

<논 문>

집중 질량을 가진 회전하는 외팔 평판의 진동 해석

Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates with a Concentrated Mass

양 정 식* · 유 홍 희**

Jung Sik Yang and Hong Hee Yoo

(1998년 8월 22일 접수 ; 1998년 9월 30일 심사완료)

Key Words : Vibration Analysis (진동 해석), Rotating Cantilever Plates (회전 외팔 평판), Concentrated Mass (집중 질량), Natural Frequency and Mode Shape Variations (고유진동수 및 모드형상 변화), Dimensionless Variables and Parameters (무차원 변수와 매개변수)

ABSTRACT

A modelling method for the vibration analysis of rotating cantilever plates with a concentrated mass is presented. The equations of motion for the rotating plates with a concentrated mass located in an arbitrary position are derived and transformed into a dimensionless form. For the mathematical modelling of the concentrated mass, a mass density Dirac delta function is used. The effects of concentrated mass and its location, angular speed, plate aspect ratio, and hub radius of the rotating plate on the natural frequencies are studied. Particularly, mode shape variations due to some parameter variations are investigated.

1. 서 론

회전하는 외팔보 형태를 갖는 구조물은 실제적인 여러 공학적 예제들에서 발견될 수 있는데 그 대표적인 구조물로는 헬리콥터나 터빈에 사용되는 블레이드가 있다. 회전운동은 원심 관성력을 발생시켜 구조강성의 변화를 가져오며, 이는 구조 진동특성의 변화로 연계된다. 회전하는 구조물 중 외팔보의 진동에 관한 연구는 1920년대 초부터 시작된 것으로 알려져 있는데 참고문헌 (1~5)는 이 분야의 많은 문헌 중 대표적인 일부 문헌이다.

해석을 위해 많은 회전 구조물들이 외팔보로 이상

화되나, 어떤 구조물들은 경우에 따라 그 형태가 보라기보다 평판에 가깝다. 예를 들어, 종횡비가 작은 터어빈 블레이드의 경우는 그 동적특성이 평판에 더 가까울 것이며, 이 경우에 구조물을 보로 이상화하여 해석을 수행한다면 당연히 실제와 상당한 오차를 초래하게 될 것이다. 따라서 회전하는 평판의 정확한 모델링 및 진동해석의 필요성이 제시된다.

회전하는 평판의 진동에 관한 참고문헌의 수는 회전 외팔보의 경우에 비해 현저히 적은 편이다 [예를 들어, 참고문헌 (6, 7)]. 이들은 주로 유한요소법을 사용하고 있으며 정상상태에서 원심력과 평형을 이루는 응력을 사용해 정방형 탄성에너지를 구하고, 이에 근거하여 강성행렬을 구함으로써 회전에 따른 진동특성 변화를 예측하고 있다. 그러나 이러한 방법은 정상상태의 응력을 먼저 구한 후 이를 다시 대입해야 하는 2단계 과정으로 되어 있어 그 유도과정

* 한양대학교 대학원

** 정희원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

의 간명성이 부족하다. 참고문헌 (8~10)에서는 이러한 방법과는 달리 복합 변형변수를 이용하여 강제 운동을 하는 외팔평판의 선형 운동방정식을 유도하였다. 이 모델링 방법은 앞 문헌들에 의한 방법들과 동일하게 효과적이거나 유도과정 및 수치해석을 위한 간명성에서 훨씬 효율적임을 보여주고 있다. 본 논문에서는 이 방법에 근거한 운동방정식을 유도하고 진동 해석을 실시하였다.

본 연구의 목적은 집중질량을 가진 외팔 평판의 회전에 따른 고유진동수와 모드형상의 변화를 조사하고 집중 질량 효과가 그들에 미치는 영향을 고찰하는 데 있다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 참고문헌 (10)에 근거한 운동방정식을 소개하고, 이를 무차원화된 진동방정식 형태로 변환하였다. 3장에서는 2장에서 유도된 진동방정식에 근거하여 Rayleigh-Ritz 가상 모드법을 사용해서 수치해석을 실시하고 결과를 수록하였다. 마지막으로 4장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

2. 진동 방정식

Fig. 1은 축반경 r 인 강체봉에 부착된 두께 h , 가로 a , 세로 b 의 직사각형 외팔 평판의 모습을 보여준다. 이 평판은 임의의 위치인 (c, d) 에 집중질량 m 을 가지며 각속도 Ω 로 회전하고 있다. 이 평판의 단위면적당 질량을 ρ_p , 포아손비를 ν , 굽힘강성계수를 D 라 하면 시스템의 운동 방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다 [참고문헌 (10) 참조].

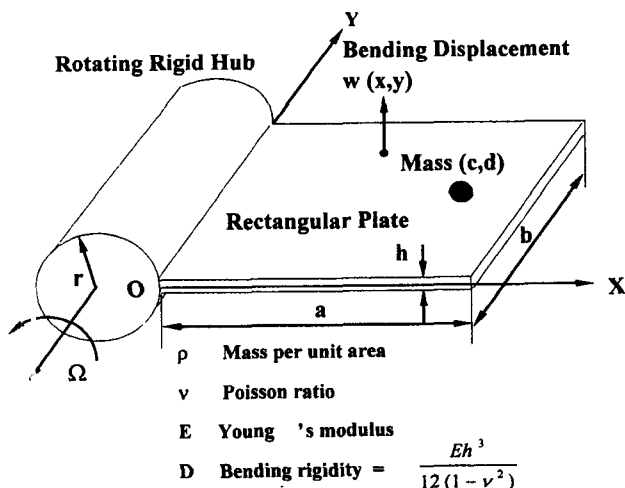


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever plate with a concentrated mass

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p \phi_i \phi_j dx dy + m \phi_i(c, d) \phi_j(c, d) \right\} \bar{q}_j \right. \\
 & - \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p \phi_i \phi_j dx dy + m \phi_i(c, d) \phi_j(c, d) \right\} q_j \\
 & + \left\{ \int_0^b \int_0^a D (\phi_{i,xx} \phi_{j,xx} + \phi_{i,yy} \phi_{j,yy} + \nu \phi_{i,xx} \phi_{j,yy} \right. \\
 & + \nu \phi_{i,yy} \phi_{j,xx} + 2(1-\nu) \phi_{i,xy} \phi_{j,xy}) dx dy \left. \right\} q_j \\
 & + r \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p (a-x) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right. \\
 & + m \int_0^c \phi_{i,x}(x, d) \phi_{j,x}(x, d) dx \left. \right\} q_j \\
 & + \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \frac{\rho_p}{2} (a^2 - x^2) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right. \\
 & \left. + mc \int_0^c \phi_{i,x}(x, d) \phi_{j,x}(x, d) dx \right\} q_j = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$(i=1, 2, \dots, \mu)$

여기서 μ 는 사용된 모드의 개수이며 아래 첨자중 콤마 뒤에 나타나는 것들은 이에 대한 편미분을 의미한다. 예를 들어 $\phi_{i,xx}$ 는 ϕ_i 를 x 로 두 번 편미분한 것을 의미한다. ϕ_i 와 q_j 는 평판의 굽힘방향 변위 w 를 표시하기 위해 사용되는 모드 함수와 일반 좌표들이며 상호간 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\mu} \phi_j(x, y) q_j(t) \tag{2}$$

식 (1)은 참고문헌 (11)에 나타난 집중 질량의 영향을 고려한 외팔보의 운동 방정식과 유사성을 가지고 있으며, 회전각속도의 절대값인 Ω 와 관련된 3개의 항들을 포함하고 있다. 이 항들중 첫째항은 Ω 의 증가에 따라 강성을 감소시키는 역할을 하는 데 반해, 둘째와 셋째항은 Ω 의 증가에 따라 강성을 증가시키는 역할을 한다.

식 (1)을 무차원화된 형태로 만들기 위해 무차원 변수와 무차원 매개변수, 그리고 함수들을 다음과 같이 정의하여 사용한다.

$$\begin{aligned}
 \tau & \equiv \frac{t}{T} \\
 \xi & \equiv \frac{x}{a} \\
 \eta & \equiv \frac{y}{b} \\
 \gamma & \equiv \frac{c}{a} \\
 \delta & \equiv \frac{d}{b} \\
 z_j & \equiv \frac{q_j}{a} \\
 \alpha & \equiv \frac{m}{\rho_p ab}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{a}{b} \\ \omega &\equiv \frac{\Omega_r}{\Omega_r} \\ \sigma &\equiv \frac{\gamma}{a} \\ \psi_i(\zeta, \eta) &\equiv \phi_i(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 Ω_r 과 T 는 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\Omega_r = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{\rho_p a^4}}$$

식 (3)과 (4)를 이용하면 식 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\mu} \left[\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \right\} \ddot{z}_i \right. \\ \left. - \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \right\} z_j \right. \\ \left. + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\zeta\zeta} + \lambda^4 \psi_{i,\eta\eta} \psi_{j,\eta\eta} + \nu \lambda^2 \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\eta\eta} \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \lambda^2 \psi_{i,\eta\eta} \psi_{j,\zeta\zeta} + 2(1-\nu) \lambda^2 \psi_{i,\zeta\eta} \psi_{j,\zeta\eta}) d\zeta d\eta \right\} z_j \right. \\ \left. + \omega^2 \alpha \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-\zeta) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} z_j \right. \\ \left. + \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\zeta^2) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \gamma \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} z_j \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

($i=1, 2, \dots, \mu$)

식 (6)을 이용해 회전 외팔 평판의 진동해석을 수행하기 위해서 무차원화된 일반좌표행렬을 다음과 같은 조화함수로 나타낸다.

$$\underline{z} = e^{j\omega_n t} \underline{Z} \quad (7)$$

여기서 \underline{z} 은 z_j 를 요소로 갖는 기동행렬이며, ω_n 은 고유진동수를 Ω_r 로 나눈 무차원수를 나타내고, \underline{Z} 는 각 고유진동수에서의 모드형태를 나타내는 기동행렬이다. 식 (7)에서 j 는 허수 (imaginary number)를 나타내는 기호로 사용되고 있다. 식 (7)을 식 (6)에 대입해 정리하면 다음 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\omega_n^2 MZ = KZ \quad (8)$$

여기서 M 과 K 는 $\mu \times \mu$ 의 크기를 갖는 정방행렬로 그 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} K_{ij} = -\omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \right\} \\ + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\zeta\zeta} + \lambda^4 \psi_{i,\eta\eta} \psi_{j,\eta\eta} \right. \\ \left. + \nu \lambda^2 \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\eta\eta} + \nu \lambda^2 \psi_{i,\eta\eta} \psi_{j,\zeta\zeta} \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \lambda^2 \psi_{i,\zeta\eta} \psi_{j,\zeta\eta}) d\zeta d\eta \right\} \\ + \omega^2 \alpha \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-\zeta) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\ \left. + \alpha \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} \\ + \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\zeta^2) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\ \left. + \alpha \gamma \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

3. 해석 결과 및 토의

본장에서는 2장에서 유도된 진동방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 모드함수들은 가로 세로 방향 보 함수를 이용해서 구하며 이 과정은 참고 문헌 (13~15)에 잘 나타나 있다. 본 논문과 관련되어 사용된 보 함수 (beam function) 개수는 가로

Table 1 Comparison of the lowest five non-dimensional natural frequencies ($\sigma=0, \gamma=1, \delta=0.5$)

Cases	Mode	$\alpha=0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.5$
$\omega=1$	1	3.5157	2.6093	2.0207
	2	8.5328	8.5328	8.5328
	3	21.5207	15.6994	14.1047
	4	27.3529	26.1481	26.0777
	5	31.2062	31.2062	31.2062
$\omega=2$	1	3.5904	2.7141	2.1496
	2	8.5507	8.5507	8.5507
	3	21.8679	16.0468	14.6046
	4	27.3843	26.4244	26.5851
	5	31.4770	31.4770	31.4770
$\omega=10$	1	5.0491	4.1949	3.5714
	2	9.0322	9.0322	9.0322
	3	26.7608	20.1175	18.6652
	4	32.3499	36.2398	39.0776
	5	39.0776	39.0776	39.6905

방향 5개, 세로 방향 7개며 따라서 총 35개의 평판 모드들이 사용된 것이다. 본 논문에서는 평판의 가장 낮은 5개의 고유진동수 및 모드형상만을 관찰하려 하므로, 여기서 사용된 모드개수는 수치해석결과와 수렴에 충분한 것이라 판단된다.

Table 1과 2에서는 회전축 반경비 σ 가 각각 0과 1일 때, 3가지 집중질량 크기와 3가지의 회전 각속도의 경우에 대해 정사각형 외팔평판의 가장 낮은 5개의 고유진동수들을 비교하고 있다. 직관적으로 예측되듯이 집중질량의 증가는 고유진동수의 감소를 초래한다. 그러나 네 번째 고유진동수 변화를 살펴보면 α 값 증가가 회전시 고유진동수의 증가율을 오히려 더 커지게하여 어느 이상의 회전각속도에 다다르면 더 큰 고유진동수 값을 갖게 되는 것을 관찰할 수 있다. 또한 집중질량이 $\gamma=1, \delta=0.5$ 의 위치에 주어진다면 동일 회전각속도에 대하여 α 값은 두 번째의 고유진동수 값에 아무런 영향을 미치지 못하는 것을 알 수 있다. 이것은 2번째 모드가 비대칭 모드로 중앙선을 절선으로 가지고 있어서 집중질량이 그곳에 놓여도 회전에 따른 절선 변화가 일어나지 않기 때문이다. 이러한 현상은 5번째 모드에도 유사하게 나타나나 5번째 모드는 세로 방향 절선을 가지므로 회전 각속도가 작을 때는 2번째 모드와 유사하게 고유진동수가 일정하게

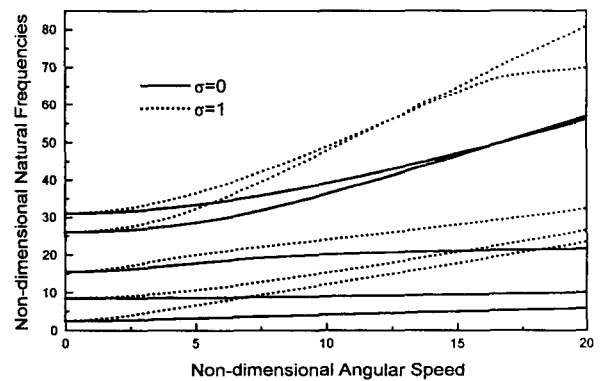
유지되나 회전각속도가 더 커지게 되면 고유진동수가 변화하게 된다.

Fig. 2는 두 경우의 α 값에 대하여 회전각속도의 증가에 따른 가장 낮은 다섯 개의 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 직선은 축반경의 평판길이에 대한 비가 0인 경우이고 점선은 그 비가 1인 경우이다. 이 결과는 회전 각속도의 증가가 모든 고유진동수의 증가를 초래하는 것을 보여주며, 축반경의 증가는 이 현상을 가속시키는 것을 보여준다. 집중질량 효과가 고려되지 않은 ($\alpha=0$) 경우에 대해서는 참고문헌 (12)에 그 결과가 자세히 언급되어 있다. 이 그림은 또한 무회전시 네 번째 고유진동수가 회전시 큰 고유진동수 증가율로 인하여 어느 회전각속도에 이르면 기존의 다섯 번째 고유진동수의 값보다 커지게 된다는 것을 보여주는데, 이 현상은 집중질량 α 와 회전축 반경비 σ 가 클수록 더 낮은 회전각속도에서 나타나는 것을 보여준다.

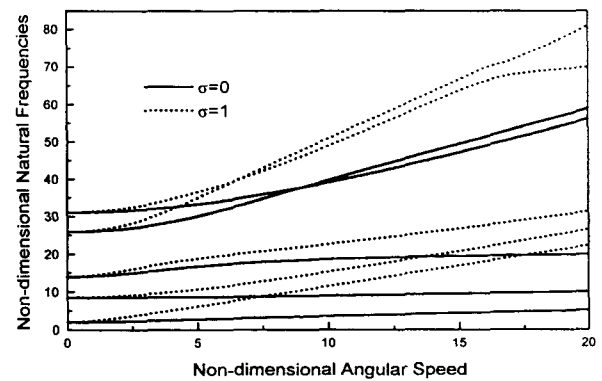
Fig. 3은 집중질량이 $\delta=0.5$ 인 정사각형의 중앙

Table 2 Comparison of the lowest five non-dimensional natural frequencies ($\sigma=1, \gamma=1, \delta=0.5$)

Cases	Mode	$\alpha=0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.5$
$w=1$	1	3.7424	2.8633	2.3208
	2	8.6240	8.6240	8.6240
	3	21.7067	15.8792	14.3434
	4	27.3941	26.2836	26.2925
	5	31.3502	31.3502	31.3502
$w=2$	1	4.3805	3.5887	3.1214
	2	8.9087	8.9087	8.9087
	3	22.5802	16.6915	15.3960
	4	27.5565	26.9810	27.4526
	5	32.0430	32.0430	32.0430
$w=10$	1	13.2727	12.1946	11.5311
	2	15.3109	15.3109	15.3109
	3	29.7924	24.0589	22.6982
	4	43.2890	47.7297	48.8505
	5	48.8505	48.8505	50.8312



(a) $\alpha=0.2, \gamma=0.1, \delta=0.5$



(b) $\alpha=0.5, \gamma=1.0, \delta=0.5$

Fig. 2 Variations of the lowest five non-dimensional natural frequencies for square plates

선을 따라 바깥으로 이동할 때, 첫 번째 고유진동수에 미치는 집중질량 크기 및 그 위치의 영향을 보여주는데 집중질량 크기가 증가할수록 고유진동수의 변화폭이 커지게됨을 알 수 있다. 또 특기할 만한 사항은 집중질량이 바깥으로 이동함에 따라 어느 정

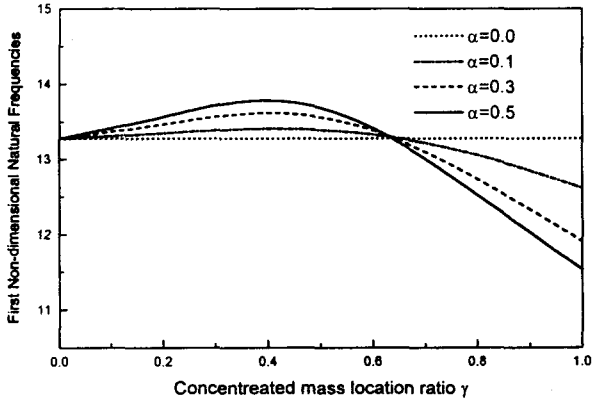
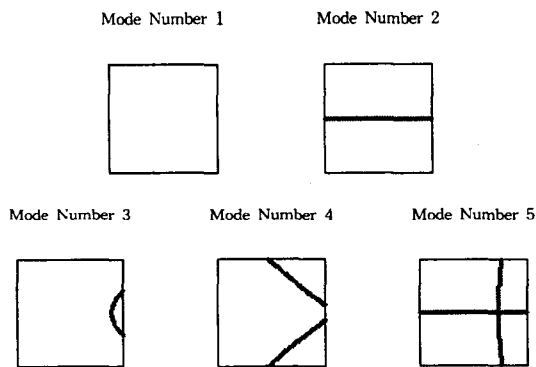
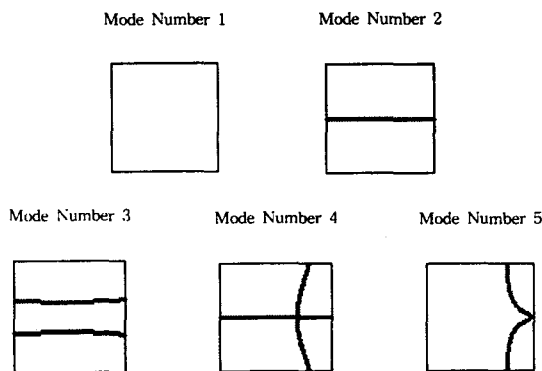


Fig. 3 Concentrated mass magnitude effect on the first non-dimensional natural frequency



(a) Lowest five mode shapes without rotation



(b) Lowest five mode shapes with rotation

Fig. 4 Nodal line patterns of lowest five mode shapes for square plates with a concentrated mass ($\alpha=0.5, \gamma=1.0, \delta=0.5$)

도까지는 고유진동수가 상승하다가 다시 감소하는 현상을 보여주는 것이며 α 값에 관계없이 고유진동수가 같아지는 집중질량의 위치가 존재한다는 점도 흥미로운 점이다. 이러한 현상은 회전 외팔보의 연구에서도 유사하게 나타났던 특성이다 [참고문헌 (11) 참조].

Fig. 4는 $\alpha=0.5$ 의 집중질량이 평판의 끝단 중앙에 위치할 때, 평판이 회전하기 전의 모드들의 절선들을 (a)에 나타내고 있고, 회전각속도 $\omega=20$ 일 때의 모드들의 절선들을 (b)에 나타내고 있다. (a)에서 첫 번째 모드는 첫 번째 굽힘 모드, 두 번째 모드는 첫 번째 비틀림 모드, 세 번째 모드는 두 번째 굽힘 모드, 네 번째 모드는 면내 방향 굽힘 모드, 그리고 다섯 번째 모드는 굽힘과 비틀림의 조합모드이다. 3번째 모드는 회전 각속도의 증가에 따라 (a)에서의 원호가 점점 안으로 밀려 들어가 (b)의 모습으로 변화된다. Fig. 2에서 네 번째와 다섯 번째 궤적이 서로 교차한 것인지 아닌지를 (휨현상이 발생한 것인지) 판별하려면 그 부분을 더욱 확대하여 그려보면 된다. 그런데 이를 판별하는 방법으로 서로 접근하는 두 모드의 형상에 근거해 판별하는 방법이 있다. 즉 두 궤적이 교차한 것이 아니고 휨현상이 일어난 것이라면 (a)의 네 번째 모드가 (b)의 네 번째 모드로 변해야 한다. 그러나 (a)의 네

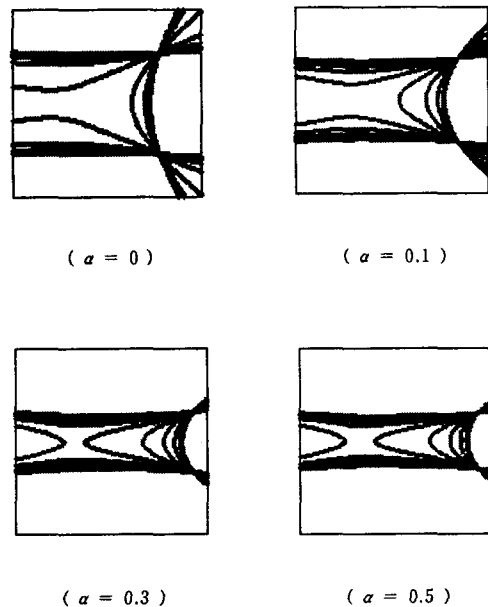


Fig. 5 Nodal line superposition of 3rd mode shapes for four different values of concentrated mass

번째 모드는 대칭 모드이고 ($\delta=0.5$ 선에 대해 좌우 변형이 대칭임) (b)의 네 번째 모드는 반대칭 (anti-symmetric) 모드이므로 ($\delta=0.5$ 선에 대해 좌우 변형의 크기는 같고 부호가 반대임) 그러한 변화는 불가능하다. 따라서 그림 2에서 네 번째와 다섯 번째 고유진동수 궤적은 서로 교차한 것이라 판단할 수 있다.

Fig. 5는, 끝단 중앙에 위치한 네 경우의 집중질량 α 값에 대해, 회전각속도 변화에 따라 변화하는

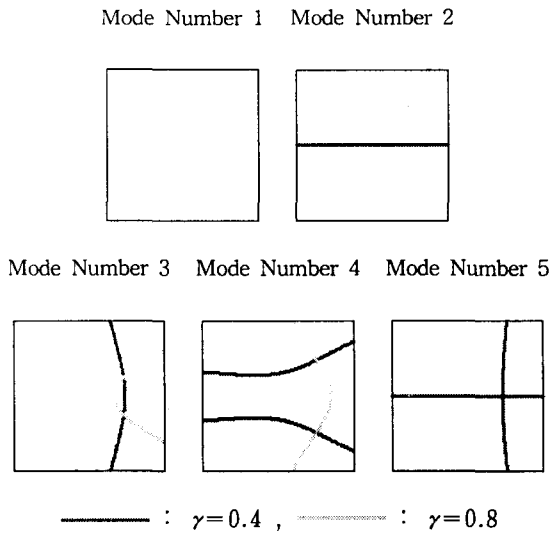


Fig. 6 Nodal line variations of the lowest five mode shapes due to the position change of the concentrated mass ($\alpha=0.5, \delta=0.5, \omega=0.0$)

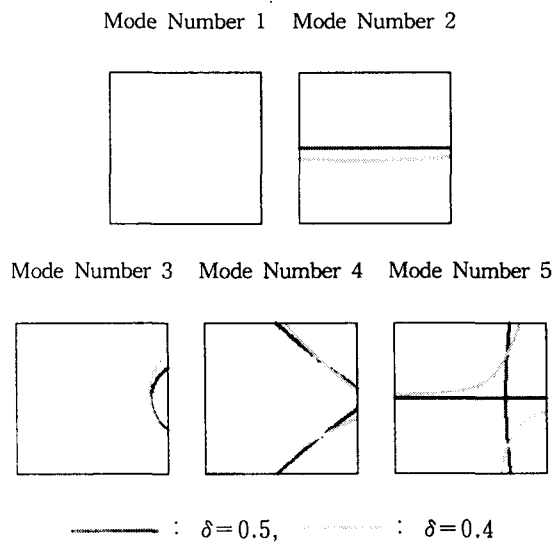


Fig. 7 Nodal line variations of the lowest five mode shapes due to the position change of the concentrated mass ($\alpha=0.5, \gamma=1.0, \omega=0.0$)

세 번째 모드의 절선을 증첩하여 보여주고 있다. 증첩된 절선들의 모습에서 일정한 위치에 존재하는 절점들을 확인할 수 있다. 또한 절선들은 집중질량의 크기가 증가할수록 집중질량이 위치한 바깥쪽 방향으로 이동하는 것을 보여준다.

Fig. 6과 Fig. 7은 집중질량 크기 $\alpha=0.5$, 회전각속도 $\omega=0$ 일 때, 집중질량의 위치의 변화에 따른 모드형상 절선의 변화를 보여준다. Fig. 6은 집중질량이 $\delta=0.5$ 인 중앙선을 따라 $\gamma=0.4$ 의 위치에서 $\gamma=0.8$ 의 위치로 이동할 때, 모드 절선의 변화를 보여주는데 이 경우 모드절선의 변화는 대칭모드인 3번째와 4번째 모드에서만 일어나는 것을 알 수

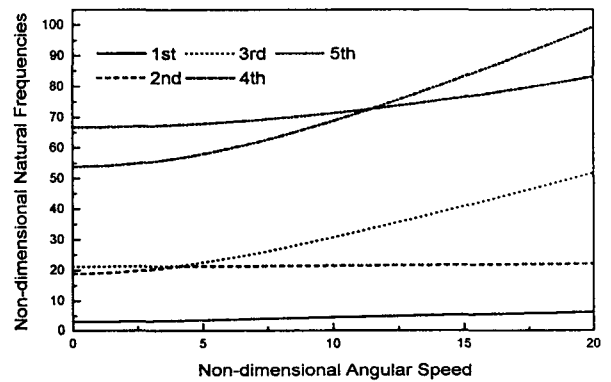


Fig. 8 Variations of the lowest five non-dimensional natural frequencies for a non-square plate ($\lambda=3$)

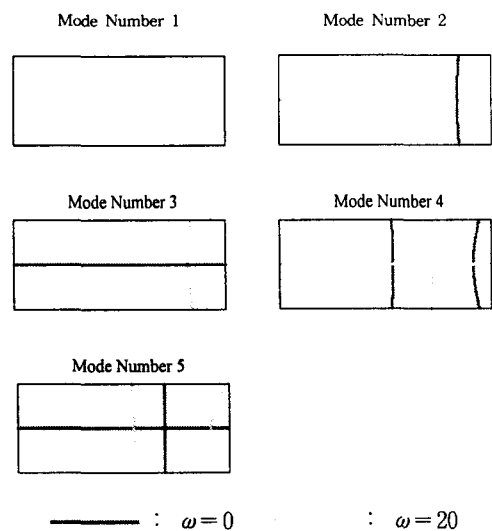


Fig. 9 Nodal line variations of the lowest five mode shapes of a non-square plate due to the change of non-dimensional angular speed

있으며 절선의 변화가 일어날 수 없는 1번째 모드와 반대칭 모드인 2번째와 5번째 모드들은 (집중질량의 움직임이 그들의 절선상에서 발생함) 절선 변화가 전혀 일어나지 않는다. Fig. 7은 집중질량이 외팔평판의 자유단에서 ($\gamma=1.0$) $\delta=0.5$ 로부터 $\delta=0.4$ 인 위치로 이동했을 때 그 모드 절선의 변화를 보여주고 있다. 이 경우는 Fig. 6과 달리 모드절선 변화가 일어날 수 없는 1번째 모드를 제외하고는 모든 모드들의 절선이 변화하는 것을 관찰할 수 있다.

Fig. 8은 평판의 중횡비 λ 가 3일 때, 고유진동수의 변화를 보여주고 있는데 2번째 모드와 3번째 모드 그리고 4번째 모드와 5번째 모드 사이에 회전 각속도 증가에 따른 고유진동수의 궤적 교차를 보여준다. Fig. 9는 무회전시와 $\omega=20$ 일 때 모드들의 절선변화를 보여주고 있는데 2번째와 3번째 모드 그리고 4번째와 5번째 모드는 각각 대칭과 반대칭 모드이므로 앞에서도 언급되었듯이 이들 고유진동수 궤적은 교차한 것임을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 임의 위치에 집중질량을 가진 회전하는 외팔 평판의 운동방정식에 근거하여 진동 모델링을 유도하고 해석을 수행하였다. 집중질량 크기와 그 위치, 평판의 중횡비 및 회전수 그리고 회전축 반경의 변화에 따른 고유진동수의 변화와 이에 수반되는 모드형상의 변화를 관찰할 수 있었으며 특히 집중질량 효과가 고유진동수 궤적간 교차현상에 미치는 영향을 관찰할 수 있었다. 또한 회전각속도 변화에 따른 모드형상의 절선 변화에도 불구하고 일정한 위치에 존재하는 공통절점들의 존재도 확인할 수 있었으며, 집중질량의 효과가 그 절점들의 위치에 미치는 영향을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
 (2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force", NASA TN No. 516.
 (3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency

of a Rotating Cantilever Beam", *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28~30.
 (4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", *J. Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
 (5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *J. Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199~210.
 (6) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 233~248.
 (7) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429~449.
 (8) Ryan, R.R. and Yoo, H.H., 1989, "Element Specific Linear and Nonlinear Modeling", SDIO NASA Conference Proceedings, San Diego, California, January.
 (9) 유흥회, 1992, "강체운동을 하는 탄성평판의 선형 동적 모델링", 한국항공우주학회지 학술논문, 제 20권, 제 4호, pp. 891~898.
 (10) 유재곤, 유흥회, 1997, "강체운동을 하는 집중질량을 가진 탄성평판의 동적해석", 한국항공우주학회 추계학술대회 논문집, pp. 158~163.
 (11) 유흥회, 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석", 대한기계학회논문집, 제 20권, 제 8호, pp. 2516~2523.
 (12) 유흥회, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석", 대한기계학회논문집, 제 17권, 제 3호, pp. 652~657.
 (13) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, No. 4, pp. 448~453.
 (14) Barton, M. V., 1951, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates", *Trans. of ASME, Journal of the Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 129~134.
 (15) Leissa, A. W., 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP-160.