fig.2에서 큰 중앙크랙 주위로 작은 크랙을 대칭으로 6개를 포함한 시편에서 균등분포 인장하중을 받고 있을 때, 각 (b),(c) 경우의 응력확대계수를 중앙크랙만이 있는 경우의 응력확대계수( $K_o$ )로 나눠 주어 등응력확대계수(Normalized Stress Intensity Factor)로 표시하여 주고, (a)의 경우의  $K_o/K_o$ 의 값을 중첩법으로 구하면,

$$K_a / K_o = K_b / K_o + K_c / K_o - K_o / K_o = K_b / K_o + K_c / K_o - 1 \quad (1)$$

이 된다.

일반적으로 크랙이 여러 개(N개) 있을 때에 대하여도

$$K_N = 1 + \sum_{n=1}^N (K_n - 1) \quad (2)$$

이 성립한다<sup>(11)</sup>.

여기서  $K_N$  및  $K_n$  등은 등응력확대계수이다.

### 2) Model에 대한 해석 결과

본 해석에서는 앞에서 말한 바와 같이 대칭임을 고려하여 시편 1/4에 대하여 검토를 하여 보았는데 시편 1/4에 대한 요소수는 162개, 절점수는 100개를 사용하였고, 구속 조건으로서 X축상의 절점에서는 Y축방향의 변위를 구속하였으며, Y축상의 절점에서는 X축방향의 변위를 구속하여서 중앙 크랙에 있어서 크랙의 진행은 X축상의 절점의 Y축방향 변위의 구속을 하나씩 풀어줌으로써 행하였다.

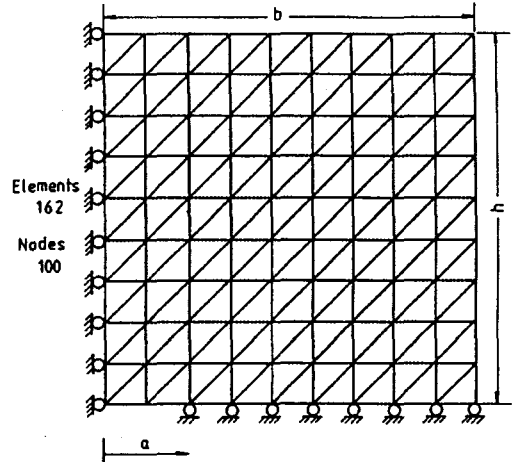


Fig. 3 Idealized Model Used for Analyses

요소분할과 구속상태를 Fig.3에 나타내었다. 본 Model에 있어서는 Fig.3에서 보인 바와 같이 전체 시편의 폭은  $2b=90\text{mm}$ , 길이는  $2h=90\text{mm}$ , 두께는  $t=1\text{mm}$ 로 하였고, 길이  $2a=20\text{mm}$ 인 중앙 크랙 주위에 대칭으로 분포되어 있는 작은 크랙의 길이는  $10\text{mm}$ 로 하였다. 해석을 하기 위한 조건으로서는 평면변형(Plane Strain)상태하에서 균등분포하중  $180\text{Kg}$ 의 인장을 주고 양단에 작용하는 등분포하중은 절점에 작용하는 하중으로 치환하여 작용시켰고, 영계수(Young's Modulus: E)는  $21000\text{kg/mm}^2$ , 포와송비(Poisson's Ratio:  $\nu$ )는 0.3으로 하였다. 본 해석에 앞서, 중앙 크랙만이 존재하고 있을 경우의 해석의 정도를 검토하기 위하여 본 연구에서의 해석의 결과를 Isida 등의 해석과 비교하여 보았다. Isida<sup>(12)</sup>는 본 시험편과 같이 중앙크랙만이 있는 경우에 대하여 다음과 같이 응력확대계수(K)값을 제시하였다.

$$K = \sigma \sqrt{a} Y$$

여기서 Y는  $F(a/h)$ 로 표시되는 형상계수이며 다음과 같이 주어진다.

$$Y = 1.77[1 - 0.1(2a/h) + (2a/h)^2]$$

Table 1. Calculated  $K_1$  Value by Total Energy Method

a	a/b	calculated $K_1$ Value	$K_1$ Value by Isida	Error(%)
10	0.222	12.4593	12.0227	+3.63
15	0.333	16.3269	15.7651	+3.56
20	0.444	20.6443	20.0378	+3.03
25	0.556	25.7246	25.0823	+2.56

Table.1에 비교표를 나타내었다. 이 표에서 알 수 있는 바와 같이 대체적으로 본 해석의 결과는 오차 약 3.6% 이내에 있고, 본 연구에 필요한 작은 크랙이 존재하고 있을 때의 해석의 상호비교에는 큰 지장이 없는 것으로 사료된다. 중앙 크랙 주위에 작은 크랙이 존재하고 있을 때의 응력확대계수를 구하는데 있어서, 중첩법을 사용하였을 때의 정도를 검토하기 위하여 해석을 하여 보았는데 이 해석결과는 다음과 같다. 즉, 여기서는 Fig.1(a),(b),(c)들의 3가지 형에 대하여만 작은 크랙의 위치를 각각 변화시켜 가면서 해석을 하였는데, 이 때의 중앙 크랙의 길이로서는  $2a=20\text{mm}$ ,  $30\text{mm}$ ,  $40\text{mm}$  및  $50\text{mm}$ 로 잡고 그 때마다 해석을 하였다.

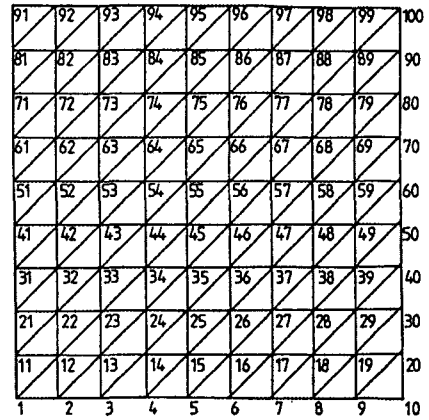


Fig. 4 Schematic illustration for the Position of Small Crack

Table 2. Values of  $K_1/K_0$

Position 2a	15	45	RATT	RAT	Error(%)
20 mm	1.15811	1.01957	1.17768	1.16422	+1.157
30 mm	1.19579	1.01054	1.20633	1.19240	+1.168
40 mm	0.73266	0.98044	0.7131	0.73219	-2.608
50 mm	0.98258	0.98795	0.97053	0.97349	-0.003

(RATT : Superposition Method)  
(RAT : Total Energy Method)

Table 3. Values of  $K_1/K_0$

Position 2a	17	47	73	RATT	RAT	Error(%)
20 mm	1.03814	1.02575	0.99051	1.06440	1.04885	+0.529
30 mm	1.06208	1.02344	0.99285	1.07837	1.07133	+0.657
40 mm	1.13745	1.01833	0.99568	1.15146	1.14153	-0.870
50 mm	1.19773	1.01305	0.99764	1.20842	1.19638	-1.006

(RATT : Superposition Method)  
(RAT : Total Energy Method)

이 Table에서 번호 15 등은 작은 크랙을 나타내는 것으로서, Fig.4에서 작은 크랙의 중심이 15번에 있으며 길이가 14-16번에 걸쳐 있음을 뜻하는 것이다. 또한, 번호 아래 있는 값은 예컨대 15번에 중심을 둔 작은 크랙만이 있을 때의 중앙크랙 선단에서의  $K_1/K_0$ 의 값을 나타낸 것이고, RATT는 중첩법에 의한  $K_1/K_0$ 의 값, RAT는 전 에너지법(Total Energy Method)에 의하여 구한 값을 나타낸다.

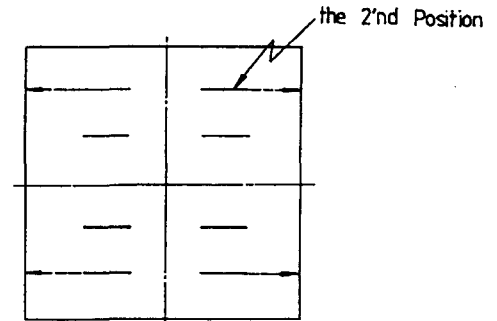


Fig. 5 The Movement of Small Crack at the 2'nd Position from Center Crack Tip ( $2a = 20\text{mm}$ )

Fig.5는 그림에서도 볼 수 있는 바와 같이 중앙크랙 선단으로부터 위치가 첫 번째인 작은 크랙의 위치가 고정되어 있고 두 번째 위치의 작은 크랙이 수평으로 이동하는 경우를 나타낸 것이며 중앙 크랙의 길이( $2a$ )는  $20\text{mm}$ 로 잡았다. Fig.6부터 Fig.8까지는 Fig.5에서 보인 바와 같은 경우로서, 작은 크랙들을 함유하고 있을 때의 큰 중앙크랙 선단에서의 응력확대계수( $K_1/K_0$ )로 무차원화시켜  $K_1/K_0$ 의 Data를 Y좌표(RAT)로 삼았는데, 중첩법에 의하여 구한 RATT와의 오차(%)도 나타내고 있다. 또한, 이동하는 작은 크랙의 중앙 위치를 시편의 1/2쪽에 대한 비로써 무차원화시켜 X좌표로 잡았다.

### 3. 해석결과에 대한 고찰

해석결과에 대하여 축차적으로 고찰을 가하여 보겠다.

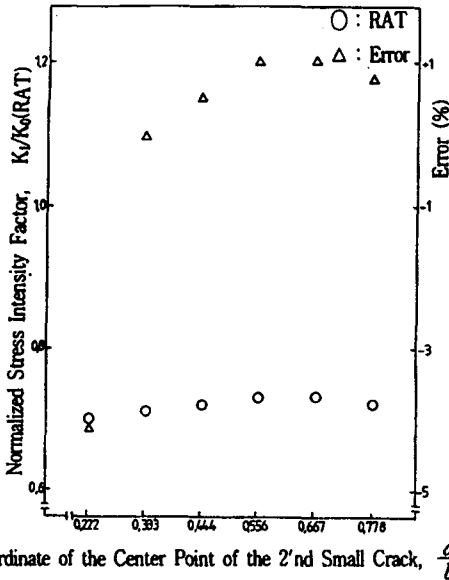


Fig. 6  $K_I/K_0$  and Error(%) VS Relative Position of the 2'nd Small Crack in the Horizontal Direction(13, 43-48 Specimen,  $2a = 20\text{mm}$ )

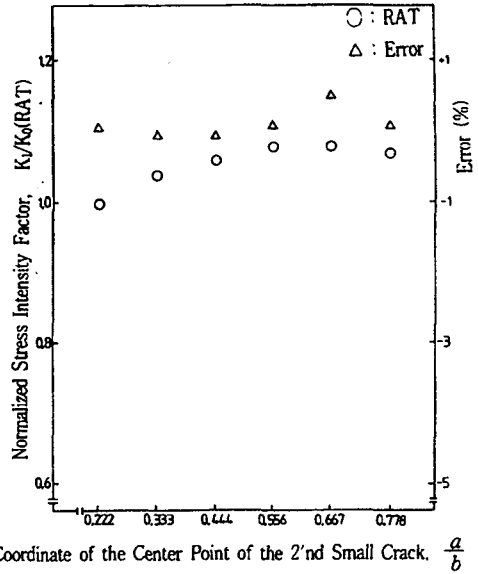


Fig. 8  $K_I/K_0$  and Error(%) VS Relative Position of the 2'nd Small Crack in the Horizontal Direction(17, 43-48 Specimen,  $2a = 20\text{mm}$ )

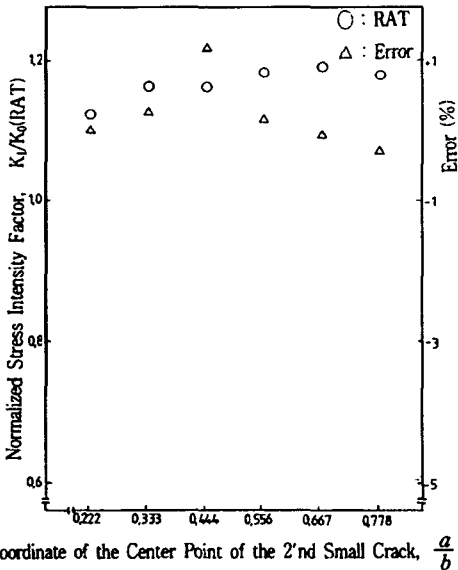


Fig. 7  $K_I/K_0$  and Error(%) VS Relative Position of the 2'nd Small Crack in the Horizontal Direction(15, 43-48 Specimen,  $2a = 20\text{mm}$ )

Fig.6은 중앙크랙 선단으로부터 첫 번째인 작은 크랙의 중심인 13번 위치에 있을 때 두 번째인 작은 크랙의 중심이 43번 위치에서 48번 위치까지 이동할 때의 그림이며

그 오차는 두 번째인 작은 크랙의 중심이 0.222위치에 있을 때, 즉 첫 번째인 작은 크랙과 두 번째인 작은 크랙이 겹쳐질 때 그 오차의 절대치가 약 4.1%까지 올라가고 있음을 보이고 있다. 이는 중앙크랙선단에 가까운 작은 크랙들이 서로 겹쳐질수록 오차(Error:%)가 가장 높음을 보여 주고 있으며 그 외의 위치의 경우는 1%이내를 보이고 있다. 그리고 등응력확대계수(RAT)는 중앙크랙 선단 위로부터 첫 번째인 작은 크랙 우측선단이 중앙크랙 우측선단 바로 안쪽으로 들어왔을 때이며 대체로 0.8보다 낮고, 두 번째 작은 크랙의 영향은 별로 없음을 알 수 있었다. 이 수치는 작은 크랙이 없는 경우로서 중앙 크랙만이 있는 경우(등응력확대계수는 1임)보다는 크랙 진전이 지연됨을 보여 주게 된다.

Fig.7은 중앙크랙 선단으로부터 첫 번째인 작은 크랙의 중심이 15번 위치에 있을 때 두 번째인 작은 크랙의 중심이 43번 위치에서 48번 위치까지 이동할 때의 그림이다. 마찬가지로 그 오차는 두 번째인 작은 크랙의 중심이 0.444위치에 있을 때, 그 오차는 1.15% 이상으로 올라가고 있음을 보이고 있으며 역시 작은 크랙들이 서로 겹쳐질 때 오차(Error:%)는 가장 높았다. 그리고 등응력확대계수는 중앙크랙 선단으로부터 첫 번째인 작은 크랙의 좌측선단이 바로 바깥쪽으로 나와 있을 때로서 대체로

1.1보다 높다. 그러나 두 번째인 작은 크랙이 첫 번째인 작은 크랙과 겹쳐질 때, 즉 0.444 위치에 두 번째인 작은 크랙의 중심이 있을 때는 1.16으로 다소 낮아지는 경향을 보이고 있는데, 이는 두 번째인 작은 크랙이 첫 번째인 작은 크랙과 겹쳐져 크랙 진전을 도모하므로서 서로 상호 간섭의 효과가 크게 되기 때문인 것으로 사료된다.

Fig. 8은 중앙크랙선단으로부터 첫 번째인 작은 크랙의 중심이 17번 위치에 있을 때, 두 번째인 작은 크랙의 중심이 43번 위치에서 48번 위치까지 이동할 때의 그림이다. 마찬가지로 그 오차는 작은 크랙들이 서로 겹쳐지게 되는 경우, 즉 두 번째인 작은 크랙의 중심위치가 0.667에 있을 때, 0.5%로 가장 커지고 있으며 그외의 경우는 0.1%이내를 나타내고 있다. 그리고 등응력확대계수는 중앙크랙으로부터 첫 번째인 작은 크랙좌측선단이 중앙크랙 우측선단 바깥쪽으로 멀리 나와 있을 때로서 1보다 크지만 1.06이하가 됨을 알 수 있어 크랙이 단독으로 중앙크랙만 있는 경우보다 다소 빨리 진전됨을 보이게 된다. Fig. 7에서의 경우는 작은 크랙들이 중앙크랙 우측선단 바깥쪽으로 더 가까이 있는 때보다 등응력확대계수는 다소 낮아짐을 보이고 있다. Fig. 6부터 Fig. 8까지를 보면, 중앙크랙 선단으로부터 위치가 첫 번째, 두 번째인 작은 크랙들이 겹쳐질수록 오차(Error:%)는 높아져 상호 간섭 효과는 커지고, 첫 번째, 두 번째인 작은 크랙들이 중앙크랙 우측선단에 가까울수록 오차(Error:%)는 높아져 상호간섭 효과는 커진다. 또한 중앙크랙 선단으로부터 첫 번째인 작은 크랙의 좌측선단이 중앙크랙의 우측선단 바로 안쪽으로 들어와 있을 때는 등응력확대계수가 1보다 상당히 낮아져 중앙크랙만이 있을 때의 응력확대계수보다 훨씬 낮아짐을 알 수 있어 크랙 진전을 지연시키는 효과를 주고 있다. 그러나 첫 번째인 작은 크랙의 좌측선단이 중앙크랙의 우측선단을 바로 벗어난 후는 1보다 훨씬 높아져 중앙크랙만이 있을 때의 응력확대계수보다는 상당히 높아짐을 보이고 있어 크랙 진전을 빨리 시켜 주고 있다. 또한 첫 번째인 작은 크랙의 좌측 선단이 중앙크랙 우측선단 바깥쪽으로 멀리 나와 있을 때는 바로 벗어난 후보다는 응력확대계수가 다소 낮아지나 중앙크랙만이 있을 때의 경우보다는 높아짐을 알 수 있어 크랙 진전을 도모시키는 효과를 주고 있다. 그리고 해석의 결과를 보면 전에너지법(Total Energy Method)로 직접 구한 해와 중첩법에 의하여 구한 해와는 잘 일치하여 대체적으로 중첩법의 효용성을 증명하여 주고 있으며, 작은 크랙으로 인하여 중앙 크랙 선단에서의 응력확대계수의 값이

현저하게 떨어지는 경우등을 포함할 때는 Table.2 및 3에 예로서 표시된 바와 같이 그 오차가 3% 정도밖에 이르지 않았다. 그러므로 작은 크랙이 많이 산재하고 있을 때의 중앙 크랙선단에서의 응력확대계수는 중첩법에 의하여 충분히 정도 좋게 구할 수 있음도 해석의 결과, 알 수 있었다.

#### 4. 결 론

본 해석의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 작은 크랙의 좌측선단이 중앙크랙의 우측선단보다 좌측에 있는 경우에는 중앙크랙선단에서의 응력확대계수는 작은 크랙이 없는 경우에 비하여 더 작은 값을 취하고, 반대로 작은 크랙 좌측선단이 중앙 크랙의 우측선단보다 우측에 있는 경우에는 중앙크랙 선단에서의 응력확대계수는 중앙크랙만이 있을 때에 비하여 더 큰 값을 취한다.
- 2) 작은 크랙들이 서로 겹쳐지거나 중앙 크랙선단에 가까워 질수록 그들간의 상호 간섭효과는 커지므로서 중앙크랙선단에서의 응력확대계수와 중첩법에 의하여 구한 해와의 오차는 커진다.
- 3) 작은 크랙이 산재하고 있을 때에 중앙 크랙선단에서의 응력확대계수는 중첩법에 의하여 충분히 정도 좋게 구할 수가 있다.
- 4) 상기 결과를 종합적으로 검토하여 보면, 작은 크랙의 위치에 따른 존재는 재료의 크랙에 대한 저항을 약화시키는 경우도 있고, 반대로 강화시키는 경우도 있다.

#### 참 고 문 헌

1. Kitagawa, H., "Passive Analysis of Various Given Cracks and Cracking Processes," Proc.Int.Conf.Frac.Mech. & Tech, Vol.2, pp. 995-1009, 1977.
2. 北川英夫, 結城良治, "양단굴절, 양단분기균열의 응력확대계수의 해석," 일본기계학회 논문집, Vol. 44, No. 386, 1978.
3. 石田, 기계학회강연논문집, No. 720-2, pp. 5, 1972.
4. 西谷, 기계학회강연논문집, No. 710-10, pp.21, 1971.
5. 大平壽昭, 黒田道生, 石田誠, 北川英夫, "근접분포 균열의 피로특성," 일본기계학회 논문집, Vol. 42,

- No. 360, pp. 2281-2288, 1976.
6. Smith, C.W., Jolles, M. and Peters, W.H., Proc. 3'rd Int.Conf.Press.Vessel Tech., Part 2, pp. 535, 1977.
  7. Bogdanoff, J.L. and Kozin, "Probabilistic Model of Fatigue Crack Growth- I," Eng.Frac. Mech., Vol. 20, pp. 255-270, 1984.
  8. Tanaka, S., Ichikawa, M. and Akita, S., Eng.Frac.Mech., "A Probabilistic Investigation of Fatigue Life and Cumulative Cycle Ratio," Vol. 20, pp. 501-513, 1984.
  9. Baratta, F. I., Eng.Frac.Mech., "Stress Intensity Factors for Internal Multiple Cracks in Thick Walled Cylinders Stresses by Internal Pressure Using Load Relief Factors," Vol. 10, pp. 691-697, 1978.
  10. M. Isida, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, p. 56, 1973.
  11. B.Aamodt and P. G.Bergan, "On the Principle of Superposition for Stress Intensity Factors," Eng.Frac.Mech.,Vol. 8, pp. 437-440, 1976.
  12. W.F. Brown and J. E. Srawley after M. Isida, ASME, Special Technical Publication, No. 410.