

Compound Poisson 수요를 갖는 CONWIP 시스템의 근사적 분석*

이정은** · 이효성***

Approximate Analysis of a CONWIP system with Compound Poisson Demands*

Jeong Eun Lee** · Hyo-Seong Lee***

Abstract

In this study we consider a CONWIP system in which the processing times at each station follow an exponential distribution and the demands for the finished products arrive according to a compound Poisson process. The demands that are not satisfied instantaneously are assumed to be backordered. For this system we develop an approximation method to obtain the performance measures such as steady state probabilities of the number of parts at each station, the proportion of backordered demands, the average number of backordered demands and the mean waiting time of a backordered demand. For the analysis of the proposed CONWIP system, we model the CONWIP system as a closed queueing network with a synchronization station and analyze the closed queueing network using a product form approximation method. A matrix geometric method is used to solve the subnetwork in the application of the product-form approximation method. To test the accuracy of the approximation method, the results obtained from the approximation method were compared with those obtained by simulation. Comparisons with simulation have shown that the approximate method provides fairly good results.

* 본 연구는 97년도 한국과학재단 연구지원(과제번호: 971-1013-078-1)에 의한 결과임.
** 경희대학교 산업공학과
*** 경희대학교 산업공학과

1. 서론

토요다 자동차가 칸반(kanban) 시스템을 도입하여 성공을 거둔 이후 칸반 시스템에 의해 대표되는 견인 생산시스템(pull control system)에 대한 관심이 고조되고 있다. 견인 생산시스템은 종래의 밀어내기식 생산시스템(push control system)에 비하여 재공품 재고(work-in-process inventory)가 감소되고 시스템의 혼잡도(congestion)가 줄어드는 등 여러 이점을 지니고 있는 것으로 알려져 있다[7,8,12]. 그러나 밀어내기식 생산시스템과 견인 생산시스템은 각기 다른 특성을 지니고 있는 별개의 생산 시스템이므로 모든 평가척도에서 어느 한 시스템이 다른 시스템에 비해 우월하다고 단정 지을 수는 없다. 이러한 이유에서 1980년대 후반 들어서는 두 시스템의 관리방식을 혼합하여 두 시스템이 지니고 있는 장점이 모두 구현될 수 있는 혼합 시스템(hybrid system)에 대한 연구가 활발히 수행되었다[5,6,14]. 그 중에서도 CONWIP 시스템(Constant Work-In-Process System)은 운영방식이 단순하고 적용범위가 넓으면서도, 칸반 시스템의 장점을 그대로 지니고 있어 특별한 관심을 끌고 있다[12,14].

Spearman[13]은 칸반 시스템의 성공요인은 모든 공정에서 선행공정에 견인방식을 적용하는데 기인하지 않고 재공품 재고를 일정수준 이하로 유지, 통제하는데 기인함을 간파하였다. 따라서 모든 공정에서 견인방식을 사용하지 않고도 칸반 시스템의 장점은 구현될 수 있다고 생각하여 견인 생산시스템과 밀어내기식 생산시스템이 혼합된 CONWIP 시스템을 제안하게 되었다

[12,13,14]. CONWIP 시스템에서는 시스템내의 재공품의 수(완제품 포함)가 일정하게 유지되며, 수요가 발생하여 완제품 재고가 인출 될 경우에만 이를 보충하기 위하여 생산지시가 이루어진다. 수요발생에 의해 생산이 견인되므로 이러한 측면에서 보면 CONWIP 시스템은 견인 생산시스템의 특성을 지니고 있다고 할 수 있다. 그러나 완제품의 수요발생이 칸반 시스템에서와 같이 바로 전 공정의 작업을 견인하는 것이 아니고 첫 공정의 작업을 견인하며, 원자재가 첫 공정에서 가공을 마치게 되면 완제품이 될 때까지 밀어내기 방식에 의해 특별한 통제 없이 후속 공정에서의 가공이 이루어진다. 따라서 이러한 측면에서는 CONWIP 시스템은 밀어내기식 생산시스템의 특성을 지니고 있다고 볼 수 있다.

Spearman[13]은 추계적커플링(stochastic coupling)방식을 사용하여 CONWIP 시스템과 칸반 시스템의 성능을 비교하였다. 그 결과 고객 만족도(재고고갈 확률, 재고부족으로 대기중인 고객의 대기시간 등)측면에서 CONWIP 시스템이 칸반시스템에 비해 우수함을 증명하였다. 고객 만족도 측면 이외에도 CONWIP 시스템은 통제방식이 용이하고, 각 공정에서의 생산준비 시간이 비교적 큰 경우에도 적용될 수 있다는 점 등 부수적인 장점이 있는 것으로 보고되고 있다.

Duenyas, Hopp, Spearman[4]은 각 공정에서의 가공시간이 일정하고(deterministic) 기계고장이 발생할 수 있는 CONWIP 생산라인 시스템(flow line system)을 분석하였다. 이 연구에서는 기계의 고장발생 간격과 수리시간이 모두 지수분포를 따르고, 완제품에 대한 수요는 항상

존재(saturated demands)한다는 가정 하에서 시스템의 생산율을 추정하기 위한 근사적 방법이 제시되었다. Duenyas와 Hopp은 이 연구를 확장하여 CONWIP 어셈블리(assembly) 시스템에 대한 분석을 시도하였다. 이들은 기계의 고장은 발생하지 않는다는 가정 하에서 가공시간이 일정한 경우[2]와 지수분포를 따르는 경우[3]에 대해 각각 시스템의 생산율을 구하기 위한 근사적 방법을 개발하였다. 완제품에 대한 수요가 Poisson 과정에 따라 발생하는 시스템의 연구는 Mascolo, Frein, Dallery [10]에 의해 수행되었다. 이 연구에서는 각 작업장에서의 가공시간이 2단계 Coxian 분포를 따른다는 가정 하에서 시스템의 안정상태 확률을 구하기 위한 근사적 기법이 제시되었다.

이상에서 살펴본 바와 같이 CONWIP 시스템에 대한 분석적 연구가 최근 활발히 수행되어져 왔다. 그러나 이들 기존의 연구는 모두 완제품에 대한 수요가 항상 존재하거나 한 개씩 발생한다는 가정하에서 수행되었다[2,3,7,10]. 그러나 실사회에서는 완제품에 대한 수요가 동시에 2개 이상 발생하는 경우가 많다. 이와 같은 상황을 반영하기 위하여 본 연구에서는 완제품에 대한 수요가 compound Poisson 과정에 따라 발생한다는 가정하에서 시스템의 중요한 성능평가척도(performance measures)를 구할 수 있는 근사적 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 모형의 설명

본 연구에서 분석하고자 하는 CONWIP 시스템은 M개의 작업장과 완제품 재고창고로 구성

된 흐름식 생산라인 시스템(flow line system)으로 각 작업장에는 1대의 기계가 존재한다. 작업장 1에서 최초의 가공을 받은 부품은 작업장 2, 3,...에서 후속 가공을 거친 후 작업장 M에서 최후 가공을 받게되며, 작업장 M에서 가공을 마친 부품은 완제품으로 출하되어 완제품 재고창고에 저장된다. 작업장에서 가공을 받거나 가공을 기다리는 각 부품에는 칸반(kanban)이 부착되어 있으며, 완제품의 경우도 칸반이 부착된 채 저장된다. 수요가 발생하여 완제품이 창고에서 인출되면 완제품에 부착되어 있던 칸반은 즉시 완제품에서 떼어져 작업장 1으로 이동해 작업지시서(production authorization card)의 역할을 한다. 칸반이 작업장 1에 도착되면 작업장 1에서는 원자재 부품의 가공이 시작되고 가공이 끝난 부품은 밀어내기 방식에 따라 후속 작업장으로 이동된다. 작업장 1에는 충분한 수의 원자재 부품이 항상 대기중이라 가정한다. 본 연구에서는 재공품 재고(완제품 포함)의 수를 일정하게 유지하기 위하여 K개의 칸반을 사용한다고 가정한다. 완제품에 대한 수요는 compound Poisson 과정에 따라 발생하며, 완제품에 대한 수요가 발생하였을 때 충분한 수의 완제품 재고가 존재하면 모든 수요는 즉시 충족되며, 충분한 수의 완제품 재고가 존재하지 않으면 일부 미충족 수요는 추후납품(backorder)된다. 이외에 본 연구에서는 다음을 가정한다.

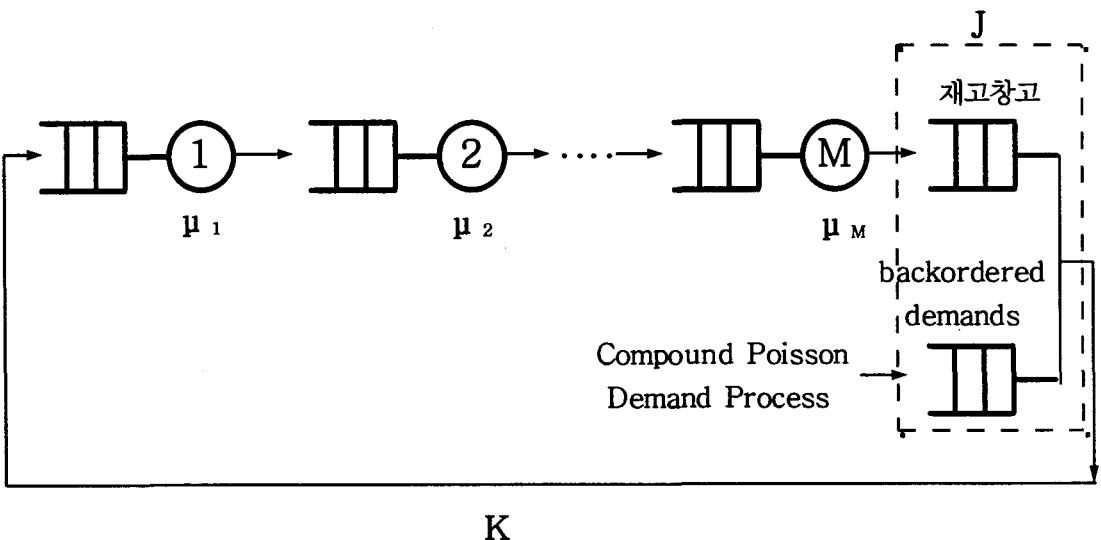
- 1) 작업장 i에서의 가공시간은 평균 $\frac{1}{\mu_i}$ 인 지수분포를 따른다.
- 2) 단위시간당 수요의 도착율은 λ_d 이고 일회 수요의 크기는 확률변수 G로 표시된다. 수요의 최대 크기는 \bar{M} 이며 수요의

- 크기가 j 일 확률은 $g_j (j=1, \dots, \overline{M})$ 로 표시된다.
- 3) 각 작업장에서의 기계고장은 발생하지 않는다.
 - 4) 각 작업장 및 완제품 저장창고의 크기는 칸반의 수 보다 커 봉쇄가 발생하지 않는다.
 - 5) 부품의 작업장 간 이동시간은 무시할 수 있을 정도로 짧다.

본 연구에서는 이와 같은 CONWIP 시스템에서 각 작업장에 존재하는 부품수의 안정상태 확률을 구하는 근사적 기법을 개발하고, 이를 이용하여 추후납품되는 수요의 비율, 각 작업장에서의 평균 재공품 수, 추후납품되는 수요의 평균 대기시간 등 시스템의 중요한 성능평가척도를 구하고자 한다.

본 연구에서 분석하고자 하는 CONWIP 시스템

에서는 시스템 내에 존재하는 칸반 수가 K 로 고정되어 있으므로 칸반을 고객으로 간주하면 폐쇄형 대기네트웍으로 모델링할 수 있다. 완제품이 저장된 장소를 작업장 J 라 하면, 폐쇄형 대기네트웍은 $M+1$ 개의 작업장으로 구성된다 [그림 1]. 작업장 J 에서 칸반의 이동이 이루어지기 위해서는 완제품 재고가 존재하고 완제품에 대한 수요가 발생해야 하므로, 작업장 J 는 2가지 조건이 동시에 충족되어야만 칸반의 이동이 이루어질 수 있는 동기화(synchronization) 스테이션임을 알 수 있다. 작업장 J 가 동기화 스테이션이므로 대기네트웍은 수요가 Poisson과정에 따라 발생하며, 각 작업장에서의 가공시간이 지수분포를 따르는 가장 단순한 경우에도 승법형 조건을 만족하지 못한다. 따라서 CONWIP 시스템의 분석은 근사적 기법에 의존할 수밖에 없으며, 가정이 보다 완화된 본 연구에서의 CONWIP 시스템은 분석이 쉽지 않음을 알 수 있다.



[그림 1] CONWIP 시스템

3. CONWIP 시스템 분석

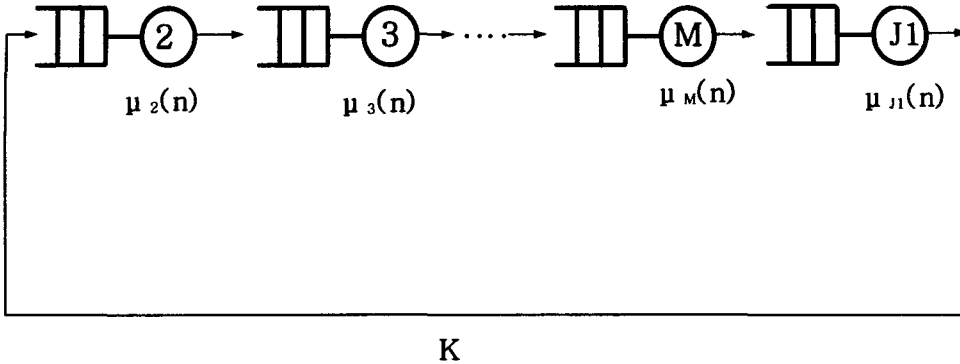
3.1 승법형근사법 개요

본 연구에서는 CONWIP 시스템의 분석을 위하여 Baynat와 Dallery[1]의 승법형근사법(product-form approximation method)을 사용하고자 한다. Baynat와 Dallery의 승법형근사법은 서비스 시간이 일반분포를 따르는 폐쇄형 대기네트웁을 분석하기 위한 기법으로 Marie의 기법[9]에 기초하고 있다. 승법형근사법은 Mascolo 외[10]에 의해 수요가 단순 Poisson과정을 따르는 CONWIP 시스템에 성공적으로 적용된 바 있다. 승법형근사법은 대기네트웁을 몇 개의 하부네트웁으로 분해한 후, 각각의 하부네트웁을 서비스시간이 지수분포를 따르고 서비스율이 상태의존적인 단일서버로 치환함으로써 분석하고자 하는 폐쇄형 대기네트웁을 승법형 대기네트웁으로 근사화 시키는 기법이다. 승법형근사법에서는 근사화된 승법형 대기네트웁을 동등 승법형 대기네트웁(equivalent product form network)이라 부르며, 동등 승법형 대기네트웁을 구성하는 단일 서버의 상태종속 서비스율을 구하기 위하여 각각의 하부 네트웁을 상태종속 Poisson 도착과정을 갖는 개방형 대기시스템으로 가정해 분석한다. 개방형 대기시스템의 상태종속 산출율(state dependent throughput)이 구해지면 이 값이 곧 해당 단일 서버의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 승법형 대기네트웁의 서비스율이 구해지면 승법형 네트웁을 구성하는 각 서버의 상태종속 산출율(state dependent throughput)을 구할 수 있으며, 이 값은 다시 해당 하부네트웁의 상태종속 도착율로

사용된다. 따라서 승법형 대기네트웁의 상태종속 서비스율이 구해지면 이로부터 하부 네트웁의 상태종속 도착율을 구할 수 있고, 하부 네트웁의 상태종속 도착율이 구해지면 이로부터 승법형 대기네트웁의 상태종속 서비스율을 구할 수 있게 된다. 그러나 승법형 대기네트웁의 상태종속 서비스율과 하부 네트웁의 상태종속 도착율은 모두 미지의 값이므로 이를 구하는 문제는 고정점 문제(fixed point problem)가 되며, 이를 구하기 위하여는 반복적기법을 사용하여야만 한다.

3.2 하부 네트웁으로의 분해

승법형근사법이 성공적으로 적용되기 위해서는 몇 가지 조건이 충족되어야만 하며, 그 중 하나는 하부네트웁 간의 고객이동이 집단(group)으로 이루어져서는 안 된다는 조건이다. Mascolo 외[10]의 연구에서는 수요가 단순 Poisson 과정을 따르므로 작업장간의 칸반 이동은 한 순간에 1개씩만 이루어진다. 따라서 이들은 각 작업장을 별개의 하부네트웁으로 간주해 승법형근사법을 적용할 수 있었다. 그러나 본 연구에서는 수요가 compound Poisson 과정을 따르므로 작업장 J와 작업장 1간에는 한 순간에 2개 이상의 칸반이 이동할 수 있다. 따라서 승법형근사법을 성공적으로 적용시키기 위해서는 작업장 J와 작업장 1을 하나의 하부네트웁에 포함시켜야 하며, 그 외의 작업장은 각각 독립적인 하부네트웁으로 간주해 분해할 수 있다. 따라서 원 대기네트웁은 M 개 $\{J,1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{M\}$ 의 하부 대기네트웁으로 분해된다. 본 연구에서는 하부 대기네트웁 $\{J,1\}$ 을 하부 대기네트웁 $J1$ 로 표기하기로 하며, 이와같은 방식으로 분해가 이루어질

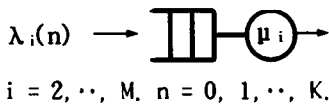


[그림 2] 상태종속 서비스율을 갖는 지수분포 서버로 구성된 동등 대기네트워크

경우 얻게되는 동등 대기네트워크는 서버 i 의 상태종속 서비스율을 $\mu_i(n)$ 이라 할 때 [그림 2]와 같다.

3.3 하부네트워크의 분석

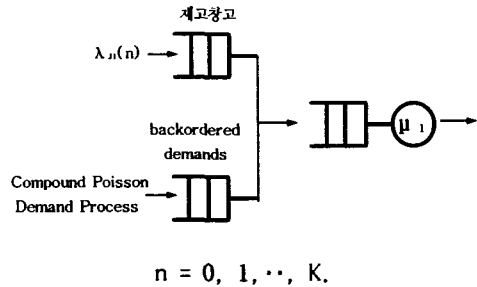
하부네트워크 i 는 상태종속 도착율이 $\lambda_i(n)$ 이고 도착간격이 지수분포를 따르는 개방형 대기네트워크로 간주해 분석한다. 우선 하부 대기네트워크 i 내에 칸반이 n 개 존재할 때의 도착율 $\lambda_i(n)$ 을 알고 있다고 가정하자. 그러면 하부네트워크 $J1$ 을 제외한 각 하부 대기네트워크는 [그림 3]과 같은 개방형 대기시스템으로 표현될 수 있다.



[그림 3] 하부 네트워크 i

하부 네트워크 2,3,...,M은 상태종속 도착율을 갖는 M/M/1/K 대기시스템이므로 안정상태확

률 $P_i(n)$ 를 쉽게 구할 수 있다. 그러나 하부 네트워크 $J1$ 은 2개의 대기행렬로 구성된 복잡한 대기네트워크이므로 $P_{J1}(n)$ 을 쉽게 구할 수 없다 [그림 4].



[그림 4] 하부 네트워크 $J1$

하부 네트워크 $J1$ 은 상태(state)의 수가 무한한 연속시간 마코브체인(continuous time Markov Chain)으로 모델링이 가능하다. 시스템의 상태를 정의하기 위하여 i 를 스테이션 J 에서의 칸반 수(양수일 경우), 혹은 미충족수요의 수(음수일 경우)라 정의하고, j 를 작업장 1에서의 칸반 수라 정의하면, 하부 네트워크 $J1$ 의 상태는 (i, j) 로

강도행렬(traffic intensity matrix) R 과 P_1 의 식으로 표현된다.

$$P_i = P_1 R^{i-1}, \quad (i \geq 2) \quad (2)$$

여기서 행렬 R 은 다음 식을 반복적으로 적용하여 구할 수 있다.

$$R = (A_0 + R^2 A_1) A^{-1} \quad (3)$$

$P_k (k \geq 2)$ 가 P_1 의 식으로 표현되므로 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} P_1 R^{k-1} = P_1 (I - R)^{-1} \quad (4)$$

따라서 다음과 같은 연립방정식이 성립되며, 이 연립방정식을 풀면 P_0, P_1 을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_0 B_{00} + P_1 B_{10} &= \Omega \\ P_0 B_{01} + P_1 (A + R A_1) &= \Omega \\ P_0 \cdot 1 + P_1 (I - R)^{-1} \cdot 1 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$P_k (k \geq 2)$ 는 식(2)을 이용하여 구한다.

안정상태 확률이 구하여 지면 하부네트웍에 k 개의 칸반이 존재할 확률, $P_L(k)$ 은 다음 식에 의해 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_L(k) &= \sum_{i+j=k, (i,j) \in P_0} p(i,j) \\ &+ \sum_{j=k, (i,j) \in P_0} p(i,j) \quad k=0, 1, \dots, K \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)의 우측 마지막 항은 다음과 같이 P_1 과 R 의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=k, (i,j) \in P_0} p(i,j) &= \sum_{i=-\infty}^k p(i,j) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i e_{j+1} \\ &= P_1 (I - R)^{-1} e_{j+1} \end{aligned} \quad (7)$$

위 식에서 e_j 는 $n(K+1)+j (n=0,1,\dots, \bar{M}-1)$ 항이 1이고 나머지는 0인 열벡터로서 작업장 1에 칸반이 $(j-1)$ 개 있을 때 동기화 스테이션 J 에서 대기중인 미충족 수요를 합하기 위하여 도입한 벡터이다.

3.4 승법형근사법을 이용한 알고리즘

하부네트웍 $J_1, 2, 3, \dots, M$ 의 안정상태 확률이 구해지면 하부네트웍 i 에 존재하는 칸반의 수가 n 일 경우의 상태종속 산출율 $v_i(n)$ 의 값은 다음과 같이 표현된다[1].

$$v_i(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \lambda_i(n-1) \frac{P_i(n-1)}{P_i(n)} & n=1, 2, \dots, K \end{cases} \quad (8)$$

하부네트웍 i 의 상태종속 산출율 $v_i(n)$ 의 값이 구해지면 동등 승법형 대기네트웍을 구성하는 서버 i 의 상태종속 서비스율의 값, $\mu_i(n)$,은 다음과 같이 구해진다.

$$\mu_i(n) = v_i(n), \quad n=0,1,\dots,K, \quad i=J_1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

동등 승법형 대기네트웍의 서비스율이 구해

지면 승법형 대기네트웍의 분석에 사용될 수 있는 임의의 알고리즘을 이용하여 서버 i 의 상태종속 산출율, $X_i(n)$,을 구할 수 있다. Convolution 알고리즘을 이용하면 서버 i 의 상태종속 산출율은 다음식에 의해 구할 수 있다.

$$X_i(n) = \begin{cases} e_i \frac{G_{Mi}(K-n-1)}{G_{Mi}(K-n)} & n=0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & n=K \end{cases} \quad (10)$$

여기서 e_i 는 서버 i 의 상대적 방문비율이고, G_{Mi} 는 M 개의 스테이션중 스테이션 i 를 제외하고 계산한 정규화 상수이다.

동등 승법형 대기네트웍을 구성하는 서버 i 의 상태종속 산출율이 구해지면 하부네트웍 i 의 상태종속 도착율은 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_i(n) = X_i(n), n=0, 1, \dots, K, i=1, 2, \dots, M. \quad (11)$$

이상과 같이 하부네트웍의 안정상태확률이 구하여 지면, 하부 네트웍의 상태종속 산출율을 식(8)로부터 계산할 수 있고, 이 값은 곧 동등 대기네트웍의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 동등 대기네트웍의 상태종속 서비스율이 구해지면 식 (10)으로부터 동등 대기네트웍의 상태종속 산출율이 계산되어 질 수 있고, 이 값은 곧 하부네트웍의 상태종속 도착율로 사용될 수 있다. 승법형근사법에서는 이와 같은 과정을 해가 수렴할 때까지 반복 수행한다. 이상의 과정을 정리하면 다음과 같다.

승법형근사법을 이용한 알고리즘

step 0(초기화과정)

$$\mu_i(k) = \mu_i, \quad i=2, \dots, M,$$

$$\mu_1(k) = \mu_1, \quad k=1, 2, \dots, K$$

step 1(반복과정)

i) $\lambda_i(k)$ 의 계산 : 식(10), (11) 이용, $i=J1, 2, \dots, M, k=0, 1, 2, \dots, K.$

$P_i(k)$ 을 계산 : 3.3절의 분석기법 이용 (행렬기하법 및 $M/M/1/K$ 분석기법)

ii) $\mu_i(k)$ 의 계산 : 식(8), (9) 이용, $i=J1, 2, \dots, M, k=0, 1, 2, \dots, K.$

수렴이 이루어 졌으면 step 2로 가고, 수렴이 이루어지지 않았으면 step 1로 돌아감.

step 2(성능척도 계산과정) : 구하고자 하는 성능치를 3.5절의 식을 이용하여 계산

3.5 시스템의 성능척도 계산

하부 대기네트웍 $J1$ 에서의 안정상태 확률이 구하여지면, 동기화 스테이션 J 에서의 칸반 수의 안정상태 확률 ($p_j(k)$), 평균 칸반 수 (\overline{FP}), 미충족 수요의 비율 (p_b), 평균 미충족 수요의 수 (\overline{BP}) 및 수요의 평균 대기시간 (\overline{W}) 등을 구할 수 있다. 우선 동기화 스테이션(J)에 존재하는 칸반 수의 확률분포 ($p_j(k)$)은 P_n 의 주변 확률분포이므로 P_n 으로부터 구할 수 있고, 평균 칸반 수는 $p_j(k)$ 을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_{FP}(0) = P_1(I - R)^{-1} \cdot 1$$

$$p_{FP}(k) = \sum_{j=0}^{K-k} p_{(k,j)} \quad k=1, \dots, K$$

$$\overline{FP} = \sum_{k=0}^K k p_{FP}(k) \quad (12)$$

스테이션 J에 칸반이 k개 있을 때 도착하는 수요가 추후납품될 확률 ($p_{b/k}$)에 대하여 생각하여 보자. 스테이션 J에 칸반이 \overline{M} 이상 존재할 경우에는 도착한 수요 모두가 즉시 충족되고 미충족 수요는 발생하지 않는다. 따라서 스테이션 J에 칸반이 \overline{M} 보다 적게 존재할 경우만 고려하면 된다. 또한 시험수요(tagged demand)가 속한 그룹의 크기가 n일 확률은 $\frac{ng_n}{E(G)}$ 이고, 시험수요가 속한 그룹의 크기가 n일 경우 시험수요의 수요그룹 내에서의 우선순위가 c일 확률은 c의 값에 관계없이 $\frac{1}{n}$ 이다. 이상의 사실로부터 칸반이 k개 있을 때 도착하는 수요가 추후납품될 확률, $p_{b/k}$, 는 다음과 같이 표현된다.

$$p_{b/k} = \sum_{n=k+1}^{\overline{M}} \sum_{c=k+1}^n \frac{ng_n}{E(G)} \frac{1}{n} = \sum_{n=k+1}^{\overline{M}} (n-k) \frac{g_n}{E(G)} \quad (13)$$

k에 대하여 조건화를 풀면 도착하는 임의의 수요가 추후 납품될 확률을 구할 수 있다.

$$p_b = \sum_{k=0}^{\overline{M}-1} p_{b/k} p_{FP}(k) = \sum_{k=0}^{\overline{M}-1} \sum_{n=k+1}^{\overline{M}} (n-k) \frac{g_n}{E(G)} p_{FP}(k) \quad (14)$$

$E(\overline{BP}/k)$ 를 대기중인 미충족 수요의 수를

\overline{M} 로 나누었을 때 나머지가 k인 경우의 수요들에 대한 평균이라고 하면, 대기중인 미충족 수요의 평균은 $\overline{BP} = \sum_{k=0}^{\overline{M}-1} E(\overline{BP}/k)$ 이 되며, 각각의 항 및 \overline{BP} 는 다음과 같이 계산된다.

$$E(\overline{BP}/k=0) = 0(p_{(0,0)} + \dots + p_{(0,K)}) + \overline{M}(p_{(-\overline{M},0)} + p_{(-\overline{M},1)} + \dots + p_{(-\overline{M},K)}) + \dots = \overline{M}P_2e_0 + 2\overline{M}P_3e_0 + 3\overline{M}P_4e_0 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} i\overline{M}P_{i+1}e_0 = \overline{M}P_1 \sum_{i=1}^{\infty} iR^i e_0 = \overline{M}P_1R((I-R)^{-1})^2 e_0$$

여기서 $e_0 = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)^T$

$$E(\overline{BP}/k=1) = 1(p_{(-1,0)} + \dots + p_{(-1,K)}) + (\overline{M}+1)(p_{(-\overline{M}-1,0)} + \dots + p_{(-\overline{M}-1,K)}) + \dots = \overline{M}P_2e_1 + 2\overline{M}P_3e_1 + \dots + P_1e_1 + P_2e_1 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} i\overline{M}P_{i+1}e_1 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i e_1 = \overline{M}P_1R((I-R)^{-1})^2 e_1 + P_1(I-R)^{-1} e_1$$

여기서 $e_1 = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)^T$

$$E(\overline{BP}/k=\overline{M}-1) = (\overline{M}-1)(p_{(-\overline{M}+1,0)} + p_{(-\overline{M}+1,1)} + \dots + p_{(-\overline{M}+1,K)}) + (2\overline{M}-1)(p_{(-2\overline{M}+1,0)} + p_{(-2\overline{M}+1,1)} + \dots + p_{(-2\overline{M}+1,K)}) + \dots = \overline{M}P_2e_{\overline{M}-1} + \dots + (\overline{M}-1)P_1e_{\overline{M}-1} + (\overline{M}-1)P_2e_{\overline{M}-1} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} i\overline{M}P_{i+1}e_{\overline{M}-1} + (\overline{M}-1) \sum_{i=1}^{\infty} P_i e_{\overline{M}-1} = \overline{M}P_1R((I-R)^{-1})^2 e_{\overline{M}-1} + (\overline{M}-1)P_1(I-R)^{-1} e_{\overline{M}-1}$$

여기서 $e_{\overline{M}-1} = (0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)^T$

$$\overline{BP} = \sum_{k=0}^{\overline{M}-1} E(\overline{BP}/k) = \sum_{k=0}^{\overline{M}-1} kP_1(I-R)^{-1} e_k + \overline{M}P_1R((I-R)^{-1})^2 \cdot \mathbf{1} \quad (15)$$

위 식에서 e_i 는 스테이션 J에서 대기중인 미충족 수요를 합하기 위하여 도입한 열벡터이다.

대기중인 미충족 수요의 평균이 구하여 지면, Little의 공식에 의해 수요의 평균 대기시간 (\overline{W})과 미충족 수요의 평균 대기시간(\overline{W}_b)을 구할 수 있으며, 이는 식(16)과 같다.

$$\overline{W} = \frac{BP}{\lambda_d E(G)} \quad \overline{W}_b = \frac{\overline{W}}{P_b} \quad (16)$$

그 외의 중요한 성능치로는 각 작업장에 존재하는 재공품의 수 및 기계의 이용률 등이 있다. 작업장 1에 존재하는 재공품 수의 확률은 하부네트웍 J_1 의 주변확률이므로 p_n 으로부터 구할 수 있고, 작업장 1을 제외한 작업장 j 에 존재하는 재공품 수의 확률 ($p_j(k)$) 및 기계의 이용률 (U_j)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_j(k) = y_j(k) \frac{G_{Mj}(K-k)}{G_M(K)} \quad k=0, 1, \dots, K$$

$$y_j(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \prod_{i=1}^k \frac{e_j}{\mu_j(i)} & k>0 \end{cases}$$

$$U_j = 1 - p_j(0) \quad (17)$$

4. 근사적 분석의 정확도 평가

본 연구에서 제안한 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 예제를 통하여 많은 실험을 수행하였다. 실험에는 IBM PC 586이 이용되었으며, 수치분석에는 Matlab 4.2가 이용되었다. 알고리즘의 정확도를 평가하기 위하여 알고리즘에서 얻어진 값과 시뮬레이션에서 얻어진 값을 비교하였으며, 시뮬레이션은 시스템에 도착한 수요의 수가 300,000에 도달될 때까지 수행하였다.

알고리즘의 종료조건은 10^{-5} 이하로 하였으며, 실험 결과 모든 예제에서 알고리즘이 수렴함을 관측할 수 있었다. 본 절에서는 많은 실험예제 중 4개의 대표적인 예제를 선정하여 소개하도록 한다.

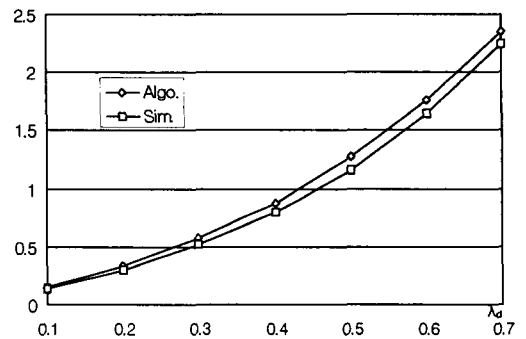
첫 번째 예제는 작업장의 수는 3이고 칸반의 수는 10이며, 각 작업장에서의 가공시간은 평균 2인 지수분포를 따르는 경우이다. 수요의 최대 크기는 3이고, 수요의 크기는 1에서 3까지의 값을 취할 수 있는 일양분포를 따른다고 가정하였다. 또한 수요의 도착율을 0.1에서 0.7까지 0.1씩 증가시키며 7 가지 서로 다른 경우에 대하여 실험하였다(표1)[그림 6]. 두 번째 예제는 각 작업장에서의 가공시간이 서로 다를 경우에 대한 예로서 작업장의 수가 4이고 칸반의 수는 10이라고 가정하였다. 두 번째 예제에서는 수요의 도착율을 0.2에서 1.0까지 0.2씩 증가시키며 5 가지 서로 다른 경우에 대하여 실험하였다(표 2). 세 번째 예제는 작업장의 수가 5이고 각 작업장에서의 가공시간이 서로 다를 경우에 대하여 실험하였다. 세 번째 예제에서는 칸반의 수를 15에서 35까지 5씩 증가시키며 5 가지 서로 다른 경우에 대하여 실험하였다(표3). 네 번째 예제는 작업장의 수가 큰 대규모 CONWIP 시스템의 경우로 작업장의 수를 10이라고 가정하였다. 네 번째 예제에서도 수요의 도착율을 0.2에서 1.8까지 0.2씩 증가시키며 9 가지 서로 다른 경우에 대하여 실험하였다(표4). 각 표에는 완제품창고에 존재하는 평균 칸반 수(\overline{FP}), 미충족 수요의 비율(p_b), 평균 미충족 수요의 수(\overline{BP}), 수요의 평균 대기시간(\overline{W}) 및 미충족 수요의 평균 대기시간(\overline{W}_b) 등의 성능척도에

<표 1> 예제 1의 결과: $M=3, K=10, \mu = (2,2,2), g_1 = g_2 = g_3 = 1/3$

λd	Simulation					Algorithm (rel. error)				
	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b
0.1	9.5239	*	*	*	*	9.5463 (0.23)	0.0002 -	0.0000 -	0.0002 -	1.0309 -
0.2	8.9503	0.0032	*	*	*	8.9816 (0.35)	0.0024 (-25)	0.0012 -	0.0030 -	1.2383 -
0.3	8.2553	0.0131	0.0102	0.0171	1.3104	8.2658 (0.12)	0.0132 (0.76)	0.0118 (15.6)	0.0197 (15.2)	1.4941 (14.0)
0.4	7.3326	0.0469	0.0770	0.0971	2.0689	7.3506 (0.24)	0.0456 (-2.77)	0.0671 (-12.8)	0.0839 (-13.6)	1.8458 (-10.7)
0.5	6.1104	0.1256	0.2979	0.2967	2.3626	6.1860 (1.24)	0.1190 (-5.25)	0.2838 (-4.7)	0.2838 (-4.3)	2.3853 (0.9)
0.6	4.6636	0.2638	1.0659	0.8864	3.3536	4.7281 (1.38)	0.2586 (-1.97)	1.0425 (-2.19)	0.8687 (-1.99)	3.3590 (0.16)
0.7	2.9063	0.4994	3.8898	2.7764	5.5590	2.9435 (1.27)	0.4921 (-1.46)	3.9636 (1.90)	2.8311 (1.97)	5.5731 (0.25)

대해 근사적기법에 의해 구해진 값과 시물레이션에 의해 구해진 값이 정리되어 있다. 또한 시물레이션에 의해 구해진 해를 기준으로 한 근사적기법에 의해 얻어진 해의 상대오차 값이 정리되어 있다. 시물레이션에 의해 얻어진 성능척도 값이 0.001이하의 작은 값으로 통계적 유의성을 보장할 수 없는 경우에는 표에서 *으로 표시하였다. 각 작업장에서의 평균재공품의 수는 지면 관계상 근사적 기법의 결과와 시물레이션의 결과비교를 모든 예제에 대해 다 보여주지 못하고 예제 1에 대해서만 [그림 6]에서 보여주었다.

표1-표4에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 제안된 근사적기법은 일반적으로 만족할 만한 수준의 정확한 해를 산출해 준다. 그러나 근사적기법에 의해 얻어진 해가 0.1 미만의 작은 값을



[그림 6] 작업장 3에서의 평균 재공품 수(예제 1)

취할 경우에는 간혹 상대오차 값이 20% 이상 발생함을 관측할 수 있다. 이러한 경우에는 상대오차 값이 큰 의미를 갖지 못하며, 이 경우에도 대부분의 절대오차 값은 0.05 미만의 작은 값을 취하고 있음을 고려할 때 근사적기법의 유

〈표 2〉 예제 2의 결과: $M=4, K=10, \mu=(4,2,2,4), g_1=g_2=1/2$

λd	Simulation					Algorithm (rel. error)				
	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b
0.2	9.4289	0.0000	*	*	*	9.4131 (-0.16)	0.0000 (0.00)	0.0000	0.0000	0.8122
0.4	8.6510	0.0019	0.0011	0.0018	0.9802	8.6210 (-0.34)	0.0018 (-5.26)	0.0012 (9.90)	0.0019 (5.55)	1.0555 (7.68)
0.6	7.5422	0.0215	0.0289	0.0320	1.4935	7.4896 (-0.69)	0.0208 (-3.25)	0.0271 (-6.22)	0.0301 (-5.93)	1.4459 (-3.18)
0.8	5.9014	0.1106	0.2827	0.2352	2.1270	5.8049 (-1.64)	0.1136 (2.71)	0.3036 (7.39)	0.2530 (7.56)	2.2263 (-4.66)
1.0	3.2105	0.4120	2.7150	1.8034	4.3772	3.2948 (2.26)	0.4021 (-2.40)	2.8165 (3.73)	1.8777 (4.11)	4.6692 (6.67)

〈표 3〉 예제 3의 결과: $M=5, \lambda_d=1.5, \mu=(4,4,3,3,3), g_1=g_2=1/2$

K	Simulation					Algorithm (rel. error)				
	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b
15	3.7305	0.4569	4.0898	1.8082	3.9574	3.9328 (5.42)	0.4371 (-4.33)	4.3460 (6.26)	1.9315 (6.81)	4.4190 (11.66)
20	7.6201	0.2335	1.5031	0.6668	2.8556	8.0161 (5.19)	0.2105 (-9.85)	1.5046 (0.09)	0.6687 (0.28)	3.1769 (11.25)
25	12.0101	0.1105	0.6424	0.2848	2.5785	12.5493 (4.49)	0.0970 (-11.7)	0.5928 (-7.72)	0.2634 (-7.51)	2.7153 (5.30)
30	16.8669	0.0463	0.2270	0.1008	2.1778	17.3263 (2.72)	0.0431 (-6.91)	0.2401 (5.77)	0.1067 (5.85)	2.4762 (13.70)
35	22.0681	0.0200	0.0960	0.0429	2.1475	22.2249 (0.71)	0.0185 (-7.5)	0.0973 (-1.35)	0.0432 (0.70)	2.3305 (8.52)

용성은 이러한 사실에 의해 감소되지 않을 것으로 판단한다. 또한 수요가 집단으로 발생하는 경우의 CONWIP 시스템을 분석할 수 있는 특별한 대안이 존재하지 않는 상황에서 본 연구에

서 제안한 분석기법은 오차의 범위가 지나치게 크지 않는 한 시뮬레이션을 대신할 유효한 수리적 기법이 될 수 있을 것으로 판단한다. 일반적으로 근사적기법의 정확도는 작업장의 수가 증

〈표 4〉 예제 4의 결과: $M=10, K=15, \mu=(7,7,7,7,7,7,7,7,7,7), g_1=g_2=g_3=1/3$

λd	Simulation					Algorithm				
	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b	\overline{FP}	p_b	\overline{BP}	\overline{W}	\overline{W}_b
0.2	14.2517	*	*	*	*	14.3180 (0.46)	0.0000 -	0.0000 -	0.0000 -	0.0000 -
0.4	13.4368	*	*	*	*	13.5482 (0.82)	0.0000 -	0.0000 -	0.0000 -	0.0000 -
0.6	12.4872	*	*	*	*	12.6727 (1.08)	0.0006 -	0.0004 -	0.0003 -	0.4907 -
0.8	11.4397	0.0070	0.0070	0.0044	0.6237	11.6698 (2.00)	0.0041 (-41.4)	0.0037 (-47.1)	0.0023 (-47.7)	0.5669 (-5.68)
1.0	10.2295	0.0250	0.0379	0.0190	0.7354	10.5159 (2.79)	0.0157 (-37.2)	0.0209 (-44.8)	0.0105 (-44.7)	0.6663 (-9.39)
1.2	8.8395	0.0652	0.1304	0.0542	0.8318	9.1893 (3.95)	0.0460 (-29.4)	0.0887 (-31.7)	0.0370 (-31.7)	0.8039 (-3.35)
1.4	7.3759	0.1336	0.3668	0.1317	0.9862	7.6762 (5.29)	0.1097 (-17.8)	0.3102 (-15.4)	0.1108 (-15.8)	1.0095 (2.36)
1.6	5.7014	0.2577	1.0899	0.3417	1.3258	5.5941 (-1.88)	0.2244 (-12.9)	0.9716 (-10.85)	0.3036 (-11.1)	1.3531 (2.05)
1.8	3.7974	0.4378	2.8141	0.7798	1.7813	4.0925 (7.71)	0.4068 (-7.08)	3.0000 (6.60)	0.8336 (6.89)	2.0491 (15.03)

가할수록 다소 감소하는 것으로 관측되었으며, 각 작업장에서의 평균재공품의 수, 평균완제품 재고의 수 등은 근사적기법에 의해 매우 정확한 추정치가 얻어지나 미충족 수요의 비율, 대기중인 미충족 수요의 평균 및 미충족수요의 평균 대기시간 등은 근사적기법에 의해 얻어진 해의 정확도가 다소 떨어짐을 관측할 수 있다. 본 연구에서는 지면관계상 예제 1에 대해서만 각 작업장에서의 평균재공품 수를 보여주었으나 근사적기법에 의해 얻어진 평균재공품의 수는 대부분의 경우에 상대오차 5% 미만의 정확한 값이었음을 밝힌다.

5. 결 론

본 연구에서는 완제품에 대한 수요가 compound Poisson 과정을 따를 경우의 CONWIP 시스템에 대한 근사적분석을 수행하였다. 제안된 CONWIP 시스템을 분석하기 위하여 본 연구에서는 각각의 CONWIP 시스템을 동기화 스테이션이 존재하는 폐쇄형 대기네트워크로 모델링하고 이를 승법형근사법을 이용하여 분석하였으며, 행렬기하법을 이용하여 하부 네트워크의 정확한 분석을 수행하였다. 본 연구에서 제안된 근사적기법은 작업장에 존재하는 부품수의 안정

상태확률, 추후납품되는 수요의 비율, 대기중인 미충족 수요의 기대치, 대기중인 미충족수요의 평균대기시간 등 CONWIP 시스템의 중요한 성능척도치를 비교적 정확하고 신속하게 계산하여 준다. 따라서 본 연구에서 제안된 근사적기법은 향후 CONWIP 시스템의 경제적인 설계 및 효율적인 운영에 유용하게 이용되어 질 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

- [1] Baynat, B. and Y. Dallery, "A Unified View of Product-form Approximation Techniques for General Closed Queueing Networks," *Performance Evaluation*, Vol. 18(1993), pp.205-224.
- [2] Duenyas, I. and W. J. Hopp, "CONWIP Assembly System with Deterministic Processing and Random Outages," *IIE Transactions*, Vol.24, No.4(1992), pp.97-111.
- [3] Duenyas, I. and W.J.Hopp, "Estimating the Throughput of an Exponential CONWIP Assembly System," *Queueing systems*, Vol.14 (1993), pp.135-157.
- [4] Duenyas, I., W.J.Hopp and M.L. Spearman, "Characterizing the Output Process of a CONWIP Line with Deterministic Processing and Random Outages," *Mgmt. Sci.*, Vol.39(1993), pp.975-988.
- [5] Hall, K.W. "Synchro MRP: Combined Kanban with an MRP, the Yamaha PTMAC system-production Planning and Control in Japan," *American Production and Inventory Control Society*, (1986), pp. 43-56.
- [6] Karmarkar, U.S. "Push, Pull and Hybrid Control Schemes," Working Paper QM8614, Graduate school of Management, Univ. of Rochester 1986.
- [7] Kimura, O. and H. Terada, "Design and Analysis of Pull Systems: a Method of Multistage Production Control," *Int.J.Prod. Res.* Vol.19(1981), pp241-253.
- [8] Kragewsky, L.J. and L.P. King, "Kanban, MRP, and Shaping the Manufacturing Environment," *Mgmt. Sci.* Vol.33(1987), pp.39-57.
- [9] Marie, R.A. "An Approximate Analytical Method for General Queueing Networks," *IEEE Trans. Soft. Eng.* SE-5(1979), pp.530-538.
- [10] Mascolo, M.D, Y. Frein and Y. Dallery, "An Analytical Method for Performance Evaluation of kanban Controlled Production Systems," *Opns. Res.*, Vol.44(1996), pp.50-64,
- [11] Neuts, M.F., *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [12] Spearman, M.L. "Push and Pull Production System :Issues and Comparisons," *Opns. Res.* Vol.40(1992), pp.521-532.
- [13] Spearman, M.L. "Customer Service in Pull Production System," *Opns. Res.* Vol.40 (1992), pp.948-958.
- [14] Spearman, M.L., D.L. Woodruff and W. J. Hopp, "CONWIP : A Pull Alternative to Kanban," *Int. J. Prod. Res.* Vol.28 (1990), pp.878-894.