韓國經營科學會誌
第23卷 第3號
1998年 9月

정수단위로만 루팅이 허용되는 SONET 링의 용량결정문제*

명 영 수**

Optimal Load Balancing On SONET Rings with Integer Demand Splitting*

Young-Soo Myung**

Abstract

In the ring loading problem, traffic demands are given for each pair of nodes in an undirected ring network with n nodes and a flow is routed in either of the two directions, clockwise and counter-clockwise. The load of a link is the sum of the flows routed through the link and the objective of the problem is to minimize the maximum load on the ring. In the ring loading problem with integer demand splitting, each demand can be split between the two directions and the flow routed in each direction is restricted to integers. Recently, Vachani et al. [INFORMS J. Computing 8 (1996) 235-242] have developed an $O(n^3)$ algorithm for solving this integer version of the ring loading problem and independently, Schrijver et al. [to appear in SIAM J. Disc. Math.] have presented an algorithm which solves the problem with $\{0, 1\}$ demands in $O(n^2 |K|)$ time where K denotes the index set of the origin-destination pairs of nodes having flow demands. In this paper, we develop an algorithm which solves the problem in $O(n|K|)$ time.

* 이 논문은 1998년도 단국대학교 대학연구비에 의하여 연구되었음.
** 단국대학교 천안캠퍼스 경영회계학부

1. 서 론

정보화사회의 발전에 따라 이용자의 서비스 욕구는 영상정보 또는 멀티미디어 정보를 요구하게 될 것이며, 컴퓨터통신의 경우에도 초고속, 대용량의 전송망을 요구할 것으로 예상되는 등, 서비스환경, 기술환경이 빠르게 변화될 것이다. 이렇게 급속하게 증가하는 다양한 통신서비스를 만족시키기 위해 통신망의 고속화, 광대역화는 필연적인데, 이를 위해 광케이블(optical fiber)을 이용한 통신망의 구축이 국내외적으로 진행되고 있다. 광통신망은 기존의 동축을 이용한 망과는 달리 대용량 전송, 높은 신뢰성, 장거리 전송 등의 특성을 지니고 있다. 그러나 이러한 특성으로 인해 광통신망은 연결성이 매우 낮으므로 망자체의 신뢰성이나 생존도(survivability)와 관련된 고려가 필요하다. 즉 광통신망은 대용량 전송이 가능하기 때문에 노드나 링크의 장애 발생시 이를 신속히 복구하지 않으면 막대한 정보의 손실을 초래한다. 따라서, 이러한 장애를 자동적으로 복구할 수 있는 망의 구조 및 이의 구축에 대한 체계적인 연구가 필요하다.

이를 위하여 최근 들어 동기식 광통신망(Synchronous Optical Network: SONET) 기술이 표준화되고 Add/Drop Multiplexing (ADM) 장비가 등장함에 따라 다양한 트래픽의 변화를 통해 통신망의 재해 시에도 신속하고 유연하게 통신망을 복구할 수 있는 Self-Healing Ring (SHR)의 구성 기법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 따라서 Self-Healing Ring Network을 설계, 운영할 수 있는 Tool의 개발에 관한 연구는 국내에서도 절실히 필요한 실정이며 링의 설계에 핵심이 되는 링의 용량결정문제는 최근에 핵심 연구과제로 부상하고 있다 [1, 12].

링의 용량결정문제(Ring Loading Problem: RLP)는 다음과 같이 정의된다. 노드집합 $V=\{1,2,\cdots,n\}$와 아크의 집합 $L=\{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n),(n,1)\}$로 이루어진 방향성이 없는 링모양의 그래프 $R=(V,L)$이 주어져 있다고 가정하자. 아크 $(i,i+1)$와 아크 i는 동일한 아크를 지칭하는 것으로 정의한다. 다만 아크 $(n,1)$가 아크 n 으로 표시되는 것은 예외로 인정한다. K는 두 노드, 즉 노드 쌍들의 인덱스 집합이다. 각 노드 쌍 $k\in K$에 대하여, r_k의 흐름(flow)에 대한 수요가 존재하고, $o(k)$와 $d(k)$ $(o(k)<d(k))$는 노드 쌍 k의 공급노드와 수요노드를 각각 표시하는 것으로 정의한다. $o(k)$ 와 $d(k)$ 사이의 흐름은 시계 방향과 반시계 방향의 양방향으로 보내질 수 있다. 다시 말해서 흐름이 $\{o(k),o(k)+1,\cdots,d(k)-1,d(k)\}$ $(\{o(k),o(k)-1,\cdots,1,n,\cdots,d(k)+1,d(k)\})$방향으로 움직이면 흐름이 시계 방향(반시계 방향)이라고 부른다. 링을 구성할 때는 모든 아크에 동일한 용량의 링크를 설치하여야 되기 때문에 링 구성에 필요한 용량은 아크 중에서 가장 많은 흐름이 통과하게 되는 아크의 필요 용량에 의하여 결정되게 된다. 링에서의 아크별 흐름의 양은 각 노드 쌍간의 흐름 수요를 어떻게 분산해서 루팅(routing)하는 가에 의하여 결정되므로 링의 용량결정문제는 링의 용량이 최소화 되게 해주는 루팅 방법을 찾는 문제가 된다.

양방향으로 루팅이 가능한 SHR에서는 두 노드간의 트래픽이 양방향으로 모두 흐를 수도 있고 양 방향 중 어느 한 방향만을 선택하여야 하는 경우도 있다. 이처럼 링의 특성에 따라 용량결정문제도 분할이 가능한 경우와 가능하지 않은 경우로 나누어진다. 분할이 가능하지 않은 경우에는 두 노드간의 트래픽은 시계 방향이나 반시계 방향의 어느 한 방향으로만 흘러야 된다. 분할이 허용되는 경우도 흐름의 양은 꼭 정수 단위이어야 되는 경우도 있다. 왜냐하면 링크의 용량이 단위 용량의 정수 배로서만 설치될 수 있기 때문이다. 본 논문에서는 링의 용량결정문제 중 분할은 허용되나 루팅시 흐름의 양은 꼭 정수 단위이어야 되는 경우를 다루기로 한다. 표기의 편의를 위해서 링의 용량결정문제 중 정수 단위로만 분할이 허용되는 문제를 RLPWI(RLP With Integer demand splitting)로 그리고 정수 단위의 제약이 없는 경우를 단순히 RLPW (RLP With demand splitting)로 표기하기로 한다. RLPWI에서는 문제의 성격상 노드사이의 트래픽 수요는 정수로 주어졌다고 가정한다. 일반적으로 트래픽 수요가 정수로 주어진 경우도 RLPWI의 최적해가 항상 정수 값을 갖지는 않는다[4, 10].

링의 용량결정문제는 현실적인 중요성 때문에 많은 연구가 이루어져 왔다. 수요의 분할 처리가 허용되지 않는 경우를 살펴보면 Cosares 와 Saniee [2] 및 Myung 등 [7]이 휴리스틱을 제시하였다. 수요의 분할 처리가 허용되는 경우 중 정수단위의 분할조건이 없는 RLPW에 대해서는 Cosares 와 Saniee [2]가 휴리스틱을, Vachani 등 [11]이 $O(n^3)$ 최적해법을, Schrijver 등 [10]이 $O(n^2|K|)$ 최적해법을 개발하였으나, 최근에 발표된 Myung 등 [7]의 최적해법이 $O(n|K|)$ 만에 문제를 풀 수 있어 가장 빠른 해법으로 나타나 있다. 본 연구의 대상인 정수 단위로만 분할이 허용되는 문제 RLPWI에 대해서는 Shyur 등 [9]이 휴리스틱을 제시하였고, Lee와 Chang [4]이 최적해와 비교해서 필요 용량이 1이내로 차이나는 근사해를 구할 수 있는 휴리스틱을 개발하였다. 또한 Vachani 등 [11]이 $O(n^3)$에 계산되는 최적 해법을 제시하였고, Schrijver 등 [10]은 노드간의 트래픽 수요가 1로 주어지는 경우에 최적해를 $O(n^2|K|)$에 계산 할 수 있는 해법을 제시하였다. 따라서 그들의 해법을 이용하면 수요가 일반적인 정수 값으로 주어진 경우에 대해서도 pseudo-polynomial 시간 내에 최적해를 구할 수 있다. Myung [6]은 Lee 와 Chang의 해법을 적용한 후 추가로 간단한 선형계획문제를 풀면 정수 해를 구할 수 있음을 보였으며 Lee 등 [5]은 유효부등식을 추가하여 cutting plane 방법을 통해서 정수 해를 구할 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 RLPWI에 대해 $O(n|K|)$ 계산시간 내에 최적해를 구할 수 있는 해법을 제시하고자 한다. 우리의 해법은 정수조건이 없는 경우의 문제를 풀 경우 가장 빠른 해법인 Myung 등 [7]의 해법을 이용하여 같은 시간 범위 내에 정수조건이 있는 경우의 최적해를 구할 수 있어 이제까지 개발된 RLPWI의 어떠한 해법보다 빠르게 최적해를 구할 수 있는 해법이다. 본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 사용된 기호를 정의하고 문제의 특성을 분석하며 3장에서는 해법의 제시와 함께 해법이 최적해를 구할 수 있음을 증명한다.

2. 용어의 정의 및 문제의 특성 분석

각 노드 쌍 $k \in K$에 대해 공급노드 $o(k)$로부터 수요노드 $d(k)$까지의 시계 방향으로의 경로 상에 존재하는 아크의 집합을 L_k^+로, 반시계 방향으로의 경로 상에 존재하는 아크의 집합 L_k^-로 정의한다. 즉, $L_k^+ = \{(i, i+1) \in L | o(k) \le i < d(k)\}$ 이고 $L_k^- = L \setminus L_k^+$ 이다. 따라서 아크 $n = (n, 1)$은 항상 모든 $k \in K$에 대하여 L_k^-에 포함된다. 또한 모든 아크 $l \in L$에 대해 아크 l을 시계 방향의 경로에 포함하는 노드 쌍들의 집합을 K_l^+로, 반시계 방향의 경로에 포함하는 노드 쌍들의 집합을 K_l^-로 정의한다. 즉, $K_l^+ = \{k \in K | l \in L_k^+\}$이고 $K_l^- = \{k \in K | l \in L_k^-\}$이다. 또한 $K_l^- = K \setminus K_l^+$임을 쉽게 알 수 있다.

각 노드 쌍 $k \in K$ 에 대해 변수 x_k를 이용하여 $o(k)$와 $d(k)$ 사이의 수요 중 시계 방향으로 루팅되는 흐름의 양을 표시하기로 하자. 그리고 추가로 다음과 같은 기호를 정의한다. $X = \{ \mathrm{x} \in R^{|K|} | 0 \le x_k \le r_k, \forall k \in K\}$. 그리고 주어진 루팅방법 $\mathrm{x} \in X$에 대해,

$$g(\mathrm{x}, l) = \sum_{k \in K_l^+} x_k + \sum_{k \in K_l^-} (r_k - x_k), \ \forall l \in L$$

즉 $g(\mathrm{x}, l)$은 x 에 따라 흐름을 루팅할 때 아크 l을 통과하는 흐름의 합을 의미한다. 또한 $F(\mathrm{x}) = \max_{l \in L} g(\mathrm{x}, l)$로 정의하면, RLPW는 다음과 같이 정식화 된다.

$$(\overline{P}) \qquad z_{LP} = \min_{\mathrm{x} \in X} F(\mathrm{x})$$

또한 정수조건을 표시하기 위해 $X_I = X \cup Z^{|K|}$를 정의하면 RLPWI는 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$(P) \qquad z_I = \min_{\mathrm{x} \in X_I} F(\mathrm{x}).$$

다음에 해법을 개발할 때 유용하게 사용될 링의 용량결정문제에 대한 특성을 분석해 보기로 하자. 임의의 두 아크 i 와 j는 링에서 cut을 구성하는 데 이러한 cut $\{i, j\}$에 대하여 D_{ij}를 다음과 같이 정의하기로 하자.

$$D_{ij} = \sum \{r_k : i \in L_k^+ \text{ 이고 } j \in L_k^-, \text{ 이거나 } i \in L_k^- \text{ 이고 } j \in L_k^+\}.$$

즉 D_{ij}는 cut $\{i, j\}$를 통과해야만 만족시킬 수 있는 노드 쌍간의 수요량의 합이다. 따라서 다음과 같은 사실이 성립됨을 쉽게 알 수 있다.

관찰1 어떠한 루팅방법 $\mathrm{x} \in X$에 대해도 임의의 두 아크 i와 j는 다음을 만족한다.

$$D_{ij} = g(\mathrm{x}, i) + g(\mathrm{x}, j) - 2 \sum_{k \in K_i^+ \cap K_j^+} x_k - 2 \sum_{k \in K_i^- \cap K_j^-} (r_k - x_k). \tag{1}$$

따라서 $g(\mathrm{x}, i) + g(\mathrm{x}, j) \ge D_{ij}$ 이고 만약에 두 아크 i와 j가 다음 조건 (C1)과 (C2)를 만족하면 $D_{ij} = g(\mathrm{x}, i) + g(\mathrm{x}, j)$이다.

$$(C1) \ x_k = 0, \quad \forall k \in K_i^+ \cap K_j^+$$
$$(C2) \ x_k = r_k, \quad \forall k \in K_i^- \cap K_j^-.$$

링 내의 모든 cut들의 D_{ij} 값 중 최대값을 M 이라고 하자. 그러면 관찰 1에 의해서 어떠한 루팅방법 $\mathrm{x} \in X$에 대하여도 $F(\mathrm{x}) \ge M/2$을 알 수 있다. 또한 모든 아크 $i \in L$ 에 대해

$g(x, i) \leq M/2$ 을 만족하는 루팅방법이 존재함을 보일 수 있는 데, 이러한 사실은 Okamura와 Seymour 의 정리 [8]의 특수한 경우가 되며 Vachani 등 [11]과 Schrijver 등 [10]도 이를 별도로 증명하였다. 따라서 $F(x) = M/2$ 이라는 조건은 $x \in X$가 $(\overline{P})$의 최적해가 되기 위한 필요충분조건이 된다.

Myung 등 [7]은 RLPW의 최적해를 $O(n|K|)$에 구하는 해법 EXACT를 개발하였다. 이 해법은 나중에 본 논문의 대상인 RLPWI를 구하는 해법에 사용되기 때문에 여기서 간단히 언급하기로 한다.

알고리즘 EXACT

단계 1. K에 속한 노드 쌍의 순서를 다음과 같이 재배열한다. k_i를 K에 속한 i번째 노드 쌍이라고 할 때 $o(k_1) < o(k_2)$이면 $k_1 < k_2$되게 하고, $o(k_1) = o(k_2)$인 경우에는 $d(k_1) > d(k_2)$이면 $k_1 < k_2$ 되도록 한다.

단계 2. 우선 모든 노드 쌍간의 수요를 시계 방향으로 루팅한다.

단계 3. 각 노드 쌍 $k \in K$에 대해 배열된 순서로 노드 쌍 k의 수요 중 일부 또는 전부를 링의 최대 용량이 감소되도록 반시계방향으로 다시 루팅을 변경한다.

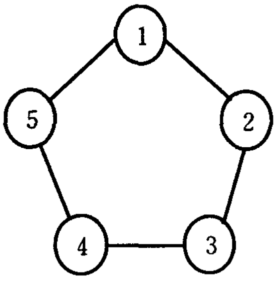
단계1의 재배열은 $O(|K|\log|K|)$ 계산으로 가능하다. 단계3에서 루팅의 변경은 다음과 같이 $O(n|K|)$ 시간 내에 간단히 수행된다. 주어진 루팅 방법 $x \in X$에 대하여 가장 흐름이 많은 아크의 집합을

$$L(x) = \{ l \in L \mid g(x, l) = \max_{i \in L} g(x, i) \}$$

이라고 정의하면 어떤 노드 쌍 $k \in K$에 대하여 최대 흐름의 아크들이 모두 노드 쌍 k에 대해 시계 방향의 경로에 속하면 (이때 $\max_{l \in L_k^+} g(x, l) > \max_{l \in L_k^-} g(x, l)$이고 $L(x) \subseteq L_k^+$이다), 현재 시계 방향으로 루팅되어 있는 노드 쌍 k의 수요를 반시계 방향으로 재루팅하는 경우 링의 용량을 감소시킬 수 있다. 알고리즘에서 노드 쌍 k의 수요를 재루팅할지 여부가 k번째에 점검되므로 기호 k는 노드 쌍을 표시할 때 사용함과 동시에 알고리즘에서의 재루팅하는 점검 순서를 나타낼 때도 같은 기호를 사용하기로 한다. x^k는 k번째 순서에서 노드 쌍 $k \in K$에 대해 재루팅이 완료된 뒤에 구해진 해, 즉 조정된 루팅 방법을 표시하는 것으로 정의한다. 물론 재루팅을 검토한 뒤에 위에서 언급된 조건을 만족하지 않으면 루팅은 변하지 않으나 이 경우도 재루팅이 완료되었다고 표현하기로 한다. 그리고 재루팅 절차가 시작되기 전의 초기해를 $x^0 = \{r_1, \cdots, r_{|K|}\}$로 표시한다. 그러면 $x^{|K|}$ 는 알고리즘 EXACT가 완료된 뒤의 최종해를 표시하게 된다. 그리고 k번째 재루팅 단계에서 노드쌍 k의 수요는 링의 용량이 최소가 되도록 재루팅되는 데, 상황에 따라 전체 수요가 반시계 방향으로 재루팅될 수도 있고 $\max_{l \in L_k^+} g(x^k, l) = \max_{l \in L_k^-} g(x^k, l)$가 될 때까지 재루팅될 수도 있다. 그림 1에 알고리즘의 진행 내용이 나타나 있다.

k	(o(k),d(k))	r_k
1	(1,4)	5
2	(3,5)	5
3	(3,4)	2

(a) 노드 쌍간의 수요



(b) 링 네트워크

k번째 단계	x^k	$g(x^k, l)$				
		1=(1,2)	2=(2,3)	3=(3,4)	4=(4,5)	5=(5,1)
0	(5,5,2)	5	5	12	5	0
1	(1.5,5,2)	1.5	1.5	8.5	8.5	3.5
2	(1.5,2.5,2)	4	4	6	6	6
3	(1.5,2.5,2)	4	4	6	6	6

* 음영처리된 부분은 L_k^+에 속한 아크를 나타낸다.

(c) EXACT의 수행결과

[그림 1] EXACT알고리즘의 적용예

이제부터 알고리즘 수행 도중에 변경되는 중간해들의 특성을 살펴보기로 한다. 이 특성들이 뒤에 우리가 RLPWI, 즉 정수조건을 만족하는 해를 구할 때도 요긴하게 사용되기 때문이다. 노드 쌍을 루팅된 상태에 따라 다음과 같은 집합으로 분류하자. $K^0=\{k\in K|x_k^{|K|}=0\}$, $K^r=\{k\in K|x_k^{|K|}=r_k\}$, 그리고 $K^b=\{k\in K|0<x_k^{|K|}<r_k\}$ 그러면 다음과 같은 정리가 성립한다.

정리 1. (Myung 등 [7]) $k=1,2,\cdots,|K|$에 대해 다음이 성립한다.

(*i*) $L(x^{k-1})\subseteq L(x^k)$

(*ii*) $L(x^{k-1})\subseteq L_k^+$ if and *only* if $k\in K^0 \cup K^b$

(*iii*) *If* $k\in K^r\cup K^b$, $L(x^k)\backslash L_k^+\neq\emptyset$.

어떤 아크 $l_1\in L(x^{|K|})$에 대해 l_2 가 $l_2=\max L(x^{\hat{k}})$ 의 조건을 만족하면 이러한 l_2 를 l_1 의 대칭아크라고 부르기로 하자. 이때 $\hat{k}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{k}=\begin{cases}\max\{k\in K|l_1\in L_k^+\} & \text{if } \{k\in K|l_1\in L_k^+\}\neq\emptyset,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

그림 1의 예제에서 $l_1=3$이라고 가정하면, $\hat{k}=3$이고 $l_2=5$가 된다.

다음에 제시하는 정리는 앞서 소개한 알고리즘 EXACT가 정수조건이 없는 경우의 문제, 즉 RLPW의 최적해를 구할 수 있음을 증명하는데 유용하게 쓰이고 또한 나중에 RLPWI의 해를 구하는 알고리즘의 기초가 된다.

정리 2. 만약에 $l_1=\min L(x^{|K|})$ 이거나 $l_1<\min L(x^0)$이고 $l_1\in L(x^{|K|})$이면 l_1과 l_1의 대칭아크 l_2는 관찰 1에서 기술한 두 조건 (C1)과 (C2)를 만족한다.

증명:
먼저 l_1과 l_2가 조건 (C1)을 만족함을 보이자. 어떤 노드 쌍 $k\in K$가 $k\in K^+_{l_1}\cap K^+_{l_2}$를 만족한다고 가정하면 $l_1\in L^+_k$이므로 l_2의 정의에 의하여 $l_2\geq\max L(x^k)$이다. 이제부터 $l_1\leq\min L(x^k)$임을 보이기로 한다. 정리 1의 (i)에 의하여 $l_1=\min L(x^{|K|})$일 때는 당연히 성립한다. 만약에 $l_1\neq\min L(x^{|K|})$이면 정리의 가정에 의해 $l_1<\min L(x^0)$이고 $l_1\in L(x^{|K|})$이다. 이 경우 $\min L(x^{|K|})<l_1<\min L(x^0)$이 다
$l_1\neq\min L(x^0)$이므로, l_1은 최소 한번 이상의 재루팅이 이루어진 후에 최대 용량의 아크가 되었을 것이다. 따라서 $\min L(x^{k'})\leq l_1<\min L(x^{k'-1})$이고 $l_1<\min L^+_{k'}$인 $k'>0$이 존재하여야 한다. $l_1\in L^+_k$ 이므로 $o(k)<o(k')$이고 노드 쌍의 배열 순서에 따라 $k<k'$ 이다. 따라서, $l_1<\min L(x^k)$이다.

왜냐하면 $L(x^k)\subseteq L(x^{k'-1})$이기 때문이다. 이로서 $l_1\leq\min L(x^k)$이 증명되었다. 그러면 $l_1\leq\min L(x^k)\leq\max L(x^k)\leq l_2$이라는 사실로부터 $L(x^{k-1})\subseteq L(x^k)\subseteq L^+_k$가 성립하고 정리 1의 (ii)와 (iii)에 의해 (C1)이 성립한다.

이제 l_1과 l_2가 조건 (C2)를 만족함을 보이기로 한다. $k\in K^-_{l_1}\cap K^-_{l_2}$, 즉 $\{l_1, l_2\}\subseteq L^-_k$라고 가정하자. 그러면 다음의 세 가지 경우가 가능하다.

경우 1. $\max L^+_k<l_1$.
$\max L_k+<l_1\leq\min L(x^0)$이고 $L(x^0)\subseteq L(x^{k-1})$이므로 $L(x^{k-1})\not\subseteq L^+_k$이다. 따라서 정리 1의 (ii)에 의해서 $k\in K^r$이다.

경우 2. $l_1<\min L^+_k\leq\max L^+_k<l_2$.
$\hat{k}$를 (2) 처럼 정의하면 우리는 $k-1\geq\hat{k}$ 임을 보일 수 있다. 왜냐하면 $\hat{k}=0$일 때는 당연하고 만약에 $\hat{k}\geq1$이면 $l_1\in L^+_{\hat{k}}$이므로 $o(k)>o(\hat{k})$이다. 따라서 $k>\hat{k}$이므로 성립한다. 이제 $l_2\in L(x^{\hat{k}})\subseteq L(x^{k-1})$이므로 $L(x^{k-1})\not\subseteq L^+_k$이고 정리 1의 (ii)에 의해서 $k\in K^r$이다.

경우 3. $l_2<\min L^+_k$.
이때도 $k-1\geq\hat{k}$ 이고 위에서와 같은 방법으로 $k\in K^r$임을 쉽게 보일 수 있다.

정리 3. $x^{|K|}$ 는 ($\overline{P}$)의 최적해이다.

증명:

$l_1=\min L(x^{|K|})$로 정하고 l_2를 l_1의 대칭 아크라고 가정하자. 그러면 $g(x^{|K|}, l_1)=g(x^{|K|}, l_2)=F(x^{|K|})$이다. 왜냐하면 $\{l_1, l_2\}\subseteq L(x^{|K|})$이기 때문이다. 정리 2와 관찰 1에 의하여, $D_{l_1, l_2}=g(x^{|K|}, l_1)+g(x^{|K|}, l_2)$이다. 그러므로, $F(x^{|K|})=z_{LP}=M/2$ 이고 $x^{|K|}$은 ($\overline{P}$)의 최적해이다.

위의 정리의 증명은 Myung 등 [7] 에서 증명한 방법보다 간결하게 EXACT가 RLPW의 최적 해법임을 증명하고 있다.

3. RLPWI의 해법

이 장에서는 $O(n|K|)$ 계산으로 RLPWI의 최적해를 구할 수 있는 해법을 소개하기로 한다. 우리의 해법은 앞장에서 소개한 EXACT에 의해서 구한 ($\overline{P}$)의 최적해 $x^{|K|}$를 이용하여 최적해를 도출한다. 만약에 $x^{|K|}$가 정수해이면 이것이 바로 RLPWI의 최적해이므로 $x^{|K|}$가 정수해가 아닌 경우만을 생각해 보자. 루팅된 흐름이 정수가 아닌 노드 쌍의 인덱스 집합을 $K^f=\{k_1,\cdots, k_s\}$로 정의하자. 루팅된 흐름이 정수가 아니면 양방향으로 분할되어 루팅된 경우이므로 $K^f\subseteq K^b$ 이고 K 의 배열에 대한 가정과 정리 1의 (iii)을 고려하면 $o(k_1)<o(k_2)<\cdots<o(k_s)<d(k_1)<\cdots<d(k_s)$임을 쉽게 알 수 있다. 아크의 집합 L을 다음의 $2s+1$개의 부분집합으로 분할하여 보자:

$L_0=\{l\in L|1\le l<o(k_1)\}$,

$L_1=\{l\in L|o(k_1)\le l<o(k_2)\}$, $\cdots$,

$L_s=\{l\in L|o(k_s)\le l<d(k_1)\}$, $\cdots$,

$L_{2s}=\{l\in L|d(k_s)\le l\le n\}$.

이때, L_0 는 공집합일 수도 있다. 또한 모든 $k\in K^f$에 대해서 $L(x^0)\subseteq L_k^+$이므로 $L(x^0)\subseteq L_s$이다.

그리고 EXACT의 루팅과정을 고려해 보면 어떤 노드 쌍의 시계 방향 (반시계 방향)으로의 흐름이 정수가 아니면 반시계 방향(시계 방향)으로도 정수가 아닌 흐름이 존재하며, 정수가 아닌 흐름의 소수부분은 0.5임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 이러한 정수 값이 아닌 노드 쌍의 흐름 중 0.5씩만 시계 방향 또는 반시계 방향으로 재루팅하면 최적해는 아닐 지라도 정수해는 쉽게 구할 수 있다. 우리 해법의 아이디어는 0.5씩의 재루팅을 일정한 규칙에 따라 하면 최적해를 구할 수 있다는 것이다. 즉 그러한 규칙만 발견하면 RLPWI의 최적해를 구할 수 있는 방법을 도출할 수 있다는 것이다. 이를 위하여 루팅된 흐름이 정수가 아닌 노드 쌍들의 흐름을 0.5씩 재루팅하기 위한 두 가지 방법, 방법A와 방법B를 정의한다. 두 방법 모두 K^f에 속한 노드 쌍의 흐름을 노드 쌍의 배열 순서별로 시계 방향과 반시계 방향으로 번갈아 가면서 0.5씩 재루팅한다. 두 방법의 차이는 방법A는 재루팅을 시계 방향부터 방법B는 반시계 방향부터 시작한다는 데 있다. 또한 방법B는 K^f에 속한 노드 쌍의 수가 짝수일 때만 사용된다.

두 방법을 수식을 이용하여 설명하면 다음과 같다. x^*를 EXACT에서 구해진 해 $x^{|K|}$ 중 정수가 아닌 노드 쌍의 흐름을 방법A 나 방법B를 통하여 재 루팅한 후에 얻어진 정수해라고 가정하자. 그리고 각 $k_t \in K^f$에 대해서 $z_{k_t} = x^*_{k_t} - x^{|K|}_{k_t}$를 정의하자. 만약에 x^*가 방법A를 적용한 뒤에 얻어진 해라면, t가 홀수일 때 $z_{k_t} = 0.5$이고 t가 짝수일 때 $z_{k_t} = -0.5$이다. 만약 x^*가 방법B의 결과이면 t가 홀수일 때 $z_{k_t} = -0.5$, t가 짝수일 때 $z_{k_t} = 0.5$가 될 것이다. 또한 각 $l \in L$에 대해

$$g(x^*, l) = g(x^{|K|}, l) + \sum_{k \in K_l^+ \cap K^f} z_k - \sum_{k \in K_l^- \cap K^f} z_k$$

가 성립하므로 다음이 만족된다.

관찰 1 (a) $|K^f|$가 홀수이고 x^*가 $x^{|K|}$를 방법A에 의해서 재루팅하여 얻은 정수해이면, 다음이 성립된다.

$$g(x^*, l) = \begin{cases} g(x^{|K|}, l) + 0.5, & l \in L_t \text{ 이고 } t \text{ 가 홀수일 때} \\ g(x^{|K|}, l) - 0.5, & l \in L_t \text{ 이고 } t \text{ 가 짝수일 때} \end{cases}$$

(b) $|K^f|$가 짝수이고 x^*가 방법A의 결과이면,

$$g(x^*, l) = \begin{cases} g(x^{|K|}, l) + 1, & l \in L_1 \cup L_3 \cup \cdots \cup L_{s-1}, \\ g(x^{|K|}, l), & l \in L_0 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_s \cup \cdots \cup L_{2s}, \\ g(x^{|K|}, l) - 1, & l \in L_{s+1} \cup L_{s+3} \cup \cdots \cup L_{2s-1}. \end{cases}$$

(c) $|K^f|$가 짝수이고 x^*가 방법B의 결과이면,

$$g(x^*, l) = \begin{cases} g(x^{|K|}, l) + 1, & l \in L_{s+1} \cup L_{s+3} \cup \cdots \cup L_{2s-1}, \\ g(x^{|K|}, l), & l \in L_0 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_s \cup \cdots \cup L_{2s}, \\ g(x^{|K|}, l) - 1, & l \in L_1 \cup L_3 \cup \cdots \cup L_{s-1}. \end{cases}$$

이제 (P)의 최적해를 구하는 알고리즘을 소개하고 이 알고리즘이 최적해를 구할 수 있음을 증명하기로 한다. 이 알고리즘은 우선 EXACT를 이용하여 $x^{|K|}$를 구한 다음 $x^{|K|}$가 정수해가 아니면 즉 $K^f \neq \emptyset$이면 경우별로 다음의 절차에 의해서 최적 정수해를 구한다.

알고리즘 INTEGER

단계 1. $|K^f|$가 홀수이면 $x^{|K|}$에 방법A를 적용하여 최적해를 구한다.

단계 2. $|K^f|$ 가 짝수이면, $\min L(x^{|K|}) \in L_t$를 만족하는 t를 구하고 ($0 \le t \le s$ 가 된다.), t가 짝수이면, $x^{|K|}$에 방법A를 적용하여 최적해를 구한다.

단계 3. $|K^f|$가 짝수이고, $\min L(x^{|K|}) \in L_t$인 t가 홀수인 경우, 각 $l \in L_{2s}$에 대해 $g(x^{|K|}, l) \le z_{LP} - 1$ 이면 $x^{|K|}$에 방법B를 적용하여 정수해를 구한 뒤 추가로 k_s 인덱스에 해당하는 노드 쌍의 흐름에 대하여 1 만큼 반시계 방향으로 재루팅하여 최적해를 구한다.

단계 4. $|K^f|$가 짝수이고, $\min L(x^{|K|}) \in L_t$인 t가 홀수인 경우, $g(x^{|K|}, l) = z_{LP}$ 인 $l \in L_{2s}$가 존재하면 다음과 같이 최적해를 구한다. $l_0 = \min L(x^0)$와 $l^* = \max\{l \in L_{2s} | g(x^{|K|}, l) = z_{LP}\}$를 구한다. $k^* \in K^+_{l_0} \cap K^+_{l^*}$이고 $x^{|K|}_{k^*} \ge 1$인 $k^* \in K$가 존재하면 $x^{|K|}$에 방법B

를 적용하여 정수해를 구한 뒤 k^* 인덱스에 해당하는 노드 쌍의 흐름에 대하여 추가로 1 만큼 반시계 방향으로 재루팅하여 최적해를 구하고, 만약에 그러한 조건을 만족하는 k^*가 존재하지 않으면 $x^{|K|}$에 방법B만 적용하여 최적해를 구한다.

위의 추가 절차는 EXACT의 계산시간 $O(n|K|)$를 증가시키지 않음으로써 (P)의 최적해를 구하는 알고리즘도 $O(n|K|)$의 계산시간에 머무르게 된다. 이제부터 위와 같은 절차를 통하여 구한 정수해가 (P)의 최적해임을 일련의 정리를 통해서 증명하기로 한다. $|K^f|$가 홀수이면, 모든 $l \in L$에 대하여 $g(x^{|K|}, l)$는 정수가 아닌 값을 갖게 되고 이 값의 소수부분은 0.5이다. 따라서, z_{LP} 역시 소수부분이 0.5인 정수가 아닌 값이다. $z_I \geq z_{LP}+0.5$라는 사실과 관찰 2의 (a)로부터 다음의 정리가 성립되고 단계1은 타당하다.

정리 4. 만약에 $|K^f|$가 홀수이고 x^*가 $x^{|K|}$에 방법A를 적용하여 구해진 정수해이면 x^*는 (P)의 최적해이다.

$|K^f|$가 짝수인 경우를 고려해 보자. 그러면 z_{LP}는 정수값이 되고 M (링 내의 모든 cut들의 D_{ij} 중 최대값으로 정의했었음)은 $z_{LP}=M/2$라는 사실로 부터 짝수임을 알 수 있다. 어떤 cut $\{i,j\}$에 대해서 만약에 $D_{ij}=M$이면 이 cut은 포화상태라고 부르기로 하고 $M-D_{ij}$가 홀수이면 cut도 홀수라고 부르기로 한다. 그리고 링내의 어떤 홀수 cut $\{i,j\}$에 대해서도 i와 j 중 적어도 하나의 아크는 어떠한 포화 상태의 cut에도 포함되지 않을 때 이 링은 패리티(parity) 조건을 만족한다고 정의한다. 그러면 Frank 등 [3]의 정리 2.2 와 Schrijver 등 [10]의 정리2 로부터 다음이 성립한다.

정리 5. $|K^f|$가 짝수일 때, 링이 패리티 조건을 만족하면 $z_I=z_{LP}$이고, 만족하지 못하면 $z_I=z_{LP}+1$이다.

또한 $|K^f|(=s)$가 짝수일 때 다음이 성립한다.

정리 6. s가 짝수이면 $i \in L_p$ 이고 $j \in L_q$인 두 아크 i 와 j ($i<j$)가 다음과 같은 두 조건 (i)과 (ii)를 만족하면, $g(x^{|K|}, i)+g(x^{|K|}, j)-D_{ij}$ 은 홀수이다.

(i) $p<q \leq s$

(ii) p 와 q 중 하나는 홀수이고 나머지는 짝수

증명:

(1)로부터, $g(x^{|K|}, i)+g(x^{|K|}, j)-D_{ij}=2\sum_{k \in K_i^+ \cap K_j^+} x_k^{|K|}+2\sum_{k \in K_i^- \cap K_j^-}(r_k-x_k^{|K|})$.

각 $k \in K^f$에 대해서, $x_k^{|K|}=a_k+0.5$(a_k는 임의의 정수)이고 $|(K_i^+ \cap K_j^+) \cap K^f|$나 $|(K_i^- \cap K_j^-) \cap K^f|$ 중 하나는 홀수이고 나머지는 짝수. 따라서 $g(x^{|K|}, i)+g(x^{|K|}, j)-D_{ij}$는 홀수이다.

이제부터 $|K^f|$가 짝수일 때 단계 2,3,4 에서

$\mathrm{x}^{|K|}$로 부터 구한 (P)의 정수해가 최적해가 됨을 증명하기로 한다.

정리 7. $|K^f|$가 짝수이고 $0 \le t \le s$인 임의의 짝수 t에 대해서 $l_1 = \min L(\mathrm{x}^{|K|}) \in L_t$라고 가정하자. 또한 x^* 가 $\mathrm{x}^{|K|}$ 에 방법A를 적용하여 얻은 정수해라고 가정하면 x^* 는 (P)의 최적해이다.

증명:

관찰 2의 (b)에 의하여 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}$ 이거나 $z_{LP}+1$ 이다. $F(x^*) = z_{LP}$ 이면 x^*는 (P)의 최적해가 되므로 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}+1$인 경우만 증명하면 된다. 후자의 경우는 $g(\mathrm{x}^*, l^*) = z_{LP}+1$인 $l^* \in L$이 존재하게 된다. 또한 $l^* \in L_1 \cup L_3 \cup \cdots \cup L_{s-1}$이고 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l^*) = z_{LP}$ 이어야 하므로 $l^* \ne l_1$이고 $l^* \in L(\mathrm{x}^{|K|})$이며 $l^* < \min L(\mathrm{x}^0)$이다. 정리 2에 의해서, l_1과 l^*는 각각 포화상태의 cut에 속하게 되고 정리 6에 의해 $\{l_1, l^*\}$은 홀수 cut이다. 따라서 cut $\{l_1, l^*\}$이 패리티 조건을 만족시키지 못하므로 $z_I = z_{LP}+1$이고 x^*는 (P)의 최적해가 된다.

이제 $\min L(\mathrm{x}^{|K|}) \in L_t$인 t 가 홀수인 경우를 생각해 보자.

정리 8. $|K^f|$ 가 짝수이고, 임의의 홀수 정수 t $(0 \le t \le s)$에 대해서 $l_1 = \min L(\mathrm{x}^{|K|}) \in L_t$ 이며 각 $l \in L_{2s}$ 에 대해 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l) \le z_{LP}-1$ 라고 가정하자. 또한 x^* 가 $\mathrm{x}^{|K|}$ 에 방법B를 적용하여 구해진 정수해에 대해서 k_s 인덱스에 해당하는 노드 쌍의 흐름을 추가로 1 만큼 반시계 방향으로 재루팅하여 얻어진 정수해라고 하면 x^* 는 (P)의 최적해이다.

증명:

우리의 가정에 의해서

$$g(\mathrm{x}^*, l) = \begin{cases} g(\mathrm{x}^{|K|}, l)+1, & l \in L_0 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_{s-2} \cup L_{2s}, \\ g(\mathrm{x}^{|K|}, l), & l \in L_1 \cup L_3 \cup \cdots \cup L_{s-1} \\ & \cup L_{s+1} \cup \cdots \cup L_{2s-1}, \\ g(\mathrm{x}^{|K|}, l)-1, & l \in L_s \cup L_{s+2} \cup \cdots \cup L_{2s-2}, \end{cases}$$

그리고 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}$ 이거나 $z_{LP}+1$이다. $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}$이면 x^*는 (P)의 최적해가 되어 정리가 성립되므로 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}+1$인 경우만 고려하기로 하자. 그러면 $g(\mathrm{x}^*, l^*) = z_{LP}+1$인 $l^* \in L$이 존재하여야 하고 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l^*) = z_{LP}$ 이며 $l^* \in L_0 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_{s-2}$이어야 된다. 각 $l \in L_{2s}$ 에 대해서 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l) \le z_{LP}-1$ 이라고 가정하였으므로 $l^* \notin L_{2s}$ 임이 틀림없다. 따라서 $l^* \ne l_1$이고 $l^* \in L(\mathrm{x}^{|K|})$이며 $l^* < \min L(\mathrm{x}^0)$이다. 정리 2에 의해서 l_1과 l^*는 각각 포화상태의 cut에 속하게 되며 정리 6에 의해서 $\{l_1, l^*\}$는 홀수 cut이다. 따라서 링이 패리티 조건을 만족하지 못하므로 x^*는 (P)의 최적해이다.

마지막으로 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l) = z_{LP}$가 되는 $l \in L_{2s}$이 존재하는 경우를 생각해 보자.

정리 9. $|K^f|$가 짝수이고, 임의의 홀수 정수

$t\ (0 \leq t \leq s)$에 대해서 $l_1 = \min L(\mathrm{x}^{|K|}) \in L_t$이며 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l) = z_{LP}$인 $l \in L_{2s}$가 존재한다고 가정하자. $l_0 = \min L(\mathrm{x}^0)$와 $l^* = \max\{l \in L_{2s} | g(\mathrm{x}^{|K|}, l) = z_{LP}\}$라고 정의하기로 한다. $k^* \in K^+_{l_0} \cap K^+_{l^*}$이고 $x^{|K|}_{k^*} > 0$인 $k^* \in K$가 존재하면 (P)의 최적해는 $\mathrm{x}^{|K|}$에 방법B를 적용하여 정수해를 구한 뒤 k^* 인덱스에 해당하는 노드 쌍의 흐름에 대하여 추가로 1 만큼 반시계 방향으로 재루팅하여 구한 해가 (P)의 최적해이고, 만약에 조건을 만족하는 k^*가 존재하지 않으면 $\mathrm{x}^{|K|}$에 방법B를 적용하여 얻은 정수해가 (P)의 최적해이다.

증명:

먼저 $k^* \in K^+_{l_0} \cap K^+_{l^*}$이고 $x^{|K|}_{k^*} > 0$인 $k^* \in K$가 존재하는 경우를 생각해 보자. 우선 $o(k_s) < o(k^*)$임을 보이기로 한다. $o(k_s) \geq o(k^*)$라고 가정해 보자. $d(k_s) < d(k^*)$이므로 $k^* < k_s$이고 $L^+_{k_s} \subseteq L^+_{k^*}$이다. $k^* \in K^r \cup K^b$ 이므로, 정리 1의 (iii)에 의해서 $L(\mathrm{x}^{k^*}) \backslash L^+_{k^*} \neq \emptyset$이다. 따라서 $L(\mathrm{x}^{k^*}) \not\subseteq L^+_{k_s}$이 되어야 하는 데 정리 1의 (ii)를 고려할 때 $k_s \in K^f \subseteq K^b$라는 사실에 모순이 되므로 $o(k_s) < o(k^*)$이다. L_s를 $L^1_s = \{l \in L | o(k_s) \leq l < o(k^*)\}$와 $L^2_s = \{l \in L | o(k^*) \leq l < d(k_1)\}$로 추가 분할하고 L_{2s}도 $L^1_{2s} = \{l \in L | d(k_s) \leq l < d(k^*)\}$과 $L^2_{2s} = \{l \in L | d(k^*) \leq l \leq n\}$로 분할하기로 하자.

x^*를 $\mathrm{x}^{|K|}$에 방법B를 적용하여 얻은 정수해에 대해서 k^* 인덱스에 해당하는 노드 쌍의 흐름에 대하여 1 만큼 반시계 방향으로 재루팅하여 구해진 정수해라고 가정하자. $k^* \notin K^f$에서 $x^{|K|}_{k^*} \geq 1$ 이므로 1 만큼 반시계 방향으로 재루팅할 수 있는 흐름이 항상 존재한다. 그러면 정의에 의해서 다음이 성립한다.

$$g(\mathrm{x}^*, l) = \begin{cases} g(\mathrm{x}^{|K|}, l) + 1, & l \in L_0 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_{s-2} \cup L^1_s \cup L^2_{2s} \\ g(\mathrm{x}^{|K|}, l), & l \in L_1 \cup L_3 \cup \cdots \cup L_{s-1} \cup L_{s+1} \cup \cdots \\ & \quad \cup L_{2s-1}, \\ g(\mathrm{x}^{|K|}, l) - 1, & l \in L^2_s \cup L_{s+2} \cup \cdots \cup L_{2s-2} \cup L^1 \end{cases}$$

이고 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}$이거나 $z_{LP}+1$이다. 만약에 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}$이면 x^*는 (P)의 최적해이어서 정리가 성립되므로 $F(\mathrm{x}^*) = z_{LP}+1$ 즉 어떤 $\hat{l} \in L$에 대해 $g(\mathrm{x}^*, \hat{l}) = z_{LP}+1$인 경우만 고려해 보자. $g(\mathrm{x}^{|K|}, \hat{l}) = z_{LP}$임은 쉽게 알 수 있고 L^2_{2s}의 정의에 의하여 각 $l \in L^2_{2s}$에 대하여 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l) \leq z_{LP} - 1$이 성립한다. 따라서 $\hat{l} \in L_0 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_{s-2} \cup L^1_s$이고 $\hat{l} \neq l_1$이 된다. 또한 k^*와 L^1_s의 정의에 의해서 $\max L^1_s < l_0 = \min L(\mathrm{x}^0)$이고 $\hat{l} < \min L(\mathrm{x}^0)$이 성립되게 된다. 정리 2에 의해서, l_1 과 $\hat{l}$ 는 각각 포화상태의 cut에 포함되게 되고 $\{l_1, \hat{l}\}$는 홀수 cut임이 됨을 정리 6에 의하여 알 수 있다. 따라서 링이 패리티 조건을 만족하지 못하므로 x^*가 (P)의 최적해가 된다.

마지막으로 정리에서의 조건을 만족하는 k^*가 존재하지 않는 경우를 생각해 보자. 우선 $\{l_0, l^*\}$이 포화상태의 cut임을 보인다. l_0와 l^*의 정의에 의해서 $g(\mathrm{x}^{|K|}, l_0) = g(\mathrm{x}^{|K|}, l^*) =$

z_{LP}이다. $k \in K^+_{l_0} \cap K^+_{l^*}$이면 $k \in K^0$이다. 정리 6의 (i)과 (ii)에 의해서 $k \in K^-_{l_0}$이면 $l_0 \in L(x^0)$이므로 $k \in K^r$이다. 따라서 $k \in K^-_{l_0} \cap K^-_{l^*}$이면 $k \in K^r$이다.

관찰 1에 의해서 $D_{l_0, l^*} = 2z_{LP}$이고 cut $\{l_0, l^*\}$는 포화상태임을 알 수 있다. 정리 2에 의해서 l_1도 포화상태의 cut에 속하고 $\{l_1, l_0\}$는 정리 6에 의해서 홀수 cut이므로 링은 패리티 조건을 만족하지 못하게 되어 정리가 성립한다.

4. 결 론

본 연구에서는 링의 용량결정문제 중 정수 단위로만 분할이 허용되는 문제의 효율적 해법을 개발하였다. 이러한 문제는 SONET 링을 설계할 때 링크의 용량이 단위 용량의 정수 배로서만 설치되어야 하는 경우에 발생된다. 본 연구에서는 이 문제를 이제까지 개발된 어떠한 해법보다 빠른 $O(n|K|)$ 계산시간 내에 최적해를 구할 수 있는 해법을 제시하였다. 본 연구의 대상이 되는 문제는 실제 SONET 링을 설계할 때 반복적으로 풀어야 되는 개발도구로 이용되므로 본 연구에서 개발된 해법을 이용함으로써 전체적으로 많은 계산상의 효율을 가져올 수 있게 되었다.

참 고 문 헌

[1] S. Cosares, D.N. Deutsch, I. Saniee and O.J. Wasem, "SONET toolkit: a decision support system for designing robust and cost-effective fiber-optic networks", Interfaces 25(1995), pp.20-40.

[2] S. Cosares and I. Saniee, "An optimization problem related to balancing loads on SONET rings", *Telecommunication Systems* 3(1994), pp.165-181.

[3] A. Frank, T. Nishizeki, N.Saito, H. Suzuki and E. Tardos, "Algorithms for routing around a rectangle", *Discrete Aplied Mathematics* 40(1992), pp.363-78.

[4] C.Y. Lee and S.G. Chang, "Balancing loads on SONET rings with integer deand splitting", *Computers and O.R.* 24 (1997), pp.221-229.

[5] K. Lee, K. Park, S. Park and S.-B. Kim, "Ring loading problem with integer demand splitting", *Working paper*, KAIST (1996).

[6] Y.-S. Myung, "Integer Solution to the Ring Loading Problem with Demand Splitting", presented at the KORMS meting (1996).

[7] Y.-S. Myung, H.-G. Kim and D.-W. Tcha, "Optimal load balancing on SONET bidirectional rings", *Operations Research* 45(1997) pp.148-152.

[8] H. Okamura and P.D. Seymour, "Multicommodity flows in planar graphs", *Journal of Combinatorial Theory Series B* 31 (1981), pp.75-81.

[9] C.C. Shyur, Y.M. Wu and C.H. Chen, "A capacity comparison for SONET self-

healing ring networks", *IEEE GLOBECOM* 3(1993), pp.1574-1578.

[10] A. Schrijver, P. Seymour and P. Winkler, "The ring loading problem", to appear in SIAM Journal on Discrete Mathematics.

[11] R. Vachani, A. Shulman and P. Kubat, "Multicommodity flows in ring networks", *INFORMS Journal on Computing* 8(1996), pp.235-242.

[12] T.H. Wu, "Fiber network service survivability", Artech House, 1992.