

농용 트랙터 안전캡 현가 장치의 최적 설계

Optimum Design of Cab Suspension for Agricultural Tractors

최 현 준*	김 경 옥**	김 증 언**
	정 회원	
H. J. Choy	K. U. Kim	J. E. Kim

ABSTRACT

This work was intended to determine the optimum values of the cab suspension parameters by a simulation method in order to minimize the seat accelerations of agricultural tractors in the frequencies lower than 50Hz. A dynamic model of cab motions was developed and verified using a tractor excited over half-sine bumps on a concrete test road. A simulation program based on the model was also developed. A method was proposed to determine the optimum values of the suspension parameters. It was found that the natural frequencies of the cab and seat suspensions must be apart as far as possible until the sum of seat and cab accelerations is minimized, which also reduces the seat accelerations maximally.

주요용어(Key Words): 안전캡 현가 장치(Cab suspension), 최적화(Optimization), 승차 진동(Ride vibration)

1. 서 론

최근, 농업기계가 널리 보급됨에 따라 농업기계에 대한 각종 사고 방지와 안전 운전에 대한 대책이 요구되고 있다. 따라서, 농업기계의 설계도 기준에 추구해 왔던 고속, 고출력 등 기능성 확대보다는 사용자의 안전성, 편의성, 안락성 등 인간공학적 설계에 관심이 집중되고 있다. 농업기계에 있어서, 운전자에 대한 가장 대표적인 안전 문제의 하나는 트랙터의 승차 진동이며, 트랙터 운전이 전문화되고, 작업시간이 장기화됨에 따라 승차 진동은 더욱 심각한 문제로 대두될 전망이다. 즉, 운전자의 건강을 보호하고, 보다 편안한 작업 환경을 제공하기 위해서는 승차 진동에 대한 감소 대책이 요구된다(정, 1993).

트랙터가 불규칙한 노면을 주행할 때 노면 가진에 의하여 발생하는 진동은 대부분 인체에 유해한 50

Hz 이하의 저주파 진동이다. 트랙터는 그 기능상 차륜에 현가 장치가 없기 때문에 공기 타이어와 좌석 현가 장치에서 감쇠될 수 있는 저주파 진동은 극히 제한적이며, 대부분의 저주파 진동은 거의 직접적으로 운전자에게 전달된다.

좌석 현가 장치와 함께 운전자의 승차 진동을 감쇠시키는 방법에는 안전캡을 차체에 고정하지 않고 안전캡과 차체 사이에 탄성재와 충격 흡수재 즉, 현가 장치를 설치하는 방법이 있다. 안전캡 현가 장치를 설치하면 좌석 현가 장치만을 설치하였을 때와 비교하여 운전자의 무게가 현가 장치의 고유 진동수에 미치는 영향을 상대적으로 줄일 수 있고, 각종 계기판, 조정 장치, 운전자 등이 모두 안전캡 현가 장치에 의하여 지지되기 때문에 운전자와 캡 사이의 상대 운동을 감소시킬 수 있다(Suggs et al. 1969).

일반적으로, 안전캡은 4지점에서 차체와 결합되

* 대우자동차 중앙기술연구소

** 서울대학교 생물자원공학부

어 있으며, 안전캡과 차체 사이는 고강도의 고무 제품인 방진 패드로써 연결되어 있다. 방진 패드는 저주파 진동과 결합부에서 발생하는 소음을 차단하는 데는 효과적이다. 그러나, 인체에 유해한 저주파 진동을 차단하는 데는 한계가 있다.

본 연구는 안전캡의 결합부의 동특성을 구명하고 저주파 진동을 차단하기 위한 최적 현가 장치의 조건, 즉 최적치의 동특성을 구명하기 위하여 수행되었다.

2. 안전캡 현가 장치의 동적 모델

가. 안전캡 현가 장치의 모델링

안전캡 현가 장치의 최적 설계 변수를 결정하기 위하여 좌석과 캡의 운동을 예측할 수 있는 동적 모델을 개발하였다. 일반적으로 차량의 진동에서 단성 모드의 고유 진동수는 수백 Hz 이상이므로, 50 Hz 이하의 저주파 진동은 강체 모드로 가정될 수 있다. 트랙터의 안전캡에 있어서도, 50 Hz 이하의 저주파 진동을 대상으로 할 경우, 안전캡은 강체 운동을 하기 때문에 안전캡을 다자유도의 이산계로 모형화하여도 비교적 정확한 거동을 예측할 수 있다.

개발된 동적 모델은 그림 1과 같다. 모형화에서, 좌표계의 원점은 기관과 변속기 하우징의 경계 평면과 변속기 입력축이 교차하는 점으로 설정하였으며, x, y, z축의 +방향은 트랙터가 진행하는 방향을 기준

으로 각각 진행 방향, 좌측, 수직 방향으로 하였다. 동적 모델은 3자유도로서, 승차 진동에 가장 큰 영향을 미치는 수직(z_c), 롤링(ϕ), 피칭(θ) 운동만을 포함하였으며, 좌석의 운동은 수직 방향의 운동(z_s)만을 고려하였다.

모형화를 위하여 사용된 가정은 다음과 같다.

- 1) 안전캡은 강체이며, 좌석은 질점(**particle**)이다.
- 2) 안전캡과 좌석의 현가 장치는 선형 스프링과 댐퍼로 구성된 병렬 결합체이다.
- 3) 안전캡은 현가 장치로써 차체와 결합되어 있으며, 가진력은 수직 방향으로만 작용한다.
- 4) 트랙터는 일정한 속도로 직진한다.

모형에 사용된 각 기호에 대한 설명은 다음과 같다.

- m = 질량
- I = 질량관성모멘트
- z = 수직 방향의 변위
- ϕ = 롤링 각변위
- θ = 피칭 각변위
- x = x 방향의 변위
- y = y 방향의 변위
- c = 감쇠 계수
- k = 스프링 상수
- q = 수직 방향의 가진 변위

각 기호의 아래 첨자는 다음과 같은 뜻으로 사용되었다.

- c = 안전캡
- s = 의자
- 1 = 전방 좌측 결합부
- 2 = 전방 우측 결합부
- 3 = 후방 좌측 결합부
- 4 = 후방 우측 결합부

나. 운동 방정식

안전캡의 운동 방정식은 뉴턴의 제 2법칙을 적용하여 유도하였으며, 수직 방향, 롤링, 피칭 운동의 운동 방정식은 각각 다음과 같이 표현된다.

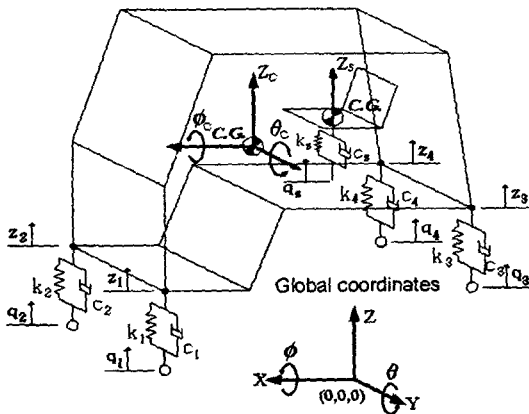


Fig. 1 Dynamic model of cab-suspension system.

$$m_c \ddot{z}_c = c_1(\dot{q}_1 - \dot{z}_1) + c_2(\dot{q}_2 - \dot{z}_2) + c_3(\dot{q}_3 - \dot{z}_3) + c_4(\dot{q}_4 - \dot{z}_4) + c_5(\dot{q}_5 - \dot{z}_5) + k_1(q_1 - z_1) + k_2(q_2 - z_2) + k_3(q_3 - z_3) + k_4(q_4 - z_4) + k_5(q_5 - z_5) \dots \dots \dots (1)$$

$$I_{\phi_c} \ddot{\phi}_c = c_1(\dot{q}_1 - \dot{z}_1)(y_1 - y_c) + c_2(\dot{q}_2 - \dot{z}_2)(y_2 - y_c) + c_3(\dot{q}_3 - \dot{z}_3)(y_3 - y_c) + c_4(\dot{q}_4 - \dot{z}_4)(y_4 - y_c) + c_5(\dot{q}_5 - \dot{z}_5)(y_5 - y_c) + k_1(q_1 - z_1)(y_1 - y_c) + k_2(q_2 - z_2)(y_2 - y_c) + k_3(q_3 - z_3)(y_3 - y_c) + k_4(q_4 - z_4)(y_4 - y_c) + k_5(q_5 - z_5)(y_5 - y_c) \dots \dots \dots (2)$$

$$I_{\theta_c} \ddot{\theta}_c = -c_1(\dot{q}_1 - \dot{z}_1)(x_1 - x_c) - c_2(\dot{q}_2 - \dot{z}_2)(x_2 - x_c) - c_3(\dot{q}_3 - \dot{z}_3)(x_3 - x_c) - c_4(\dot{q}_4 - \dot{z}_4)(x_4 - x_c) - c_5(\dot{q}_5 - \dot{z}_5)(x_5 - x_c) - k_1(q_1 - z_1)(x_1 - x_c) - k_2(q_2 - z_2)(x_2 - x_c) - k_3(q_3 - z_3)(x_3 - x_c) - k_4(q_4 - z_4)(x_4 - x_c) - k_5(q_5 - z_5)(x_5 - x_c) \dots \dots \dots (3)$$

또한, 좌석의 수직방향 운동 방정식은 $m_s \ddot{z}_s = c_s(\dot{q}_s - \dot{z}_s) + k_s(q_s - z_s) \dots \dots \dots (4)$ 와 같이 표현된다. z_1, z_2, z_3, z_4 와 q_s 를 z_c, ϕ_c 와 θ_c 의 함수로 표현하면

$$z_1 = z_c + (y_1 - y_c)\phi_c - (x_1 - x_c)\theta_c$$

$$z_2 = z_c + (y_2 - y_c)\phi_c - (x_2 - x_c)\theta_c$$

$$z_3 = z_c + (y_3 - y_c)\phi_c - (x_3 - x_c)\theta_c \dots \dots \dots (5)$$

$$z_4 = z_c + (y_4 - y_c)\phi_c - (x_4 - x_c)\theta_c$$

$$q_s = z_c + (y_s - y_c)\phi_c - (x_s - x_c)\theta_c$$

가 된다. 식 (1), (2), (3), (4)에 식(5)를 대입하여 정리하면 운동 방정식은 다음과 같은 행렬 방정식으로 표현될 수 있다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \dots \dots \dots (6)$$

여기서 [M], [C], [K]행렬은 각각 관성, 감쇠, 강성 행렬을 나타낸다. 안전캡 결합부는 모두 같은 재질로 되어 있으므로 결합부의 감쇠 계수와 스프링 상수는 모두 같다고 할 수 있다. 따라서 $c = c_1 = c_2 = c_3 = c_4, k = k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ 라고 하면 행렬 방정식의

[M], [C], [K], {f}, {x}의 각 요소는 부록에서와 같이 표현된다.

3. 안전캡 현가 장치의 모델 검증

안전캡 현가 장치의 동적 모델에 대한 유효성을 검증하기 위하여 국내에서 제작된 47마력 4륜 구동 트랙터를 이용하였다. 먼저 트랙터가 시험로에서 주행할 때, 안전캡 내부에서 좌석의 가속도를 실측하고, 같은 조건에서 시뮬레이션으로 예측한 좌석 가속도를 비교 분석하였다.

가. 동적 계수의 결정

검증에 사용된 트랙터에서 안전캡의 질량과 질량 중심은 두 개의 크레인-스케일(crane-scale)과 디지털 각도계를 이용하여 결정하였으며, 질량관성모멘트는 현수 측정법을 적용하여 실험적으로 결정하였다. 안전캡 현가 장치의 동적 계수, 즉 감쇠 계수와 스프링 상수는 직접 시스템 구명법(Direct System Identification Method)(Butsuen, 1987)을 적용하여 결정하였으며, 좌석 현가 장치에 대한 동적 계수는 피크-피킹법을 적용하여 결정하였다. 질량 중심, 질량관성모멘트, 감쇠 계수, 스프링 상수에 대한 자세한 결정 방법은 최(1998)의 논문에 수록되어 있다. 표 1은 이와 같은 방법으로 결정한 안전캡 현가 장치의 관성, 감쇠, 강성 성질을 나타낸 것이며, 표 2는 안전캡과 좌석 현가 장치의 고유 진동수를 측정하여 나타낸 것이다. 고유 진동수는 충격시험으로 결정하였다(최, 1998).

좌석 가속도는 트랙터가 시험 노면을 일정한 속도로 직진 주행할 때 측정하였다. 시험 노면은 폭이 152 cm, 높이가 8.6 cm, 길이가 200 cm인 3개의 반사인(half-sine) 범프를 2.75m의 간격으로 설치한 아스팔트 노면으로 하였다. 주행 조건은 3조건으로서 주행 속도를 6 km/h로 하여 평탄한 노면을 주행할 때, 주행 속도를 4.4 km/h로 하여 한 쪽 바퀴만 범프를 통과할 때, 같은 속도로서 양쪽 바퀴 모두가 범프를 통과할 때로 구별하였다. 각 주행 조건에서 측정된 좌석 가속도는 테이프 레코더에 기록한 후, 실험실에서 이를 재생하여 신호 분석기로써 필터링, A/D

Table 1 Dynamic properties of cab suspension of model tractor

Property	Item	Component	Values
Inertia Property	Mass	Cab	$m_c = 325.5 \text{ kg}$
		Seat	$m_s = 18 \text{ kg}$
	Location of mass center	Cab (x_c, y_c, z_c)	$(-968, 0, 806) \text{ mm}$
		Seat (x_s, y_s, z_s)	$(-1178, 0, 218) \text{ mm}$
Mass moment of inertia	Cab	$I_{\phi c} = 171.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $I_{\psi c} = 174.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	
Damping Property	Damping coefficient	Cab suspension	$c = 1,558.7 \text{ N/m/s}$
		Seat suspension	$c_s = 677 \text{ N/m/s}$
Stiffness Property	Spring constant	Cab suspension	$k = 3,693.5 \text{ kN/m}$
		Seat suspension	$k_s = 12.9 \text{ kN/m}$

Table 2 Natural frequencies of cab and seat suspensions

Component	Mode	Natural frequency (H_z)
Cab	Rolling	16.12
	Pitching	22.87
	Vertical	34.87
Seat	Vertical	2.18

$$(x_1, y_1, z_1) = (-250, 348, -131.5)\text{mm}$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (-250, -348, -131.5)\text{mm}$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (-1,288, 396, 71.4)\text{mm}$$

$$(x_4, y_4, z_4) = (-1,288, -396, 71.4)\text{mm}$$

변환, 푸리에 변환을 실시하고 가속도 스펙트럼을 작성하였다.

나. 모형 검증

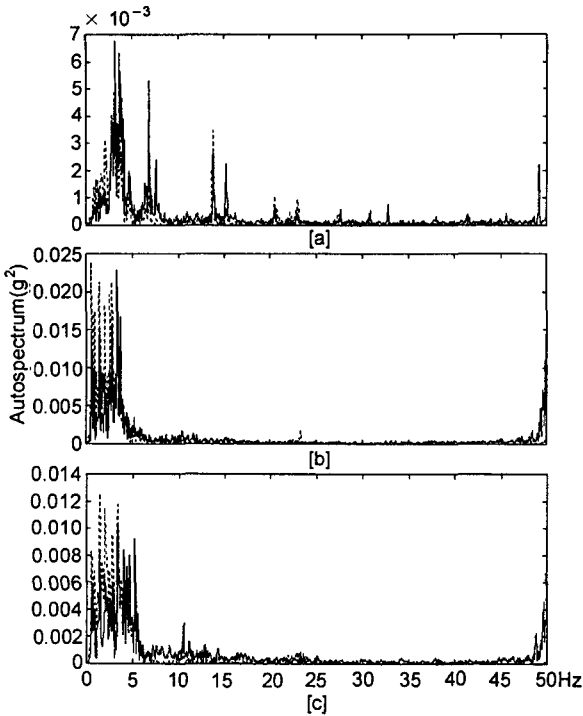
운동 방정식을 이용하여 시뮬레이션 프로그램을 개발하고, 실험으로 결정된 안전캡의 관성 성질, 감쇠 계수, 스프링 상수의 값을 입력하여 주파수 영역에서 좌석 가속도를 시뮬레이션 하였다. 시뮬레이션의 입력 데이터는 안전캡과 트랙터 차체의 결합부 1, 2, 3, 4에서 측정된 가진 속도와 가진 변위로서 각 결합부의 베이스에서 측정된 가속도 $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_4$ 를 적분하여 사용하였다. 또한 기준 좌표계에 대한 각 결합부의 위치는 실측하였으며, 실측치는 다음과 같다.

시뮬레이션은 MATLAB S/W를 이용하여 실시하였다.

그림 2는 수직 방향 좌석 가속도의 실측치와 시뮬레이션 예측치의 오토 스펙트럼을 나타낸 것이다. 그림 2(a)는 6 km/h의 속도로서 평지를 정속 주행할 때, (b)와 (c)는 각각 4.4 km/h의 속도로서 한 쪽 바퀴만 범프를 지날 때와 양쪽 바퀴가 모두 범프를 지날 때를 나타낸 것이다. 실측치와 예측치의 좌석 가속도 오토 스펙트럼은 그림 2에서와 같이 잘 일치하였으며, 실측치에 대한 예측치의 최대 오차는 5~10% 이내이었다. 따라서 개발된 안전캡 현가 장치의 동적 모델은 그 유효성을 인정할 수 있으며, 최적화의 결과도 유효할 것으로 판단되었다.

4. 안전캡 현가 장치의 최적화

좌석의 저주파 진동을 최소화하기 위한 안전캡 현가 장치의 최적화는 유효성이 인정된 안전캡 현가 장치의 동적 모델과 이를 코드화한 시뮬레이션 프로그램을 이용하여 수행하였다. 그림 3과 그림 4는 각



Solid line : measured, Dotted line : simulated
 [a] Velocity 6 km/h on flat surface,
 [b] Velocity of 4.4 km/h with one side wheels on bumps,
 [c] Velocity of 4.4 km/h with both side wheels on bumps.

Fig. 2 Comparison of auto-spectra of measured and simulated vertical seat accelerations.

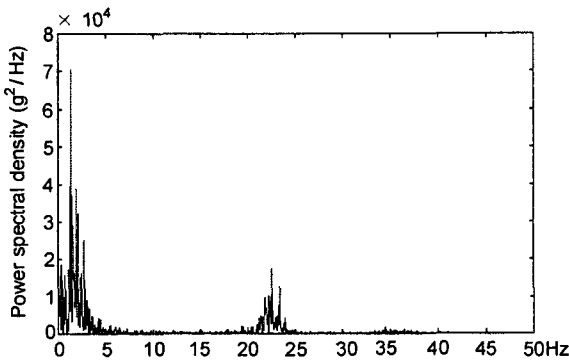
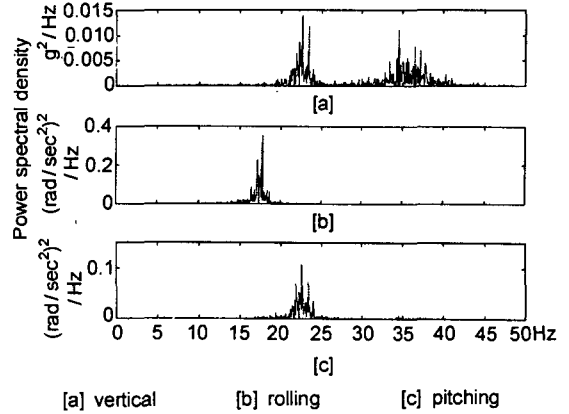


Fig. 3 Simulated power spectral density of vertical acceleration of the seat.



[a] vertical [b] rolling [c] pitching
 Fig. 4 Simulated power spectral density of mass center acceleration of the cab.

각 좌석의 수직 가속도와 안전캡의 수직, 롤링, 피칭 가속도의 파워 스펙트럼을 시뮬레이션한 결과이다.

그림 3에서 두 개의 피크점은 각각 좌석의 수직 모드와 안전캡의 피칭 모드의 고유 진동수를 나타낸다. 즉, 안전캡의 피칭 모드가 좌석 진동에 영향을 미치게 된다. 이는 좌석의 무게 중심과 캡의 무게 중심이 일치하지 않기 때문이다.

최적화의 대상은 주파수 영역에서 진동의 크기를 나타낼 수 있는 전체 파워(total power)로 하였으며, 50 Hz까지 고려하였다. 최적화를 위한 설계 변수는 스프링 상수와 감쇠 계수로 하였다.

가. 스프링 상수의 최적화

그림 5는 스프링 상수가 변화될 때 각각 안전캡 중심의 수직, 롤링, 피칭 가속도의 전체 파워를 시뮬레이션한 것이며, 그림 6은 좌석에서의 전체 파워를 시뮬레이션한 결과이다. 시뮬레이션 결과에 의하면 스프링 상수가 변화될 때 캡 진동은 다음과 같은 특성을 나타내었다.

(1) 안전캡 현가 장치의 전체 파워는 스프링 상수가 증가함에 따라 증가한다. 이는 스프링 상수가 증가함에 따라 각 모드의 고유 진동수가 증가하기 때문인 것으로 판단된다.

(2) 좌석의 수직 가속도에 대한 전체 파워는 안전캡의 스프링 상수가 증가함에 따라 초기에는 감소하여 최소값에 이르나, 스프링 상수가 계속 증가하면

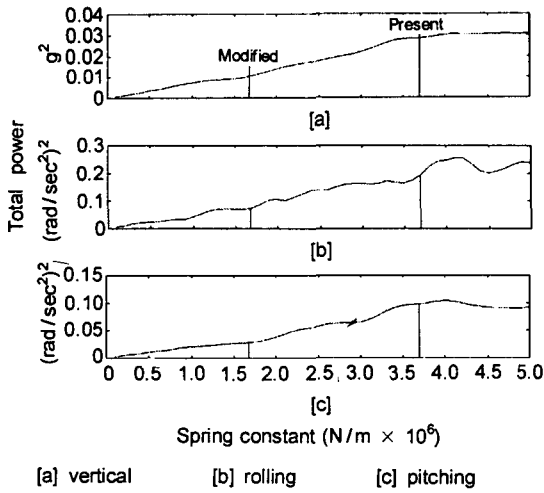


Fig. 5 Variation of total power of mass center acceleration of the cab as a function of spring constant.

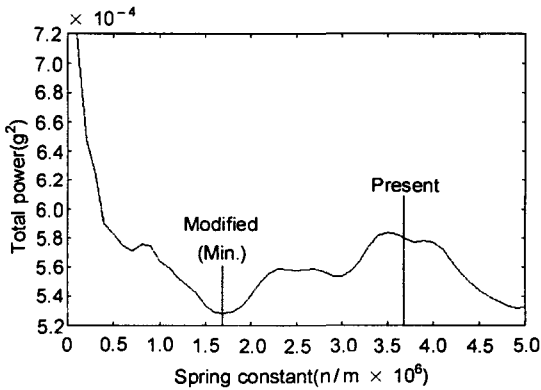


Fig. 6 Variation of total power of vertical acceleration of the seat as a function of spring constant.

전체 파워는 안전캡 피치 모드의 영향을 받아서 다시 증가된다.

(3) 시뮬레이션 결과 스프링 상수가 1,700 kN/m 일 때 좌석의 진동 수준은 최소가 되었으며 안전캡의 진동도 현저히 감소되었다.

나. 감쇠 계수의 최적화

그림 7과 그림 8은 각각 감쇠 계수의 변화에 따른

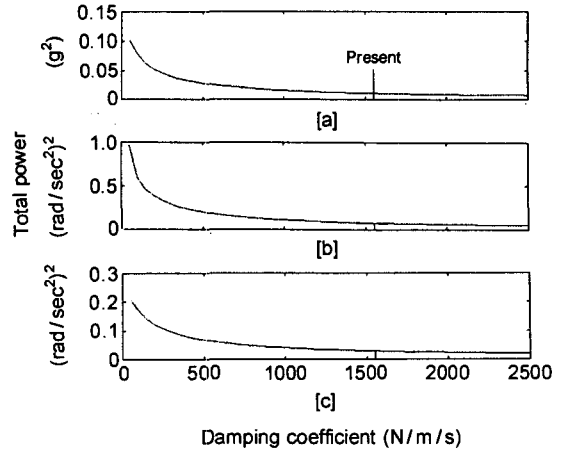


Fig. 7 Variation of total power of mass center acceleration of the cab as a function of damping coefficient.

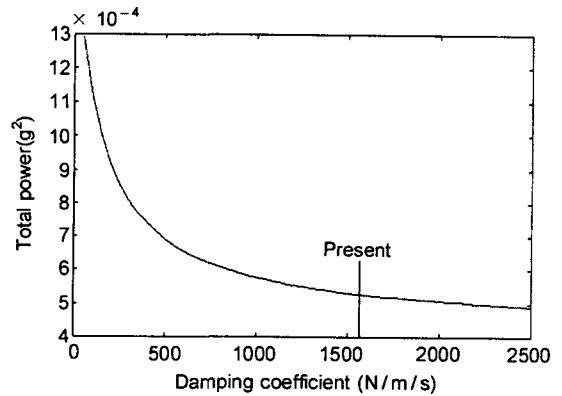


Fig. 8 Variation of total power of vertical acceleration of the seat as a function of damping coefficient.

안전캡 중심의 수직, 롤링, 피칭 가속도와 좌석의 수직 가속도의 총 파워 변화를 시뮬레이션한 결과이다. 시뮬레이션 결과에 의하면 감쇠 계수가 변화될 때 캡 진동의 특성은 다음과 같이 나타났다.

(1) 안전캡 중심의 수직, 롤링, 피칭 가속도의 전체 파워는 감쇠 계수가 증가함에 따라 비선형적으로 감소한다.

(2) 좌석의 수직 가속도에 대한 전체 파워도 감쇠 계수가 증가함에 따라 안전캡 가속도의 감소 경향과 같은 경향으로 감소한다.

(3) 50 Hz 이하의 저주파 영역에서 캡과 좌석 진동은 감쇠 계수가 증가함에 따라 비선형적으로 급격히 감소한다.

5. 결론 및 요약

승차감에 가장 큰 영향을 미치는 안전캡의 수직, 롤링, 피칭 운동과 좌석의 수직 운동을 시뮬레이션하기 위하여 자유도가 4인 안전캡의 동적 모델을 개발하고, 모델의 운동 방정식을 유도하였다.

동적 모델을 이용하여 시뮬레이션 프로그램을 개발하였으며, 시뮬레이션의 입력 변수는 안전캡의 질량과 질량 중심, 현가 장치의 감쇠 계수와 스프링 상수 및 안전캡 결합부의 가진 운동으로 하였다. 가진 운동은 결합부에서 직접 측정된 수직 가속도를 이용하였다. 반사인 범프로 이루어진 아스팔트 시험 노면을 주행할 때 실측한 좌석의 가속도와 같은 조건에서 시뮬레이션으로 예측한 좌석 가속도를 비교하여 모델의 유효성을 입증하였으며, 입증된 모형을 이용하여 현가 장치의 스프링 상수와 감쇠 계수에 대한 최적화를 실시하였다.

최적화를 위한 시뮬레이션의 결과에 의하면 좌석의 수직 가속도를 최소화하기 위한 안전캡 현가 장치의 스프링 상수와 감쇠 계수는 다음과 같은 방법으로 결정하여야 한다.

(1) 좌석의 수직 진동을 최소화하기 위해서는 안전캡 현가 장치의 스프링 상수를 증가시켜 좌석의 수직 진동과 안전캡의 수직, 롤링, 피칭 진동의 고유 진동수가 가능한 한 큰 차이가 나도록 하여야 한다. 그러나 스프링 상수가 증가함에 따라 안전캡의 진동이 증가하고, 좌석의 진동은 감소되므로 두 진동 수

준의 합이 최소인 스프링 상수를 구하여야 한다.

(2) 안전캡과 좌석의 진동을 동시에 줄이기 위해서는 현가 장치의 감쇠 계수를 증가시켜야 한다.

참 고 문 헌

1. 정수식. 1993. 농용 트랙터의 승차 진동 평가에 관한 연구. 서울대학교 농공학과 농업기계전공 석사학위논문.
2. Borse, G. J. 1997. Numerical methods with MATLAB. PWS Publishing Co.
3. Butsuen, T., M. Ookuma and A. Nagamatsu. 1987. Application of direct system identification method for engine rigid body mount system. SAE paper 860551.
4. Choy, H. J. 1998. Optimum design of cab suspension for agricultural tractors. Unpublished MS thesis, Seoul National University.
5. Hansson, P. A. 1995. Optimization of agricultural tractor cab suspension using the evolution method. Computers and electronics in agriculture 12:35-49.
6. Rakheja, S. and S. Sankar. 1984. Improved off-road tractor ride via passive cab and seat suspensions. Transactions of the ASME 106:305-312.
7. Randall, R. B. 1987. Frequency analysis. 3rd Ed. B&K.
8. Rao, S. S. 1996. Engineering optimization theory and practice. 3rd Ed. John Wiley & Sons, Inc.
9. Suggs, C. W. and B. K. Huang. 1969. Tractor cab suspension design and scale model simulation. Transactions of the ASAE 12(3):283-285, 289.

[부 록]

[M] : 대각행렬

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_c \\ M_{22} &= I_{\phi_c} \\ M_{33} &= I_{\theta_c} \\ M_{44} &= m_s \\ M_{12} &= M_{13} = 0 \\ M_{21} &= M_{23} = 0 \\ M_{31} &= M_{32} = 0 \end{aligned}$$

[C] : 감쇠행렬

$$\begin{aligned} C_{11} &= 4c + c_s \\ C_{12} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4y_c) + c_s(y_s - y_c) \\ C_{13} &= -c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_c) - c_s(x_s - x_c) \\ C_{14} &= -c_s \\ C_{22} &= c(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 2y_c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 4y_c^2) + c_s(y_s - y_c)^2 \\ C_{23} &= -c(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - y_c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4x_cy_c) - c_s(x_s - x_c)(y_s - y_c) \\ C_{24} &= -c_s(y_s - y_c) \\ C_{33} &= c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4x_c^2) + c_s(x_s - x_c)^2 \\ C_{34} &= c_s(x_s - x_c) \\ C_{44} &= c_s \end{aligned}$$

[K] : 강성행렬

$$\begin{aligned} K_{11} &= 4k + k_s \\ K_{12} &= k(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4y_c) + k_s(y_s - y_c) \\ K_{13} &= -k(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_c) - k_s(x_s - x_c) \\ K_{14} &= -k_s \\ K_{22} &= k(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 2y_c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 4y_c^2) + k_s(y_s - y_c)^2 \\ K_{23} &= -k(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - y_c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4x_cy_c) - k_s(x_s - x_c)(y_s - y_c) \\ K_{24} &= -k_s(y_s - y_c) \\ K_{33} &= k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4x_c^2) + k_s(x_s - x_c)^2 \\ K_{34} &= k_s(x_s - x_c) \\ K_{44} &= k_s \end{aligned}$$

{f} : 가진 벡터

$$\begin{aligned} f_1 &= c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + k(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\ f_2 &= c(y_1\dot{q}_1 + y_2\dot{q}_2 + y_3\dot{q}_3 + y_4\dot{q}_4 - y_c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)) + k(y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 + y_4q_4 - y_c(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)) \\ f_3 &= -c(x_1\dot{q}_1 + x_2\dot{q}_2 + x_3\dot{q}_3 + x_4\dot{q}_4 - x_c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)) - k(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4 - x_c(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)) \\ f_4 &= 0 \end{aligned}$$

{x} : 응답 벡터

$$\begin{aligned} x_1 &= z_c \\ x_2 &= \phi_c \\ x_3 &= \theta_c \\ x_4 &= z_s \end{aligned}$$