

〈논 문〉

## 공간곡선 벡터에 의한 원통 코일 스프링의 동적거동 해석

### Dynamic Behavior Analysis of a Helical Coil Spring Using Space Curve Vector

김 대 원\* · 김 종 수\*\*  
Dae-Won Kim and Jong-Soo Kim

(1998년 2월 28일 접수 ; 1998년 10월 15일 심사완료)

**Key Words :** Helical Coil Spring(원통 코일스프링), Space Curve Vector(공간 곡선 벡터), Transfer Matrix(전달 행렬), Vibration of Coil Spring Axis' Direction(코일 스프링 축 방향 진동), Dynamic Spring Characteristic(동 스프링 특성)

#### ABSTRACT

This paper addresses the results of an experimental and analytical research of a helical coil spring subjected to dynamic behavior using space curve vector after considering elongation rate. Vibrations in helical coil spring can be divided into 3 modes such as vibrations of coil spring center axis' vertical direction, axis' horizontal direction, direction about center axis. However, these 3 modes are dependent one another and are characterized as coupled. The dependency was proved through both theoretically and experimentally analyzing the results of dynamic characteristics of coil spring center axis' vertical direction vibration by transfer matrix method using the governing equation of static equilibrium. Also this paper shows that pitch angle and active coils in coil spring affect the dynamic spring characteristics of the above 3 modes and are especially sensitive to the mode for vibration of axis' horizontal direction which most affects especially on dynamic stability of helical coil spring.

#### 1. 서 론

스프링은 기계의 기초적인 요소로서 오래전부터 많은 주목을 받아왔으며 스프링 응력문제<sup>(1~4)</sup> 및 동특성문제<sup>(5~13)</sup>에 대해 많은 연구가 발표되었다. 그것 중 스프링의 서징(surging)은 기계의 동적불안정성을 유발하기도 하고 구조물의 방사 한계 주파수

와 일치할 경우 스프링의 서징에 의한 구조 소음 발생이 큰 문제로 될 수 있는데도 불구하고 일반적으로 동특성 해석시 진동계의 구성요소인 질량, 댐퍼, 스프링에서 스프링을 질량이 없는 (massless)강성으로 간주한 정적 스프링 상수만을 고려함<sup>(5~7)</sup>으로 정확한 해석을 얻지 못하였다. 또한 많은 스프링의 동특성 연구에서 피치(pitch)각과 스프링 소재의 신율을 고려하지 않고 동특성 해석을 수행함으로써 고유진동수가 실제보다도 높은 이론적 해석값을 얻었고<sup>(8,9)</sup> 또 어떤 연구는 피치각을 고려해서 스프링의 고유진동수 및 고유 모드를 결정하는 시도도 있었지

\* 정회원, 기아정기 기술연구소

\*\* 한국기계연구원 산업기계그룹

만<sup>(10-13)</sup> 최저차의 고유진동수 이외는 충분히 해석 되어졌다고 보기 어려웠다. 공간곡선 벡터를 고려한 코일 스프링의 진동 모드는 스프링의 중심축에 대해서 축 방향의 진동, 축 주위의 진동 및 축 횡방향의 진동을 위주로 하는 3가지형의 진동 모드로 대별할 수 있다.

코일 스프링의 진동 모드를 이같이 나누어서 생각 할 경우 일반적으로 스프링축 방향 동특성의 고차(3 차) 고유진동수는 축 횡방향 진동의 최저차(1차) 고유진동과 연성되어 있고 또 다른 차수의 고유진동 수는 축 주위진동등과 연성하는 특성을 가지고 있다. 이러한 코일 스프링의 동특성 연구에서는 피치 각과 스프링 소재의 신율을 고려하여 연성되어 진동 하고 있는 코일 스프링의 정확한 동특성 해석의 수 행이 필요하다.

본 연구에서는 원통형 공간곡선 벡터를 이용한 지배방정식을 기초로 해서 field 행렬과 point 행렬을 산정한 매개함수해석을 통해 코일 스프링의 전달율 과 동특성 해석을 수행하였다. 또한 실험결과와의 비교검토로 해석 결과의 유효성을 고찰한다.

## 2. 이론해석

### 2.1 원통 코일 스프링의 공간벡터와 변형의 기하학적 관계

Fig. 1과 같이 스프링 코일선 단면의 중심선상의 임의점 P의 접선방향과 코일선 단면의 주축방향의 기본벡터를  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{t}$ 로 하고 곡률과 비틀림율을

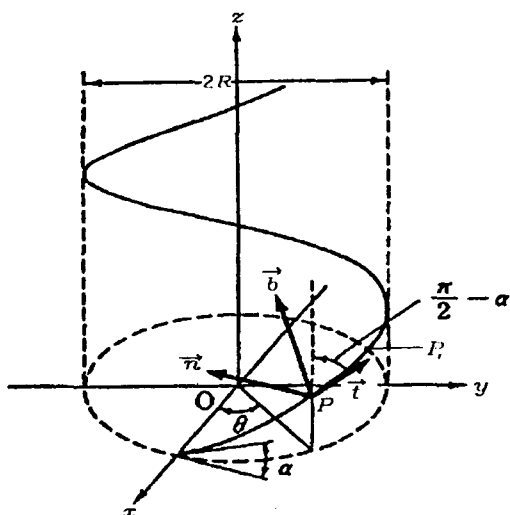


Fig. 1 Space vector of helical coil spring

$k, r$ 로 하면 공간곡선에 대한 frenet-seret 공식은 식(1)과 같이 임의의 점 P의 이동에 따른 기본벡터 들의 회전벡터  $\vec{D}$ 가 유도된다.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= r\vec{t} + k\vec{b} \\ \frac{d\vec{t}}{ds} &= \vec{D} \times \vec{t} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \vec{D} \times \vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= \vec{D} \times \vec{b} \end{aligned} \quad (1)$$

또한, 원통 코일 스프링의 공간벡터에 의해 곡률 과 비틀림율이 식 (2)와 같이 된다.

$$k = \frac{\cos^2 \alpha}{R} \quad (2a)$$

$$r = \frac{\sin 2\alpha}{2R} \quad (2b)$$

그리고 스프링 코일선의 임의점 P가 Fig. 1과 같 이 스프링 코일선의 중심선을 따라서 움직이면 기본 벡터계( $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{t}$ )가 회전한다. 또 코일 스프링이 변형하면 P점 부근의 코일 스프링의 거동은 P점의 이동과 강제화한 기본 벡터계의 회전에 의해 나뉘어진다. 코일 스프링 선단면의 중심선상의 임의점 P와  $\Delta s$  떨어진  $P_1$ 을 고려하여 코일 스프링 변형전 ( $P, P_1$ )과 변형후 ( $P', P'_1$ )에 대한 벡터해석을 하면 Fig. 2와 같다.

여기서 전단변형을 무시하고 변형후의 벡터  $\vec{PP}'_1$ 에 대해 정리하면 식 (3)과 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \vec{PP}'_1 &= \Delta s \vec{t} + \vec{u}_1 - \vec{u} \\ &= \Delta s \vec{t} + (u_1 - u)\vec{t} + (v_1 - v)\vec{n} + (w_1 - w)\vec{b} \\ &\quad + u_1(\vec{D} \times \vec{t}) + v_1(\vec{D} \times \vec{n}) + w_1(\vec{D} \times \vec{b}) \end{aligned} \quad (3)$$

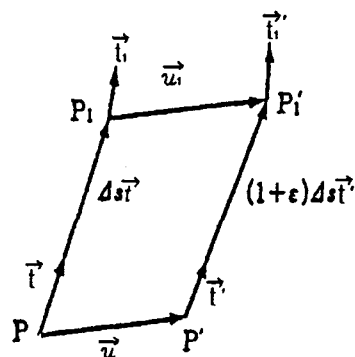


Fig. 2 Deformation of coil spring element

$$\overrightarrow{PP_1} = (1 + \epsilon)\Delta s \vec{t}' = (1 + \epsilon)\Delta s(\vec{t} + \vec{\omega} \times \vec{t}) \quad (4)$$

이러한 식들에서  $\Delta s \rightarrow 0$ ,  $u_1 \rightarrow u$ ,  $v_1 \rightarrow v$ ,  $w_1 \rightarrow w$ 하면 식 (5)와 같은 코일 스프링 선단면의 변형율에 관한 식이 유도된다.

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \epsilon \vec{t} + \vec{\omega} \times \vec{t} \quad (5)$$

여기서  $\vec{u} \equiv u\vec{t} + v\vec{n} + w\vec{b}$  ( $P$ 점의 변위 벡터)  
 $\vec{u}_1 \equiv u_1\vec{t}_1 + v_1\vec{n}_1 + w_1\vec{b}_1$  ( $P_1$ 점의 변위 벡터)  
 $\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}$  (변형전 기본 벡터),  
 $\vec{n}', \vec{b}', \vec{t}'$  (변형후 기본 벡터)  
 $\vec{\omega}$  (기본 벡터계가 변형전, 후 회전하는 각변위 벡터) 이다.

또한 코일 스프링의 공간 곡선적 특성을 고려한 변형전, 후의 회전 벡터들  $\vec{D}, \vec{D}'$ 와 변형에 의해 회전하는 각변위 벡터  $\vec{\omega}$ 에 대한 벡터 해석을 하면 그림 3과 같다. 여기서 코일 스프링선의 변형후 임의점  $P_1$ 에서 접선방향의 기본 벡터  $\vec{t}'_1$ 에 대해 정리하면 식 (6)과 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{t}'_1 &= \vec{t}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{t}_1 \\ &= [\vec{t} + (\vec{D}\Delta s) \times \vec{t}] + \left[\vec{\omega} + \frac{d\vec{\omega}}{ds} \Delta s\right] \\ &\quad \times [\vec{t} + (\vec{D}\Delta s) \times \vec{t}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \vec{t} + \vec{D} \times \vec{t} \Delta s + \vec{\omega} \times \vec{t} + \frac{d\vec{\omega}}{ds} \times \vec{t} \Delta s$$

$$\vec{t}'_1 = \vec{t} + \vec{\omega} \times \vec{t} + \vec{D}' \times \vec{t} (1 + \epsilon)\Delta s \quad (7)$$

이러한 식들은  $\vec{n}, \vec{b}$ 에 대해서도 같은 결과이므로 식 (8)이 유도된다.

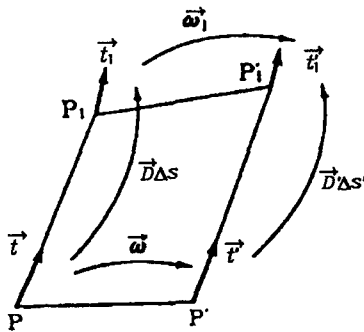


Fig. 3 Angle deformation of coil spring element

$$\vec{D}' - \vec{D} = \frac{d\vec{\omega}}{ds} \quad (8)$$

그리고 식 (5)와 식 (8)에 의해 식 (9)와 같은 코일 스프링의 공간적 특성을 고려한 회전벡터와 변형에 의한 각변위 벡터의 기하학적 관계가 구해진다.

$$\begin{aligned} \vec{D}' - \vec{D} &= \frac{d\vec{\omega}}{ds} = \frac{d\beta}{ds} \vec{t} + \beta(\vec{D} \times \vec{t}) \\ &\quad - \frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{u}}{ds} \times \vec{t} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\beta \equiv \vec{\omega} \cdot \vec{t}$  로  $\vec{t}$  축 주위의 주축 회전 각 변위이다.

### 2.2 원통 코일 스프링의 지배 방정식

관성항을 고려하여 스프링 요소에 작용하는 Fig. 4와 같은 힘과 모멘트의 평형에 관한 식은 다음과 같다.

$$\frac{d\vec{R}^*}{ds} = \rho A \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{R}^* = \rho A \frac{\partial^2 \vec{\omega}}{\partial t^2} \quad (11)$$

$$\text{단 } \vec{R}^* = T\vec{t} + N_1\vec{n} + N_2\vec{b}$$

$$\vec{M} = M_t\vec{t} + M_n\vec{n} + M_b\vec{b}$$

$\rho$  (코일 스프링 재료의 밀도)

$A$  (코일 스프링선 단면적)

$\vec{u} = u\vec{t} + v\vec{n} + w\vec{b}$  이다.

여기서 코일 스프링의 공간적 특성을 고려한 회전 벡터  $\vec{D}$ 에 대한 Frenet-serret공식을 이용하면 코일 스프링의 운동방정식은 식 (12)와 같이 유도된다.

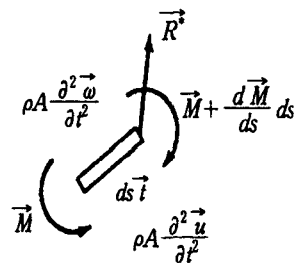


Fig. 4 Force and moment equilibrium of coil spring element

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial s} - KN_1 \quad (12a)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N_1}{\partial s} + KT - \tau N_2 \quad (12b)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial N_2}{\partial s} + \tau N_1 \quad (12c)$$

$$\rho I_t \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial M_t}{\partial s} - KM_n \quad (12d)$$

$$\rho I_n \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{\partial M_n}{\partial s} + KM_t - \tau M_b - N_2 \quad (12e)$$

$$\rho I_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_b}{\partial s} + \tau M_n + N_1 \quad (12f)$$

또한 단면력  $T$  및 단면 모멘트  $M_t, M_n, M_b$ 들과 변위 및 각변위들 사이의 관계식은 식 (13)을 이용하면 식 (14)와 같이 유도된다.

$$\frac{d\vec{u}}{ds} \cdot \vec{t} = \vec{\Phi} \cdot \vec{R} \quad (13a)$$

$$\vec{D} - \vec{D} = \vec{\Psi} \cdot \vec{M} \quad (13b)$$

$$T = EA \left( \frac{\partial u}{\partial s} - Kv \right) \quad (14a)$$

$$M_t = GI_t \left( \frac{\partial \beta}{\partial s} + K \frac{\partial w}{\partial s} + K\tau v \right) \quad (14b)$$

$$M_n = -EI_n \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2\tau \frac{\partial v}{\partial s} - K\beta - \tau^2 w + K\tau v \right) \quad (14c)$$

$$M_b = EI_b \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + K \frac{\partial u}{\partial s} - 2\tau \frac{\partial w}{\partial s} - \tau^2 v \right) \quad (14d)$$

단 여기서  $\vec{\Phi} = \frac{\vec{t}}{EA}$

$$\vec{\Psi} = \frac{\vec{t}}{GI_t} + \frac{\vec{nn}}{EI_n} + \frac{\vec{bb}}{EI_b}$$

$E$  (코일 스프링 재료의 영율)

$I_t$  (극단면 2차 모멘트), 이다.

$I_n, I_b$  (단면 2차 모멘트)

그리고  $n$ 축,  $b$ 축의 각변위들과 곡률 및 비틀림율은 식 (15)와 같다.

$$\delta = - \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \tau v \right) \quad (15a)$$

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial s} + Ku - \tau w$$

$$K = \frac{\cos^2 \alpha}{R}, \quad \tau = \frac{\sin 2\alpha}{2R}, \quad \frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{R}{\cos \alpha} \quad (15b)$$

### 2.3 Field 행렬

관성항을 zero로 하는 정적 평행상태에서 식(12a) ~ 식 (12c)로부터  $T$ 와  $N_2$ 를 소거하여 정리하면

$$\left( \frac{\partial^2 N_1}{\partial \theta^2} \right) + N_1 = 0 \quad (16)$$

이다. 또한 식 (12c) ~ 식 (12f)로부터  $M_t, M_b, N_2$ 를 소거하여 정리하면

$$\left( \frac{\partial^2 M_n}{\partial \theta^2} \right) + M_n = -(2\gamma \tan \alpha) N_1 \quad (17)$$

이고 식 (14)를 이용하면

$$KN_1 = EA \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - K \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (18a)$$

$$KM_n = GI_t \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + K \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + K\tau \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (18b)$$

$$M_n = -EI_b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2\tau \frac{\partial v}{\partial s} - K\beta - \tau^2 w + K\tau v \right) \quad (18c)$$

$$-\tau M_n - N_1 = EI_n \left( \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} + K \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \tau^2 \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (18d)$$

와 같고 이러한 식 (18)로부터  $u, w, \beta$ 를 소거해서 정리하면 주법선 방향  $\vec{n}$ 의 변위와 단면력 및 모멘트에 관한 관계식은

$$\frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R^2}{EI_b} (RC_1 N_1 + C_2 M_n) \quad (19)$$

로서 표현된다.

여기서

$$C_1 = (4/\cos \alpha)(1 + I_b/I_n) \tan^2 \alpha \quad (20)$$

$$C_2 = (2EI_n/GI_t) \sin \alpha + (2 \tan \alpha) / \cos \alpha + (2I_n/I_b) \sin \alpha \cdot \tan^2 \alpha$$

이다. 본 연구에서 원형 단면만을 고려할 경우 단면 2차 극모멘트  $I_t$ 는 다음과 같다.

$$I_t = 2I_n = 2I_b \quad (21)$$

따라서 식 (21)을 고려해서 식 (20)을 다시 정리하면

$$C_1 = (8/\cos \alpha) \cdot \tan^2 \alpha \quad (22)$$

$$C_2 = (E/G) \cdot \sin \alpha + 2 \sin \alpha \tan^2 \alpha + (2 \tan \alpha) / \cos \alpha$$

이다. 식 (16), 식 (17), 식 (19)으로부터  $v, N_1$ ,

$M_n$ 를 순차적으로 해석하고 그 결과식중  $N_1$ 과  $M_n$ 를 식 (12a)와 식 (12b)에 대입해서 다른 단면력  $T, N_2$ 를 구하고 또한 식 (12d)와 식 (12f)로부터  $M_i, M_b$ 를 구한다.

위에서 구한 단면력 및 단면 모멘트를 식 (14)에 대입하여 변위  $u, w$ 와 각변위  $\beta$ 를 구하고 식 (15a)을 이용하여 남은 각변위  $\delta$ 와  $\phi$ 를 해석한다. 해석에서 얻어진 변위, 각변위, 단면력, 단면 모멘트를 대표하중  $Q_0$ 를 이용하여 무차원화하면 다음과 같다.

$$\left[ \begin{array}{l} u^* = \frac{EI_b}{Q_0 R^3} u, v^* = \frac{EI_b}{Q_0 R^3} v, w^* = \frac{EI_b}{Q_0 R^3} w \\ \beta^* = \frac{EI_b}{Q_0 R^2} \beta, \delta^* = \frac{EI_b}{Q_0 R^2} \delta, \phi^* = \frac{EI_b}{Q_0 R^2} \phi \\ T^* = T/Q_0, N_1^* = N_1/Q_0, N_2^* = N_2/Q_0 \\ M_i^* = M_i/Q_0, M_n^* = M_n/Q_0, M_b^* = M_b/Q_0 \end{array} \right] \quad (23)$$

식 (23)을 이용하여 각도  $\theta$ 에서의 상태 벡터  $X(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$X(\theta) = G(\theta) \cdot E \quad (24)$$

여기서

$$X(\theta) = [u^* v^* w^* \beta^* \delta^* \phi^* T^* N_1^* N_2^* M_i^* M_n^* M_b^*]^T$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} G_{1,1} & \dots & \dots & \dots & G_{1,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{12,1} & \dots & \dots & \dots & G_{12,12} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

이다. 또한  $G(\theta)$ 는 해 행렬이고  $E$ 는 적분정수 행렬이다.

기본요소로서 각도  $0 \sim \theta_i$ 의  $i$ 번째 코일 스프링 요소를 고려하면

$$\theta = 0 \rightarrow X(0) = X_{i-1}$$

$$\theta = \theta_i \rightarrow X(\theta_i) = X_i$$

로 되고 이것을 이용해서 미지의 적분정수 행렬을 소거하면 다음과 같이 field 행렬이 유도된다.

$$X_i = G(\theta_i)G(0)^{-1}X_{i-1} = F_i X_{i-1}$$

$$F_i = G(\theta_i) \cdot G(0)^{-1} \quad (26)$$

### 2.4 Point 행렬

절점의 좌우의 관계식은 코일 스프링선상의 변위

단면의 각변위가 연속함으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i^R &= u_i^L, v_i^R = v_i^L, w_i^R = w_i^L \\ \beta_i^R &= \beta_i^L, \delta_i^R = \delta_i^L, \phi_i^R = \phi_i^L \\ T_i^R &= T_i^L + m_i(\partial^2 u_i / \partial t^2)_i^L \\ N_{1i}^R &= N_{1i}^L + m_i(\partial^2 v_i / \partial t^2)_i^L \\ N_{2i}^R &= N_{2i}^L + m_i(\partial^2 w_i / \partial t^2)_i^L \\ M_{ii}^R &= M_{ii}^L + J_i(\partial^2 \beta / \partial t^2)_i^L \\ M_{ni}^R &= M_{ni}^L + J_n(\partial^2 \delta / \partial t^2)_i^L \\ M_{bi}^R &= M_{bi}^L + J_b(\partial^2 \phi / \partial t^2)_i^L \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $m_i$ 는 절점의 질량이다.

위식에 식 (23)과  $\gamma = \omega R \sqrt{\rho/G}$ 를 이용하여 무차원화하면 절점  $i$ 의 우측  $R$ 과 좌측  $L$ 을 결합한 행렬은 식 (28)과 같다.

$$X_i^R = P_i X_i^L \quad (28)$$

여기서 point 행렬은

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1,1} & \dots & \dots & \dots & P_{1,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{12,1} & \dots & \dots & \dots & P_{12,12} \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

### 2.5 전달함수 해석

절점의 point 행렬과 field 행렬을 이용한 코일 스프링의 전달 행렬은 다음과 같다.

$$\text{즉 } X_i = T X_0 \quad (29)$$

$$\text{여기서 } T = P_i F_{i-1} P_{i-1} \dots \dots \dots F_2 P_1 F_1 \quad (30)$$

이고, 그러므로 전달 행렬  $T$ 는 식 (31)과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & \dots & A_{1,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{12,1} & \dots & \dots & \dots & A_{12,12} \end{bmatrix} \quad (31)$$

## 3. 실험적 해석

### 3.1 실험장치

실험장치를 Fig. 5와 같이 원통 코일 스프링의 코일선 주위에 원주방향으로  $60^\circ$  간격으로 각점에 대해  $\vec{n}, \vec{b}, \vec{t}$  축 방향으로 스트레인 게이지( $\phi 1.0$  mm)들을 부착시켜서 가진기에 의한 주파수 변환에

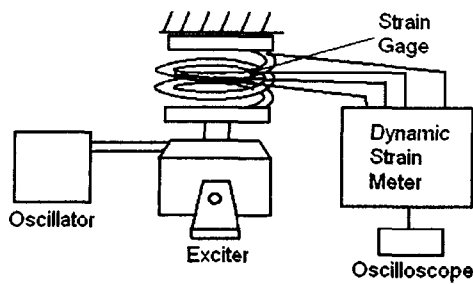


Fig. 5 Block diagram of experimental set up

따른 동적변형률 디지털 오실로스코프로 측정해서 가진주파수별 동스프링 특성을 해석했다. 이러한 측정에 사용된 스트레인 게이지는 각 점당 모델명 KFG-1-120B(두축)1개와 KFG-1-120A(단축)1개를 사용해서 36 point들에 사용되었다.

3.2 실험결과

Table 1과 같은 원통형 코일 스프링을 이용하여 Fig. 5와 같은 실험장치에 의한 실험결과와 전달함수 해석에 의한 이론적 해석 결과 ( $\alpha=4.8^\circ$ 인 경우)가 Table 2와 Fig. 6에서 매우 잘 일치하고 있음을 나타내고 있다. 이러한 Fig. 6의 결과는 가진 주파수별 축 종방향( $\vec{b}$ 축방향)의 변형률크기를 분석한 결과이다.

그리고 이런 신뢰성이 검증된 이론적 해석 프로그램에 의해 원통형 코일 스프링의 피치각이 없는 경우( $\alpha=0^\circ$ )와 있는 경우에 대해 Table 3 과 같이 비교했을 때 1st, 2nd 공진 주파수에서만 근접한 결과를 나타내지만 보다 높은 차수에서는 큰 차이가

Table 1 Physical data of coil spring

Wire radius(d)	0.002 m
Mean radius(R)	0.013 m
Active coils(N)	6.5
Coil Pitch angle( $\alpha$ )	$4.8^\circ$
Young's modulus(E)	210 GPa
Shear modulus(G)	80 GPa
Density( $\rho$ )	7.79 Mg/m <sup>3</sup>
Poisson's ratio( $\nu$ )	0.5

있으므로 원통형 코일 스프링의 피치각을 고려치 않는 것은 동적 거동 해석의 신뢰성을 저하시킬 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 5와 같은 실험장치를 이용하여 원통 코일 스프링에 원주방향의  $60^\circ$  간격으로 세 축 방향의 스트레인 게이지( $\varnothing 1 \text{ mm} \times 3$ 개)를 설치해서 Fig. 6에서 나타난 공진 주파수들로 가진했을 때 나타나는 각점들의 변형률을 최대값에 대해 무차원화하여 실험을 통한 Fig. 7과 같은 원통 코일 스프링의 축 종방향( $\vec{b}$ ) 모드 (translation mode)와 축 횡방향( $\vec{n}$ ) 모드 (bending mode) 및 축 주위 방향( $\vec{t}$ ) 모드 (torsion mode)에 대해 분석을 했다.

Fig. 7에 잘 나타나 있는 것과 같이 Fig. 6과 같은 원통 코일 스프링의 축 종방향 mode가 축 횡방향(3rd, 4th order) 및 축 주위 방향(2nd, 6th order) 모드에 연성되어 있음을 나타내고 있다. 결국 원통형 코일 스프링의 동적거동은 축 종방향, 축 횡방향, 축 주위방향의 동 스프링 특성이 상호 연성되는 특성을 가지고 있음이 입증된다.

Table 2 Natural frequency comparision of theoretical and experimental results

Order	Theoretical values	Experimental values
1	324 Hz	321 Hz
2	360 Hz	362 Hz
3	406 Hz	403 Hz
4	411 Hz	415 Hz
5	635 Hz	635 Hz
6	670 Hz	671 Hz

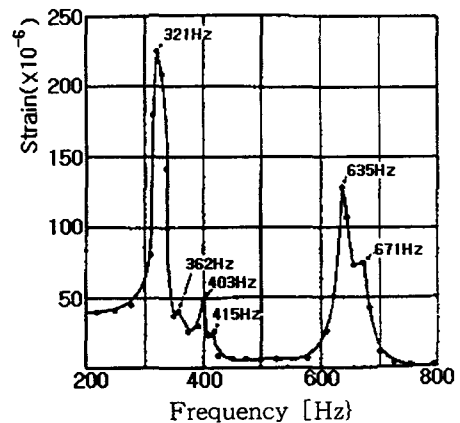
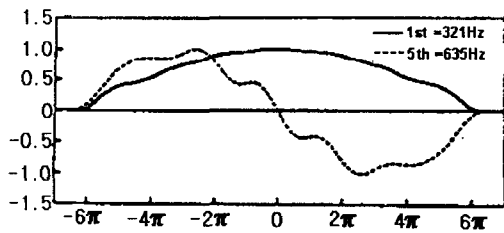


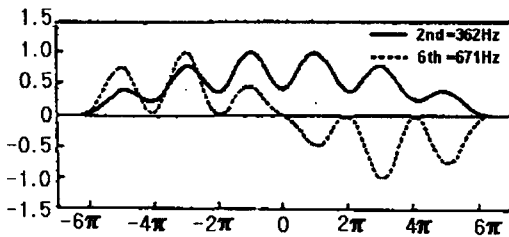
Fig. 6 Experimental results

Table 3 Dimensionless natural frequency of coil spring by theoretical analysis

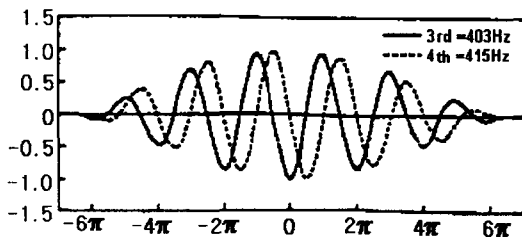
Order	$r (\alpha=4.8^\circ)$	$r (\alpha=0^\circ)$
1	0.00825	0.00813
2	0.00916	0.00926
3	0.01035	0.01218
4	0.01048	0.01223
5	0.01619	0.01313
6	0.01708	0.01325



(a) Translation mode ( $w$ )



(b) Torsion mode ( $u$ )



(c) Bending mode ( $v$ )

Fig. 7 Dimensionless natural mode of coil spring

### 5. 결 론

본 연구에서는 원통형 코일 스프링의 피치각과 스프링 소재의 신율을 고려한 정적 평행상태의 해석해를 이용한 전달 행렬법에 의해 코일 스프링의 동적

거동 해석을 수행함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 코일 스프링의 기하학적 변형과 공간곡선벡터를 고려하여 동스프링 특성 해석을 위해 필요한 전달행렬법의 field 행렬과 point 행렬을 정의하고 코일 스프링의 축 종방향 동스프링 특성의 해석결과와 실험결과의 비교를 통해 전달 행렬법에 의한 동적거동해석 프로그램의 신뢰성을 입증했다.

(2) 코일 스프링의 축 종방향( $\vec{b}$ ) 모드는 축 횡방향( $\vec{n}$ ) 및 축 주위방향( $\vec{t}$ ) 모드와 연성하는 특성을 가지고 있다. 또한 코일 스프링의 피치각에 대한 고려 여부는 원통형 코일 스프링의 동적거동해석에 큰 영향을 미칠 수 있다.

(3) 일반적 진동 시스템에서 스프링이 포함될 경우 스프링에 대한 동적거동해석을 고려치 않으면 해석결과의 신뢰성에 큰 오차가 발생할 수도 있다.

향후 과제는 코일 스프링의 피치각이 일정하지 않는 다든지 스프링의 형태가 원통형이 아닌 다른 형상인 경우의 동적거동특성과 코일 스프링 축방향이 아닌 경사진 방향으로 외력이 부하될 경우 등에 대한 동적거동해석이 더욱 심도있게 연구되어져 진동 시스템 해석에서 너무나 기본적이다보니 쉽게 취급되어지는 코일 스프링의 동적거동해석의 체계가 확립되어지는 것이다.

### 참 고 문 헌

- (1) Wahl, A. M., 1929, "Stresses in Heavy Closely Coiled Helical Spring", ASME Journal, APM-51-17.
- (2) Yoshihiro, H., and Masayoshi., 1982, "Stress Analysis of Cylindrical Coil Spring", JSME Journal, Vol. 48, No. 435, pp. 1774~1777.
- (3) K. Nagaya, 1984, "임의 형상 단면의 원통 Coil Spring의 응력해석", JSME Journal, No. 84, pp. 138~145.
- (4) 下關正義 and 岩崎歳夫, 1979, "Analysis of Compression Coil Spring Using Matrix Methods", JSME Journal, Vol. 45, No. 396, pp. 901~909.
- (5) C. Bagci and S. Kurnool, 1994, "Exact Response Analysis and Dynamic Design of Cam Follower Systems Using Laplace Transforms", Advances in Design Automation (ASME),

- Vol. 1, pp. 613~629.
- (6) S. Mercer and A. R. Holowenko, "1958, Dynamic Characteristics of Cam Forms Calculated by Digital Computer", ASME Transactions, Vol. 36, No. 8, pp. 1695~1705.
- (7) G. K. Mathew and D. Tesar, 1976, "Cam System Design : The Dynamic Synthesis and Analysis of the One Degree of Freedom Model", Mechanism and Machine Theory, Vol. 4, pp. 247~257.
- (8) Stewart, E. E., and Johnson, B. L., 1968, "Transfer Functions for Helical Compression Springs", General Motors Engineering Publication, No.A~2235.
- (9) Stewart, E. E., and Johnson, B. L., 1969, "Transfer Functions for Helical Springs", ASME, Vol. 47.
- (10) Yashinaga, A., and Inoue, J., 1991, "On the Static and Dynamic Behavior of Coil Springs (Free Vibration)", JSME Journal, Vol. 27, No. 179, pp. 1130~1137.
- (11) Shimizu, H., and Inoue, J., 1971, "On the Static and Dynamic of Coil Springs(The end effect)", JSME Journal, Vol. 27, No. 179, pp. 1119~1129.
- (12) Hidaka, T., and Shimizu, H., 1976, "On the Static And Dynamic Behavior of Coil Springs (Forced Vibration)", JSME Journal, Vol. 32, No. 242, pp. 1138 ~1146.
- (13) Fukushima, Y., and Sawanobori, T., 1993, "Analysis of Helical Coil Spring Dynamic Characteristics using Fnite Element Method", JSME Journal, Vol. 49, No. 439, pp. 422~430.