

공변량을 이용한 Brown-Proschan 불완전수리 하의 시스템 신뢰도 추정*

임태진** · 이진승***

Estimating System Reliability under Brown-Proschan Imperfect Repair with Covariates*

Tae-Jin Lim** · Jin-Seung Lee***

■ Abstract ■

We propose an imperfect repair model which depends on external effects quantified by covariates. The model is based on the Brown-Proschan imperfect repair model wherefrom the probability of perfect repair is represented by a function of covariates. We are motivated by deficiency of the BP model whose stationarity prevents us from predicting dynamically the time to next failure according to external condition. Five types of function for the probability of perfect repair are proposed. This article also presents a procedure for estimating the parameter of the function for the probability of perfect repair, as well as the inherent lifetime distribution of the system, based on consecutive inter-failure times and the covariates. The estimation procedure is based on the expectation-maximization principle which is suitable to incomplete data problems. Focusing on the maximization step, we derive some theorems which guarantee the existence of the solution. A Monte Carlo study is also performed to illustrate the prediction power of the model as well as to show reasonable properties of the estimates. The model reduces significantly the mean square error of the in-sample prediction, so it can be utilized in real fields for evaluating and maintaining repairable systems.

* 이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

** 송실대학교 산업공학과

*** 서울대학교 산업공학과

1. 서 론

신뢰도는 시스템의 평가 및 운영에 있어 주요 척도로 사용되고 있다. 따라서 시스템에 대한 정확한 신뢰도 분석은 시스템의 개선 및 유지에 필수적인 요소라고 할 수 있다. 신뢰도 평가는 주로 고장 시간에 근거하여 수행되는데, 기존의 신뢰성 모형들은 IID(Independent and Identically Distributed) 가정을 사용하고 있다. 이 가정은 시스템이 수리 불가능하여 고장 시 대체(replacement)되는 경우, 즉 시스템의 고장시간이 독립적인 경우에 한하여 타당하다. 그러나 수리 가능한 시스템의 고장시간은 시스템의 열화(degradation)나 수리효과에 따라 상호 종속성을 갖는 것이 일반적이다. 열화를 반영한 모형으로는 비균일포아송과정(Nonhomogeneous Poisson Process, NHPP)이 있으나, 이 모형은 수리의 효과를 반영하지 못하고 고장시간의 전반적인 추세를 설명할 수 없다.

기존의 IID 모형이나 NHPP 모형의 결점을 보완하고 일반화한 불완전수리 모형은 두 종류로 대별된다. 그 하나는 Malik[15]이 제안한 비례적 가동시간 감소 (proportional age reduction) 모형이고, 다른 하나는 Brown과 Proschan(BP)[7]이 제안한 완전-최소수리 교대 모형이다. BP 모형은 수리 후 일정한 확률로써 초기 상태로 복원되거나 (완전수리), 고장 직전의 상태로 복구하는 (최소수리) 것을 전제로 한다. 즉 BP 모형은 IID 모형과 NHPP 모형의 혼합 모형이다.

BP 불완전수리 모형의 가장 큰 약점은 각각의 수리유형이 일정한 확률로써 독립적으로 결정되기 때문에 앞으로의 수리유형과 시스템의 다음 고장시간(next time to failure)을 예측하는 능력이 부족하다는 점이다. 또한 수리가 거듭됨에 따라 열화(degradation)하는 시스템의 신뢰성 모형으로는 부적절하다. 본 연구에서는 완전수리 확률이 공변량(covariates)으로 표현되는 외부효과(external effect)에 따라 변하는 동적 불완전수리 모형(dynamic imperfect repair model)을 제안한다. 완전수리 확

률을 공변량의 함수로 모형화 함으로써 수리효과를 정확히 평가하여, 시스템의 다음 고장시간에 대한 예측력을 향상시키고자 한다.

새로운 모형의 제시만으로는 그 타당성을 검토하거나 유용성을 입증하는데 미흡할뿐더러, 실제 시스템의 유지·보수에 적용하기 위해서는 고장자료를 이용한 신뢰도 평가가 선행되어야 한다. 따라서 본 연구에서는 관측자료로부터 모형을 추정하는 방법을 개발한다. 또한 완전수리 확률에 대한 다양한 함수 모형의 특성과 유용성에 대하여 연구한다.

본 연구의 목적을 요약하면, 기존 BP 불완전수리 모형의 적용범위와 예측력을 향상시키는 동적 모형을 제안하고, 모형의 추정 방법을 개발하여, 실제 시스템의 고장자료를 이용하여 신뢰도를 평가하고 이를 시스템의 유지·보수에 활용할 수 있는 방안을 제시하고자 하는 것이다.

제2절에서는 기존의 불완전수리 모형에 대하여 고찰하고, 제3절에서는 수리후 시스템의 상태에 영향을 끼칠 수 있는 외부효과에 대하여 알아보고, 다양한 외부효과를 반영할 수 있도록 완전수리 확률(probability of perfect repair)을 공변량의 함수 형태로 정의한다. 제4절에서는 수리시 외부효과에 의한 종속성을 반영할 수 있는 외부효과 종속적 수리 모형을 제시하고, 수리유형이 주어지지 않는 불완전 자료 하에서의 EM(Expectation-Maximization) 알고리즘을 이용한 모수 추정 알고리즘을 제안한다. 최적화 단계는 와이불(Weibull) 수명분포에 기초하여 구성한다. 제5절에서는 다양한 실험 예제를 통하여 추정치의 특성을 알아보며, 외부효과 종속적 수리 모형의 예측력을 평균제곱오차(Mean Square Error, MSE)를 통하여 검증한다.

2. 불완전수리 모형

초기의 신뢰성 모형들은 IID 가정을 사용하고 있다. IID 모형은 수리 후 시스템의 상태가 처음 상태로 복원되는 재생(renewal) 특성을 갖기 때문

에 분석이 단순하다는 장점이 있으나, 다수의 부품으로 구성된 시스템에 있어서 수리후에도 수리이전의 가동 상태가 일정 부분 유지될 수 있다는 현실적 상황을 반영할 수 없는 단점이 있다[3]. Ascher와 Feingold[3]는 수리 가능한 시스템에 대하여 IID 모형을 적용하는 경우에 발생하는 문제점을 심도 있게 지적하였다. 그들은 시스템의 열화를 반영하기 위한 모형으로 NHPP 모형을 제시하였으나, 이 모형은 고장시간의 전반적인 추세만을 설명할 수 있을 뿐, 수리의 효과를 반영하지 못하는 단점이 있다. 특히 신뢰성 분석의 대상이 수리 가능한 시스템인 경우에는 시스템의 고장시 수행되는 수리의 형태에 따라 이후의 고장시간이 영향을 받기 때문에 모형화에 반영해야 할 요소가 많아지며 통계적인 분석도 어려워진다[25].

기존의 IID 모형이나 NHPP 모형의 결점을 보완하고 일반화한 두 가지의 불완전수리 모형이 제시되었다. 그 하나는 Malik[15]이 제안한 비례적 가동시간 감소 모형인데, 이 모형에 근거한 예방보수 정책 연구가 다수 수행된 바 있다. Lie와 Chun[20], Jayabalan과 Chaudhuri[12], Chan과 Shaw[8] 등의 연구가 대표적인 것들이다. 비례적 가동시간 감소 모형에 대한 추정방법은 Shin 등[24]에 의하여 제시되었다.

Brown과 Proshan[7]이 제안한 불완전수리 모형은 완전-최소수리 교대 모형으로서 수리 후 일정한 확률로써 초기 상태로 복원되거나 (완전수리), 고장 직전의 상태로 복귀하는 (최소수리) 것을 전제로 한다. BP 불완전수리 모형에서 수리유형은 p 의 확률로 완전수리, $1-p$ 의 확률로 최소수리가 된다. IID 모형과는 달리 최소수리인 경우도 고려함으로써 시스템의 노후화(aging) 경향을 반영할 수도 있으며 완전수리가 발생할 경우에는 대체 효과도 반영할 수 있으므로 완전수리 모형 및 최소수리 모형의 단점을 보완해 준다.

불완전수리 모형에서 $F(t)$ 를 첫 번째 고장간 시간이 따르는 분포, $F_p(t)$ 를 시스템의 완전수리

시간간격의 분포라 하고, $\lambda(t)$, $\lambda_p(t)$ 를 각각의 강도함수(intensity function)라 하면 다음의 식이 성립한다[7].

$$\lambda_p(t) = p\lambda(t), \quad \bar{F}_p(t) = \bar{F}^p(t),$$

$$\text{여기서, } \bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

확률적으로 재귀적(regenerative) 특성을 갖는 장점으로 인하여 BP 모형에 근거한 예방보수 정책들이 제시된 바 있으나, 실제 시스템에 적용된 사례는 찾아볼 수 없다. BP 불완전수리 모형의 가장 큰 약점은 정상성(stationarity)이다. 즉 각각의 수리유형이 일정한 확률로써 독립적으로 결정되기 때문에 앞으로의 수리유형과 시스템의 다음 고장시간을 예측하는데 도움이 되지 못한다. 또한 수리가 거듭됨에 따라 열화 하는 시스템의 신뢰성 모형으로는 부적절하다. 이러한 정상성으로 인하여 시스템의 과도적 특성을 반영할 수 없게 된다.

이러한 문제를 해결하기 위한 대안으로 완전수리 확률이 공변량에 따라 변하는 동적(dynamic) 불완전수리 모형을 생각할 수 있는데 이에 대한 연구는 충분히 이루어지지 못하였다. Block 등[6]은 BP 모형을 확장하여 가동시간(age)에 종속적인 최소수리 모형(age dependent minimal repair model)을 제시하였는데, 시스템의 가동시간이 큰 경우에는 불완전수리가 일어날 가능성이 높음에 기인하여 불완전수리 모형에서 완전수리 확률 p 를 가동시간의 함수 $p(t)$ 로 정의한 모형을 제시하였다. 그러나 그들은 수리에 영향을 줄 수 있는 다른 외부효과는 고려하지 않았다. 또 다른 모형의 확장에 관한 연구는 Shaked 등에 의해 제안된 다변량 불완전수리 모형(multivariate imperfect repair model)이 있다[23].

BP 모형의 모수를 추정하는 방법에 관한 연구는 미미한 실정이다. Whitaker 등[25]은 비모수적 MLE(Maximum Likelihood Estimate) 방법을 제안하였는데, 고장시간과 수리유형에 대한 완전자료가 주어진 제한적 상황에 있어서 시스템 신뢰도의 비모

수적 추정량을 제시하고 그 특성을 규명하였다. 즉, 이 방법은 수리유형 변수를 포함하는 완전(complete)자료를 요구한다. 그들은 비기억(memoryless) 특성을 갖는 지수 수명분포의 예를 들어 수리유형 자료가 주어지지 않는 한 시스템 신뢰도를 구할 수 없다고 주장하였다. 그러나 수리 완료 시점에서 시스템의 상태를 완벽하게 알아야 수리유형에 대한 자료의 수집이 가능하다. 이러한 작업은 많은 비용이 요구되거나 고장 메커니즘(mechanism)을 알아야 되므로 현실적으로 불가능한 경우가 많다.

수리유형이 주어지지 않은 불완전 자료 하에서의 BP 불완전수리 모형의 추정법에 관한 연구는 최근에 발표되었다. 주기적으로 예방보전(preventive maintenance, PM)을 실시하고 PM 사이의 수리는 최소수리되는 시스템에 대한 모수 추정 방법이 발표되었다[1]. Lim은 EM 알고리즘을 이용하여 기본 수명분포가 와이블분포라는 가정 하에서 고장시간 간격만이 주어진 경우 모수 추정 방법을 제시하였다[19]. 즉, 고장률이 증가하는 수명분포를 갖는 경우, EM 원리를 이용한 MLE 계산이 가능함을 입증하였다. 그러나 BP 모형의 추정이 가능하더라도 모형 자체의 결함, 즉 예측력의 부족과 추세(trend) 반영의 곤란 등으로 인하여 실질적 기여도가 클 것으로 기대되지는 않는다. 따라서 동적인 불완전수리 모형과 그 추정 방법의 개발이 병행되어야 실제 시스템에 적용하여 효과를 볼 수 있을 것이다.

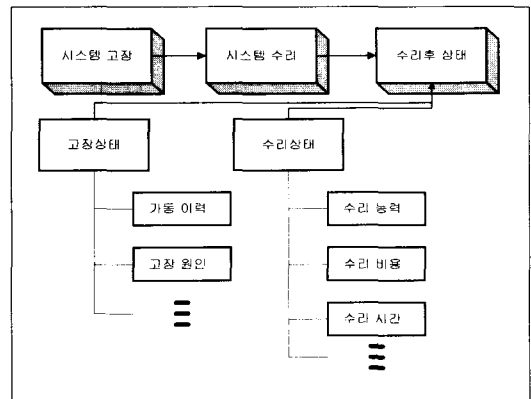
공변량을 이용한 신뢰도 모형으로는 Cox[10]가 제안한 비례적 위험(PH, proportional hazard) 모형이 많이 쓰인다. 이 모형은 NHPP 모형에 공변량의 효과를 고려한 모형으로서, 공변량이 시스템의 고장률에 직접적인 영향을 미치므로 다양한 환경요인을 반영할 수 있는 장점이 있으며 활발히 연구되고 있다. PH 모형의 추정에 대한 연구는 Lawless[17], Kumar와 Klefsjo[13] 외 다수 찾아볼 수 있다. PH 모형에서는 외부효과가 직접적으로 고장률에 영향을 미치지만, BP 모형에서는 고유 고장

률에는 변화가 없이 수리유형에 따라 시간축이 이동하는 차이가 있다. 본 연구에서는 수리유형을 외부효과의 함수로 표현함으로써, 시스템의 고장에 미치는 외부효과를 간접적으로 반영한다.

3. 외부효과 종속적 수리 모형

3.1 외부효과 종속적 수리 모형

기존의 불완전수리 모형은 시스템의 수리시 완전수리 확률을 일정한 상수 p 로 두고 외부 요인과 무관하게 수리효과가 항상 일정하게 시스템에 작용한다는 가정에 기초하고 있다. 그러나, 현실적으로 시스템의 수리시 완전수리 여부가 -외부효과에는 독립적으로- 매 시점마다 확률적으로 발생한다는 가정은 타당하지 않다. 즉, 수리 능력, 수리 비용, 수리시간 등의 수리 상태나 가동이력, 고장 원인 등의 고장상태와 같은 외부효과에 따라서 완전수리 확률이 달라진다고 할 수 있다[그림 1].



[그림 1] 외부효과와 수리후 시스템 상태

외부효과 종속적 수리 모형에서는 완전수리 확률을 외부효과의 함수로 규명함으로써 수리효과를 좀 더 정확하게 평가하고, 나아가 시스템의 고장과정을 더 정확하게 예측할 수 있다. 또한 이 모형은 기존의 IID 모형, 최소수리 모형, 불완전수리 모형 등을 포함하는 일반적인 모형이라고 할 수 있다.

외부효과 종속적 수리 모형에서 사용되는 가정과 기호는 다음과 같다.

가정

- ① 시스템은 수리 가능하다.
- ② 수리 형태는 완전수리와 최소수리로 구성된다.
- ③ 수리유형(완전수리, 최소수리)은 관측되지 않을 수 있으며, 고장시간 간격은 모두 관측된다.
- ④ 수리효과에 영향을 미치는 외부효과는 공변량의 형태로 관측 가능하다.
- ⑤ 수리시간은 관측시간에서 제외된다.

기호

n	관측된 고장 회수
t_i	관측된 $(i-1)$ 번째와 i 번째 고장시간 간격
$\underline{t}_i \equiv (t_1, \dots, t_i)$	i 번째까지 관측된 고장시간 간격 벡터
Z_i	i 번째 수리유형 변수; 1 (완전수리) 또는 0 (최소수리)
x_i	i 번째 수리에 대하여 관측된 외부효과 변수 (공변량)
$\underline{x}_i \equiv (x_1, \dots, x_i)$	i 번째까지 관측된 공변량 벡터
θ	모수 벡터 $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$, ($\alpha =$ 형상모수, $\beta =$ 척도모수, $\gamma =$ 완전수리 확률 함수의 모수)
θ_0	이전 단계에서 계산된 모수 벡터의 추정치
$w(t)$	고유(inherent) 수명분포의 확률 밀도 함수
$w_0(t)$	모수 벡터 θ_0 하에서의 $w(t)$
$w(t_2 t_1)$	t_1 까지 작동했다는 전제하에서 앞으로 남은 수명 (t_2)의 조건부 밀도함수
$w_0(t_2 t_1)$	모수 벡터 θ_0 하에서의 $w(t_2 t_1)$
$f(t)$	고장시간 간격의 확률 밀도 함수
$f_0(t)$	모수 벡터 θ_0 하에서의 $f(t)$
$f_0(t_{i+1} \underline{t}_i, \underline{x}_i)$	i 번째까지의 고장시간과 공변량

이 주어진 조건하에서 다음 고장시간의 조건부 밀도함수

$R(t)$ 고유 신뢰도 함수

$p(x_i)$ 완전수리 확률 함수

$h_0(x_i)$ 모수 벡터 θ_0 하에서의 $p(x_i)$

B_i i 번째 수리직전의 가동시간(age) 변수

A_i i 번째 수리직후의 가동시간(age) 변수

3.2 완전수리 확률 함수

외부효과 종속적 수리 모형에서는 완전수리 확률을 다양한 공변량의 함수로 나타냄으로써 외부효과가 완전수리 여부에 미치는 영향을 여러 관점에서 표현할 수 있다. 고려할 수 있는 공변량으로는 시스템의 가동시간, 고장원인, 수리능력, 수리시간, 수리회수, 수리비용 및 각종 외부환경 등이 있다.

본 연구에서는 완전수리 확률의 함수의 형태를 <표 1>과 같이 다섯 가지로 구분한다. 모수 추정상의 난점을 고려하여 최소의 모수를 갖는 함수로 표현한다. 계단(step)함수는 외부효과의 범위에 따라 완전수리 확률이 상수로 결정되는 극치 모형을 반영한다. 계단함수는 추정이 쉽고 안정적이기 때문에 다양한 형태의 연속 함수를 구간별(piecewise) 근사 선형화 하는데 사용될 수 있다. 너무 많은 구간을 사용하게 되면, 모수의 수가 증가하여 소표본 자료에서는 모수추정에 문제가 발생할 수 있다.

선형(linear)함수는 외부효과에 선형적으로 비례하여 완전수리 확률이 증가하거나 감소하는 경우를 나타낼 수 있다. 예를 들어 한 시스템이 가동시간에 따라 열화하는 r 개의 모듈로 직렬 구성되어 있다고 하자. 시스템 수리시 대체되는 모듈의 개수를 공변량 x 로 정의하면, 수리효과는 x 에 따라 증가할 것이다. r 개의 모듈을 모두 대체한다면 시스템의 대체를 의미하므로, 수리효과 $p(r) = 1$ 이라 할 수 있다. 이와 같이 선형함수는 공변량의 최대값 x_{\max} 가 존재하는 경우에 사용된다.

로짓(logit)함수인 경우는 공변량이 증가함에 따

라 완전수리 확률이 S자 모형을 하며 증가하게 된다. 이 모형에서 공변량의 범위는 제한이 없으며, 0 값 부근에서 완전수리 확률이 0.5이며 증가 속도가 가장 크고, 0에서 멀어질수록 완전수리 확률의 변화가 둔감한 모형이 된다. 이 모형에서는 완전수리 확률이 가장 민감하게 반응하는 공변량의 값을 0으로 정하게 된다.

완전수리 확률을 분수함수 형태의 볼록(convex) 함수로 정의하면, 공변량이 증가함에 따라 완전수리 확률이 처음에는 급격히, 나중에는 서서히 감소하는 경우를 설명하게 된다. 이러한 외부효과로는 시스템의 수리에 악영향을 미치는 온도, 습도, 전압, 또는 시스템 가동시간 등의 인자를 고려할 수 있다.

다섯 번째와 같은 형태의 오목(concave)함수로 주어지는 경우에는 공변량이 증가함에 따라 단위당 공변량의 변화가 완전수리 확률에 미치는 영향이 감소하는 모형이라고 할 수 있다. 수리시간과 같은 외부효과를 고려하면, 수리시간의 증가에 따라 완전수리 확률을 높일 수 있으나, 시스템을 대체하지 않는 한 수리시간을 아무리 증가시키더라도 완전수리에 이르지 못하는 상황을 설명할 수 있다.

<표 1> 완전수리 확률 함수의 형태

완전 수리 확률 함수	함수의 형태	모형
$p(x_i) = p_j, (0 \leq p_j \leq 1)$ if $x_i \in (a_j, a_{j+1}] (1 \leq j \leq m)$	계단함수	극치 모형
$p(x_i) = \gamma x_i, (x_{\min} \leq \gamma \leq x_{\max})$	선형함수	선형 모형
$p(x_i) = \frac{\exp(\gamma x_i)}{1 + \exp(\gamma x_i)}$	로짓함수	S자 모형
$p(x_i) = \frac{1}{1 + \gamma x_i}$	볼록함수	역 외부효과 모형
$p(x_i) = \frac{\sqrt{\gamma x_i}}{1 + \sqrt{\gamma x_i}}$	오목함수	한계효과 감소모형

4. 시스템 신뢰도 추정 절차

4.1 완전 자료의 우도함수

동적 불완전수리 모형의 모수 추정은 추정량의 일치성(consistency)과 효율성(efficiency)이 보장되는 최대우도추정(MLE) 방법을 통하여 수행한다. 완전자료 $\{(t_i, x_i, z_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ 가 주어졌다고 가정하면, 완전 자료에 대한 우도함수(likelihood function)의 관측치는 식 (1)과 같이 주어진다[25].

$$L(p(x_i), w) = w(t_1) \prod_{i=1}^{n-1} [p(x_i)^{z_i} (1 - p(x_i))^{1-z_i} w(a_i + t_{i+1}) / R(a_i)] \quad (1)$$

위의 식에서 a_i 는 i 번째 수리 직후의 가동시간(age)을 나타내는 값이다.

i 번째 수리 직전의 가동시간을 b_i 라 하면 식 (2)의 관계가 성립하게 되며, 이에 의하여 우도함수의 관측치는 식 (3)과 같이 표현된다.

$$b_1 = t_1, \quad a_i = (1 - z_i) b_i, \quad b_{i+1} = a_i + t_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n - 1) \quad (2)$$

$$L(p(x_i), w) = \prod_{i=1}^{n-1} [p(x_i)^{z_i} (1 - p(x_i))^{1-z_i}] w(t_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} [w(b_{i+1}) / R(b_i)^{1-z_i}] \quad (3)$$

수명분포(Lifetime distribution)가 와이불분포인 경우를 고려하자. 와이불분포는 형상모수(shape parameter)에 따라서 증가고장률과 감소고장률을 모두 적절히 표현할 수 있으며, 확률밀도함수는 식 (4)와 같다. 따라서 수명분포가 와이불분포인 경우, 외부효과 종속적 수리 모형의 대수우도함수는 식 (5)와 같이 표현된다.

$$w(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p(x_i), \alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^{n-1} Z_i \log p(x_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \log \{1 - p(x_i)\} - \sum_{i=1}^{n-1} Z_i \log \{1 - p(x_i)\} \\ &+ n \log \alpha - n \alpha \log \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log B_i \\ &- \sum_{i=1}^n Z_i (B_i / \beta)^\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

완전자료가 주어진 경우에는 대수우도함수를 각 모수에 대하여 편미분하여 구한 우도방정식 (likelihood equation)의 해를 계산함으로써 MLE를 구할 수 있다. 상태변수(수리유형)가 관측되지 않고 불완전 자료 (t_n)와 공변량 (x_{n-1})만이 주어진 경우에는 불완전 자료의 우도함수로부터 MLE를 추정하여야 하므로 복잡한 문제가 발생한다. 불완전 자료의 우도함수를 얻는 한 가지 방법으로 가능한 모든 상태에 대하여 완전 자료 우도함수를 더하는 방법이 있겠으나, 우도 방정식의 해를 구하는 것은 계산상 불가능하다. 이러한 문제점이 불완전 자료 하에서 BP 모형의 추정법이 개발되지 않은 주된 이유라고 볼 수 있다.

4.2 확률 모수 추정 알고리즘

● **기대 조건부 대수우도함수(Expected conditional log likelihood function)**

관측되지 않는 상태변수를 갖는 모형의 모수에 대한 MLE를 구하는 데는 Dempster 등[11]이 제안한 기대화-최대화(EM) 방법이 유용한 것으로 알려져 있다. EM 원리는 기대화 단계(expectation step)와 최대화 단계(maximization step)를 반복적으로 수행함으로써 MLE를 계산하는 것이다. 기대화 단계에서는 완전 자료 대수우도함수의 조건부 기대값을 계산하며, 최대화 단계에서는 이를 최대화하는 모수 값을 계산한다.

식 (5)의 조건부 기대값을 취하여 기대 조건부 대수우도함수를 구하면 식 (6)과 같다.

$$Q(\theta | \theta_0) = E[\log f(t_n, Z_{n-1}; \theta | t_n, x_{n-1}; \theta_0)]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n-1} \log p(x_i) E[Z_i | t_n, x_{n-1}; \theta_0] \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \log \{1 - p(x_i)\} E[1 - Z_i | t_n, x_{n-1}; \theta_0] \\ &+ n \log \alpha - n \alpha \log \beta \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n E[\log B_i | t_n, x_{n-1}; \theta_0] \\ &- \sum_{i=1}^n E[Z_i B_i^\alpha | t_n, x_{n-1}; \theta_0] / \beta^\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

EM 알고리즘의 기대화 단계에서 조건부 기대 대수우도함수를 계산하기 위하여 먼저 i 번째 수리전 시스템의 가동시간 B_i 를 고장시간 간격 (IFT)과 상태 변수(state variable)를 이용하여 나타내면 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} B_1 &= t_1, \\ B_i &= \sum_{k=1}^{i-1} \{t_k \prod_{j=k}^{i-1} (1 - Z_j)\} + t_i, \quad i \geq 2 \end{aligned} \quad (7)$$

이를 이용하여 $i - k + 1$ 에서 i 번째까지의 고장시간 간격의 합인 $t_{i,k}$ 와 수리이력(수리 상태의 과정)을 나타내는 사상 $H_{i,k}$ 를 다음과 같이 정의하자.

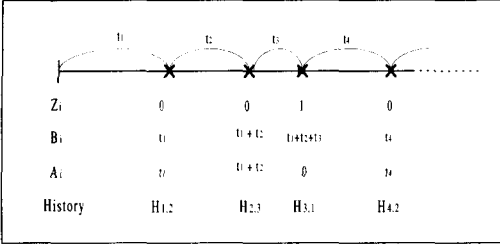
$$\begin{aligned} t_{i,k} &= \sum_{l=i-k+1}^i t_l, \quad (1 \leq k \leq i, 1 \leq i \leq n-1) \\ H_{i,k} &= \{Z_{i-k+1} = 1, Z_{i-k+2} = 0, \dots, Z_i = 0\}, \\ &1 \leq k \leq i+1 \end{aligned} \quad (9)$$

그러면 시스템의 가동시간과 수리이력 $H_{i,k}$ 의 관계가 식 (10)과 같이 성립하게 된다.

$$\begin{aligned} \Pr(B_i = t_{i,k} | t_n, x_{n-1}) &= \Pr(H_{i-1,k} | t_n, x_{n-1}), \\ &(1 \leq k \leq i, 2 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (10)$$

지금까지 설명한 변수들의 관계를 그림을 이용하여 예시하면 [그림 2]와 같이 나타낼 수 있다.

즉, i 번째 고장 전의 수리이력이 $H_{i-1,k}$ 라면, i 번째 수리 직전의 실질적 가동시간은 $t_{i,k}$ 와 같



[그림 2] 변수들의 관계-예제

다. 따라서 식 (6)의 조건부 대수우도함수에서 나타난 조건부 기대값을 계산하기 위해 적분 가능한 임의의 함수 $h(\cdot)$ 에 대하여 다음 관계식을 정리할 수 있다.

$$E[h(B_i) | \underline{t}_n, \underline{x}_{n-1}; \theta_0] = \begin{cases} h(t_1), & \text{for } i=1 \\ \sum_{k=1}^i h(t_{i,k}) \Pr(H_{i-1,k} | \underline{t}_n, \underline{x}_{n-1}; \theta_0), & \text{for } i \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

식 (11)에서 수리이력 $H_{i,k}$ 의 조건부 확률을 계산해야 하는데, 이를 평활확률(smoothed probability) $p_z(i, k)$ 로 식 (12)와 같이 정의한다[18]. 평활확률의 계산은 기대화 단계의 핵심이 된다.

$$p_z(i, k) = \Pr(H_{i,k} | \underline{t}_n, \underline{x}_{n-1}; \theta_0), \quad 1 \leq k \leq i+1, 1 \leq i \leq n \quad (12)$$

● 기대화 단계

식 (11)과 평활확률을 이용하여 조건부 대수우도 함수를 나타내면 식 (13)과 같다. 식 (13b)의 마지막 항은 [부록 1]에서와 같이 유도된다.

$$E[\log f(\underline{T}_n, \underline{Z}_{n-1}; \theta | \underline{t}_n, \underline{x}_n; \theta_0)] = Q(\theta | \theta_0) = Q_1(\theta | \theta_0) + Q_2(\theta | \theta_0), \quad (13)$$

$$Q_1(\theta | \theta_0) = \sum_{i=1}^{n-1} [p_z(i, 1) \log p(x_i) + \{1 - p_z(i, 1)\} \log \{1 - p(x_i)\}], \quad (13a)$$

$$Q_2(\theta | \theta_0) = n \log \alpha - n \log \beta$$

$$+ (\alpha - 1) [\log t_1 + \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^i \log(t_{i,k}) p_z(i-1, k)] - \frac{1}{\beta^\alpha} [t_1^\alpha p_z(1, 1)] + \sum_{i=2}^n \{ \sum_{k=1}^i (t_{i,k})^\alpha [p_z(i-1, k) - p_z(i, k+1)] \} \quad (13b)$$

평활확률을 직접 계산하는 것은 어려우므로, 아래와 같이 정의된 여과확률(filtered probability) $fp(i, k)$ 를 먼저 계산하여 이로부터 유도한다[18].

$$fp(i, k) = \Pr(H_{i,k} | \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_i; \theta_0), \quad 1 \leq k \leq i+1, 1 \leq i \leq n-1 \quad (14)$$

여과확률은 다음과 같은 순환 식으로 표현된다 [부록 2].

$$fp(i, 1) = \frac{p_0(x_i) w_0(t_{i+1})}{f_0(t_{i+1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i)}$$

$$fp(i, k) = \frac{[1 - p_0(x_i)] w_0(t_{i+1} | t_{i,k-1}) fp(i-1, k-1)}{f_0(t_{i+1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i)}, \quad 2 \leq k \leq i+1 \quad (15)$$

이상을 종합하면 여과확률 계산 알고리즘은 다음과 같다.

● 여과확률 계산 알고리즘

단계 0

$$f_0(t_2, H_{1,1} | t_1, x_1) = p_0(x_1) w_0(t_2),$$

$$f_0(t_2, H_{1,2} | t_1, x_1) = [1 - p_0(x_1)] w_0(t_2 | t_1),$$

$$f_0(t_2 | t_1, x_1) = \sum_{j=1}^2 f_0(t_2, H_{1,j} | t_1, x_1),$$

$$fp(1, 1) = \frac{f_0(t_2, H_{1,1} | t_1, x_1)}{f_0(t_2 | t_1, x_1)},$$

$$fp(1, 2) = \frac{f_0(t_2, H_{1,2} | t_1, x_1)}{f_0(t_2 | t_1, x_1)}.$$

$i=2, \dots, n-1$ 에 대해서 다음을 계산한다.

단계 1

$$f_0(t_{i+1}, H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) =$$

$$\begin{cases} p_0(x_i)w_0(t_{i+1}), & k=1 \\ [1-p_0(x_i)]w_0(t_{i+1} | t_{i,k-1})fp(i-1, k-1), \\ 2 \leq k \leq i+1 \end{cases}$$

단계 2

$$f_0(t_{i+1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) = \sum_{k=1}^{i+1} f_0(t_{i+1}, H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i).$$

단계 3

단계 1과 2의 결과를 이용하여 $k=1, \dots, i+1$ 에 대해 다음을 계산한다.

$$fp(i, k) = \frac{f_0(t_{i+1}, H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i)}{f_0(t_{i+1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i)}$$

이제 평활확률을 계산하기 위하여 다음을 정의한다.

$$dz(i, k) = f_0(t_n, \dots, t_{i+2} | H_{i,k}, \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_{n-1}),$$

$$1 \leq i \leq n-2, 1 \leq k \leq i+1$$

$$cp(i) = f_0(t_{i+1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

그러면 여과확률을 이용한 평활확률 계산 알고리즘은 아래와 같다[부록 3].

● 평활확률 계산 알고리즘

단계 0

$$pz(n-1, k) = fp(n-1, k), \quad 1 \leq k \leq n$$

$dz(n-1, k) = 1, D=1$ 로 잡고, $i = n-2, \dots, 1$ 에 대해서 다음 단계를 계산한다.

단계 1

$$dz(i, k) = p_0(x_{i+1})w_0(t_{i+2})dz(i+1, 1) + [1-p_0(x_{i+1})]w_0(t_{i+2} | t_{i+1,k})dz(i+1, k+1)$$

$$1 \leq k \leq i+1 \quad (16)$$

단계 2

$$D = D \times cp(i+1)$$

단계 3

$$pz(i, k) = fp(i, k)dz(i, k)/D \quad (17)$$

위에서 주어진 알고리즘을 통하여 얻어진 평활확률을 이용해 식 (13)에 대입하면 조건부 대수우도함수 $Q(\theta | \theta_0)$ 를 구할 수 있게 된다.

● 최대화 단계

최대화 단계에서는 식 (13)의 조건부 대수우도함수를 각 모수에 대하여 편미분하여 다음과 같은 조건식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\psi(\alpha)}{\beta^\alpha} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - n \log \beta + \lambda + \frac{\log \beta}{\beta^\alpha} \psi(\alpha) - \frac{\psi'(\alpha)}{\beta^\alpha} = 0 \quad (19)$$

여기서 λ 와 $\psi(\alpha)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda = \log t_1 + \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{k=1}^i \log(t_{i,k}) pz(i-1, k) \right\}$$

$$\psi(\alpha) = t_1^\alpha pz(1, 1) + \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{k=1}^i (t_{i,k})^\alpha [pz(i-1, k) - pz(i, k+1)] \right\}$$

따라서 모수 추정 결과는 다음과 같다.

$$g(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \lambda - \frac{n\psi'(\alpha)}{\psi(\alpha)} = 0 \quad (20)$$

$$\beta^\alpha = \frac{\psi(\alpha)}{n} \quad (21)$$

최대화 단계에서 관건은 완전수리 확률 함수를 구성하는 모수를 추정하는 것이다. 이는 각 모형 별로 구분하여 수행한다.

완전수리 확률이 공변량에 따라 m 개로 구분되는 계단함수로 이루어진 경우의 우도함수를 구하여보자. 완전수리 확률을 $p(x_i) = p_j, \text{ for } x_i \in (c_j, c_{j+1}] (1 \leq j \leq m)$ 라 하고, $x_i \in (c_j, c_{j+1}]$ 을 만족하는 i 의 집합을 R_j 라 하면 $|\Sigma_{j=1}^m R_j| = n-1$

이고, 조건부 기대 대수우도함수의 첫 항을 구하면 다음과 같다.

$$Q_1(\theta | \theta_0) = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i \in R_j} pz(i, 1) \log p_j + \left\{ |R_j| - \sum_{i \in R_j} pz(i, 1) \right\} \log(1 - p_j) \right] \quad (22)$$

이를 각 계단 확률 p_j 에 대하여 편미분하면, 최적해를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_j} = \frac{\sum_{i \in R_j} pz(i, 1)}{p_j} - \frac{|R_j| - \sum_{i \in R_j} pz(i, 1)}{1 - p_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq m \quad (23)$$

따라서 계단함수의 모수에 대한 최대화 단계는 다음과 같이 명백한 해를 갖는다.

$$p_j^* = \sum_{i \in R_j} pz(i, 1) / |R_j| \quad (24)$$

위와 같은 방법으로 완전수리 확률이 다른 함수의 형태로 정의된 경우에도 최대화 단계의 수행이 가능하다. 선형함수에서는 다음과 같은 최대화 식을 얻는다.

$$Q_1(\theta | \theta_0) = \sum_{i=1}^n \log(\gamma x_i) pz(i, 1) + \sum_{i=1}^n \log(1 - \gamma x_i) [1 - pz(i, 1)] \quad (25)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \gamma} = \frac{\sum_{i=1}^n pz(i, 1)}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i [1 - pz(i, 1)]}{1 - \gamma x_i} = 0 \quad (26)$$

[정리 1] 완전수리 확률이 선형함수로 주어진 경우, $0 < \sum_{i=1}^n pz(i, 1) < n-1$ 이면 최대화 단계에서 항상 모수 γ 에 대한 해가 존재한다. 단, $\sum_{i=1}^n pz(i, 1) = 0$ 인 경우에는 $\gamma = 0$ 이 되며, $\sum_{i=1}^n pz(i, 1) = n-1$ 인 경우에는 해가 존재하지

않는다.

[증명] 식 (26)에서 $LHS = \sum_{i=1}^n pz(i, 1)$, $RHS = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma x_i [1 - pz(i, 1)]}{1 - \gamma x_i}$ 라 하면, 양변이 같아질 때 해가 존재한다. $0 < LHS < n-1$ 일 때는 $0 < pz(i, 1) < 1$ 을 만족하는 적어도 하나의 i 가 존재한다. RHS 는 γ 에 대하여 단조증가함수이므로, γ 의 해는 0과 x_{\max} 사이에 존재한다.

모든 $pz(i, 1) = 0$ 일 때 $LHS = 0$ 이 되며, 이때는 γ 가 0이 되어야만 양변이 같아진다. 모든 $pz(i, 1) = 1$ 일 때 $LHS = n-1$ 이 되며, 이때는 γ 의 값과 상관없이 $RHS = 0$ 이 되므로 해가 존재하지 않는다. ■

로짓함수에서는 다음과 같은 최대화 식을 얻는다.

$$Q_1(\theta | \theta_0) = \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{e^{\gamma x_i}}{1 + e^{\gamma x_i}} \right) pz(i, 1) + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1}{1 + e^{\gamma x_i}} \right) [1 - pz(i, 1)] \quad (27)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n x_i pz(i, 1) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{\gamma x_i}}{1 + e^{\gamma x_i}} = 0 \quad (28)$$

[정리 2] 완전수리 확률이 로짓함수로 주어진 경우, $0 < \sum_{i=1}^n pz(i, 1) < n-1$ 이면 최대화 단계에서 항상 모수 γ 에 대한 해가 존재한다. 단, $\sum_{i=1}^n pz(i, 1) = 0$ 인 경우에는 $\gamma = -\infty$ 이 되며, $\sum_{i=1}^n pz(i, 1) = n-1$ 인 경우에는 $\gamma = \infty$ 가 된다.

[증명] 식 (28)에서 $LHS = \sum_{i=1}^n x_i pz(i, 1)$, $RHS =$

$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i e^{\gamma x_i}}{1+e^{\gamma x_i}}$ 라 하면, 양변이 같아질 때 해가 존재한다. 편의상 공변량의 범위는 $x_i > 0$ 라하고, $-\infty < \gamma < \infty$ 라 하자. $0 \leq LHS \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ 이므로, $LHS=0$ 일 때는 $\gamma = -\infty$ 이며, $LHS = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ 일 때는 $\gamma = \infty$ 가 해가 된다. RHS 는 γ 에 대하여 단조증가함수이므로, $0 < LHS < \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ 일 때는 $-\infty < \gamma < \infty$ 에서 해가 존재하게 된다. ■

불록함수에서는 다음과 같은 최대화 식을 얻는다.

$$Q_1(\theta | \theta_0) = - \sum_{i=1}^{n-1} \log(1 + \gamma x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \log(\gamma x_i)[1 - pz(i, 1)] \quad (29)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - pz(i, 1)}{\gamma} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{1 + \gamma x_i} = 0 \quad (30)$$

[정리 3] 완전수리 확률이 불록함수로 주어진 경우, $0 < \sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) < n-1$ 이면 최대화 단계에서 항상 모수 γ 에 대한 해가 존재한다. 단, $\sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) = 0$ 인 경우에는 $\gamma = \infty$ 가 되며, $\sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) = n-1$ 인 경우에는 $\gamma = 0$ 이 된다.

[증명] 식 (30)에서 $LHS = (n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1)$, $RHS = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma x_i}{1 + \gamma x_i}$ 라 하면, 양변이 같아질 때 해가 존재한다. $0 \leq LHS \leq n-1$ 이므로, $LHS=0$ 일 때는 $\gamma = 0$ 이며, $LHS = n-1$ 일 때는 $\gamma = \infty$ 가 해가 된다. RHS 는 γ 에 대하여 단조증가함수이므로, $0 < LHS < n-1$ 일 때는 $0 < \gamma < \infty$ 에서 해

가 존재하게 된다. ■

오목함수에서는 다음과 같은 최대화 식을 얻는다.

$$Q_1(\theta | \theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \log(\gamma x_i) pz(i, 1) - \sum_{i=1}^{n-1} \log(1 + \sqrt{\gamma x_i}) [1 - pz(i, 1)] \quad (31)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{pz(i, 1)}{\gamma} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{\sqrt{\gamma x_i + \gamma x_i}} = 0 \quad (32)$$

[정리 4] 완전수리 확률이 오목함수로 주어진 경우, $0 < \sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) < n-1$ 이면 최대화 단계에서 항상 모수 γ 에 대한 해가 존재한다. 단, $\sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) = 0$ 인 경우에는 $\gamma = \infty$ 가 되며, $\sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) = n-1$ 인 경우에는 $\gamma = 0$ 이 된다.

[증명] 식 (32)에서 $LHS = \sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1)$, $RHS = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma x_i}}$ 라 하면, 양변이 같아질 때 해가 존재한다. $0 \leq LHS \leq n-1$ 이므로, $LHS=0$ 일 때는 $\gamma = 0$ 이며, $LHS = n-1$ 일 때는 $\gamma = \infty$ 가 해가 된다. RHS 는 γ 에 대하여 단조감소함수이므로, $0 < LHS < n-1$ 일 때는 $0 < \gamma < \infty$ 에서 해가 존재하게 된다. ■

앞에서 살펴본 바와 같이, 특수한 경우, 즉 $\sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) = 0$ 이거나 $\sum_{i=1}^{n-1} pz(i, 1) = n-1$ 인 경우 외에는 모든 완전수리 확률 모형에 대하여 최대화 단계의 해가 존재한다. 선형함수에서는 γ 의 해가 0과 x_{\max} 사이에 존재하므로 이분법이나 이보다 수렴속도가 빠른 Regula-falsi 방법 등을 이용

할 수 있으며, 다른 함수 모형에 대해서는 초기값과 무관하게 Newton 방법을 사용할 수 있다.

5. 모의실험

모의실험을 통하여 외부효과 종속적 수리 모형의 모수 추정에 대한 특성을 알아본다. 배경 분포는 와이블분포로 가정하였고, 척도모수는 1.0, 형상모수는 3.0으로 정하였다.

먼저 완전수리 확률이 2, 3, 4개의 구간으로 나누어진 각각의 계단함수에 대하여 모의실험을 실시하였다. 2단계 계단함수에서는 계단확률을 각각 (0.0, 1.0), (0.2, 0.8), (0.4, 0.6)으로 하였으며, 3단계에서는 (0.0, 0.5, 1.0), (0.2, 0.5, 0.8), (0.4, 0.5, 0.6)으로, 4단계에서는 (0.0, 1/3, 2/3, 1.0), (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)로 하여 실험하였다. 선형 함수에 대해서는 공변량의 범위를 0에서 1사이로 제한하고, 기울기 γ 를 0.3, 0.5, 0.7로 놓고 각

각 실험하였다. 로짓함수에 대해서는 공변량의 범위를 -10에서 10으로 제한하고, 확률모수 γ 를 -0.5, 0., 0.5로 놓고 각각 실험하였다. 볼록함수와 오목함수에 대해서는 각각 공변량의 범위를 100 이하로 제한하고, 확률모수 γ 를 0.3, 0.5, 0.7로 놓고 각각 실험하였다.

공변량은 단조 감소하는 경우와 감소-증가가 교대로 발생하는 두 가지 경우에 대하여 살펴보았다. $n=20$ 인 경우와 $n=40$ 인 두 가지 경우에 대하여 두 유형의 공변량을 각각 적용하였다. 일 예로 $n=20$ 일 때, 단조 감소하는 공변량은 {1.0, .95, .9, ..., 0.1, 0.05}와 같이 등간격으로 정하고, 감소-증가가 교대로 발생하는 공변량은 {1.0, 0.05, 0.9, 0.1, ..., 0.55, 0.45}와 같이 정하였다. 각각의 경우에 대하여 1000회씩 모의 실험한 결과, 공변량의 경향에 따른 추정 결과의 차이는 미미한 것으로 나타났으므로 단조 감소하는 경우에 대한 결과만을 <표 2>에서 <표 8>까지 정리하였다.

<표 2> 2단계 계단함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	p_1	p_2
단조감소(20)			1.00	3.00	0.00	1.00
MEAN	0.54	0.96	1.01	3.19	0.00	1.00
VAR	0.00	0.02	0.01	0.27	0.00	0.00
CV	0.11	0.14	0.10	0.16	0.00	0.00
단조감소(20)			1.00	3.00	0.20	0.80
MEAN	0.60	1.16	1.00	3.27	0.22	0.83
VAR	0.01	0.08	0.02	0.53	0.03	0.02
CV	0.18	0.24	0.13	0.22	0.73	0.18
단조감소(20)			1.00	3.00	0.40	0.60
MEAN	0.62	1.24	0.99	3.24	0.43	0.64
VAR	0.02	0.10	0.02	0.68	0.04	0.04
CV	0.20	0.25	0.14	0.25	0.49	0.32
단조감소(40)			1.00	3.00	0.00	1.00
MEAN	0.46	0.80	1.00	3.06	0.00	1.00
VAR	0.00	0.00	0.01	0.08	0.00	0.00
CV	0.08	0.08	0.08	0.09	-	0.00
단조감소(40)			1.00	3.00	0.20	0.80
MEAN	0.56	1.06	1.00	3.10	0.20	0.81
VAR	0.01	0.03	0.01	0.22	0.01	0.01
CV	0.14	0.17	0.09	0.15	0.50	0.15
단조감소(40)			1.00	3.00	0.40	0.80
MEAN	0.59	1.16	0.99	3.12	0.41	0.62
VAR	0.01	0.04	0.01	0.32	0.02	0.02
CV	0.15	0.17	0.11	0.18	0.32	0.23

β_1 : MLE for 척도모수 (IID 모형)
 α_1 : MLE for 형상모수 (IID 모형)

<표 3> 3단계 계단함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	p_1	p_2	p_3
단조감소(20)			1.00	3.00	0.00	0.50	1.00
MEAN	0.62	1.16	1.00	3.24	0.00	0.53	1.00
VAR	0.01	0.05	0.01	0.38	0.00	0.05	0.00
CV	0.15	0.20	0.11	0.19	0.00	0.43	0.01
단조감소(20)			1.00	3.00	0.20	0.50	0.80
MEAN	0.63	1.25	1.00	3.27	0.24	0.53	0.83
VAR	0.01	0.09	0.02	0.64	0.05	0.06	0.03
CV	0.18	0.24	0.13	0.24	0.97	0.45	0.21
단조감소(20)			1.00	3.00	0.40	0.50	0.60
MEAN	0.62	1.26	0.99	3.24	0.44	0.53	0.64
VAR	0.02	0.10	0.02	0.71	0.08	0.06	0.05
CV	0.20	0.25	0.14	0.26	0.62	0.45	0.36
단조감소(40)			1.00	3.00	0.00	0.50	1.00
MEAN	0.54	0.96	1.00	3.09	0.00	0.51	1.00
VAR	0.00	0.01	0.01	0.13	0.00	0.03	0.00
CV	0.12	0.12	0.08	0.12	-	0.32	0.01
단조감소(40)			1.00	3.00	0.20	0.50	0.80
MEAN	0.59	1.12	0.99	3.08	0.21	0.51	0.82
VAR	0.01	0.04	0.01	0.26	0.02	0.03	0.02
CV	0.14	0.17	0.10	0.16	0.64	0.33	0.16
단조감소(40)			1.00	3.00	0.40	0.50	0.60
MEAN	0.60	1.17	0.99	3.09	0.42	0.52	0.63
VAR	0.01	0.04	0.01	0.33	0.03	0.03	0.03
CV	0.15	0.17	0.11	0.19	0.41	0.33	0.26

<표 4> 4단계 계단함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	p_1	p_2	p_3	p_4
단조감소(20)			1.00	3.00	0.00	0.33	0.67	1.00
MEAN	0.59	1.15	0.99	3.21	0.00	0.36	0.70	0.99
VAR	0.01	0.07	0.01	0.43	0.00	0.07	0.06	0.00
CV	0.17	0.22	0.12	0.20		0.72	0.35	0.05
단조감소(20)			1.00	3.00	0.20	0.40	0.60	0.80
MEAN	0.62	1.23	1.00	3.26	0.24	0.43	0.65	0.82
VAR	0.01	0.09	0.02	0.58	0.06	0.07	0.07	0.04
CV	0.19	0.24	0.13	0.23	1.04	0.62	0.40	0.25
단조감소(40)			1.00	3.00	0.33	0.67	1.00	
MEAN	0.54	0.99	1.00	3.09	0.00	0.34	0.68	1.00
VAR	0.01	0.02	0.01	0.16	0.00	0.03	0.03	0.00
CV	0.13	0.14	0.09	0.13		0.50	0.27	0.02
단조감소(40)			1.00	3.00	0.20	0.40	0.60	0.80
MEAN	0.58	1.11	0.99	3.09	0.21	0.41	0.62	0.82
VAR	0.01	0.04	0.01	0.26	0.02	0.03	0.04	0.02
CV	0.15	0.17	0.10	0.17	0.74	0.45	0.31	0.19

<표 5> 선형함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	γ	$p(BP)$
단조감소(20)			1.00	3.00	0.30	
MEAN	0.28	0.84	1.03	3.29	0.31	0.17
VAR	0.01	0.02	0.03	0.57	0.04	0.01
CV	0.34	0.17	0.18	0.23	0.61	0.61
단조감소(20)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.39	0.92	1.02	3.29	0.52	0.29
VAR	0.01	0.03	0.03	0.64	0.05	0.01
CV	0.28	0.20	0.17	0.24	0.42	0.42
단조감소(20)			1.00	3.00	0.70	
MEAN	0.49	1.03	1.01	3.26	0.72	0.40
VAR	0.01	0.05	0.02	0.65	0.04	0.01
CV	0.23	0.21	0.15	0.25	0.29	0.31
단조감소(40)			1.00	3.00	0.30	
MEAN	0.24	0.78	1.01	3.12	0.31	0.16
VAR	0.00	0.01	0.02	0.21	0.01	0.00
CV	0.27	0.11	0.13	0.15	0.39	0.39
단조감소(40)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.34	0.85	1.01	3.10	0.51	0.27
VAR	0.01	0.01	0.01	0.21	0.02	0.01
CV	0.23	0.14	0.12	0.15	0.29	0.29
단조감소(40)			1.00	3.00	0.70	
MEAN	0.44	0.93	1.00	3.10	0.71	0.37
VAR	0.01	0.02	0.01	0.24	0.02	0.01
CV	0.19	0.15	0.11	0.16	0.22	0.22

5.1 모수 추정의 일관성 검증

먼저 표본의 크기에 따라 추정의 정확성에 미치는 영향을 살펴본다. 2단계 계단함수 모형에 대하여 입력 모수를 $\beta = 1$, $\alpha = 3$, $p_1 = 0.2$,

<표 6> 로짓함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	γ	$p(BP)$
단조감소(20)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.58	1.09	1.01	3.23	1.27	0.53
VAR	0.01	0.05	0.01	0.44	2.68	0.00
CV	0.17	0.21	0.11	0.21	1.29	0.11
단조감소(20)			1.00	3.00	0.00	
MEAN	0.62	1.25	1.00	3.22	0.02	0.52
VAR	0.02	0.11	0.02	0.75	0.20	0.01
CV	0.20	0.26	0.14	0.27	23.10	0.18
단조감소(20)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.52	0.99	1.01	3.19	1.11	0.48
VAR	0.01	0.04	0.01	0.38	2.20	0.00
CV	0.18	0.19	0.12	0.19	1.34	0.13
단조감소(40)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.53	0.95	1.01	3.09	0.79	0.51
VAR	0.01	0.02	0.01	0.16	1.57	0.00
CV	0.14	0.15	0.08	0.13	1.59	0.08
단조감소(40)			1.00	3.00	0.00	
MEAN	0.59	1.17	0.99	3.08	0.00	0.51
VAR	0.01	0.04	0.01	0.33	0.01	0.00
CV	0.15	0.17	0.10	0.19	44.92	0.13
단조감소(40)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.50	0.92	1.00	3.06	0.77	0.49
VAR	0.01	0.02	0.01	0.13	1.43	0.00
CV	0.15	0.14	0.08	0.12	1.56	0.08

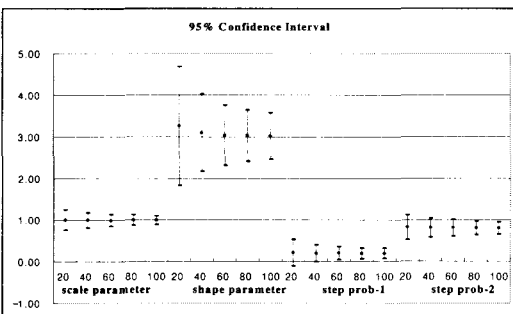
<표 7> 블록함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	γ	$p(BP)$
단조감소(20)			1.00	3.00	0.30	
MEAN	0.47	0.93	1.02	3.21	0.45	0.42
VAR	0.01	0.03	0.02	0.37	0.21	0.01
CV	0.21	0.19	0.12	0.19	1.03	0.20
단조감소(20)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.42	0.87	1.02	3.20	0.76	0.37
VAR	0.01	0.02	0.02	0.37	0.60	0.01
CV	0.22	0.18	0.13	0.19	1.02	0.22
단조감소(20)			1.00	3.00	0.70	
MEAN	0.39	0.84	1.02	3.19	1.08	0.34
VAR	0.01	0.02	0.02	0.38	1.42	0.01
CV	0.22	0.17	0.13	0.19	1.11	0.23
단조감소(40)			1.00	3.00	0.30	
MEAN	0.45	0.86	1.01	3.07	0.37	0.45
VAR	0.01	0.01	0.01	0.13	0.06	0.00
CV	0.16	0.14	0.09	0.12	0.64	0.12
단조감소(40)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.40	0.81	1.01	3.07	0.62	0.40
VAR	0.00	0.01	0.01	0.13	0.17	0.00
CV	0.17	0.13	0.09	0.12	0.67	0.14
단조감소(40)			1.00	3.00	0.70	
MEAN	0.37	0.78	1.01	3.07	0.86	0.37
VAR	0.00	0.01	0.01	0.13	0.34	0.00
CV	0.18	0.13	0.10	0.12	0.68	0.15

〈표 8〉 오목함수 모형의 모의실험 결과

	β_1	α_1	β	α	γ	$p(BP)$
단조감소(20)			1.00	3.00	0.30	
MEAN	0.59	1.16	1.01	3.24	0.98	0.52
VAR	0.01	0.08	0.02	0.52	3.64	0.02
CV	0.20	0.24	0.13	0.22	1.96	0.24
단조감소(20)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.64	1.25	1.01	3.24	1.48	0.56
VAR	0.01	0.10	0.02	0.53	5.48	0.01
CV	0.18	0.25	0.12	0.23	1.59	0.22
단조감소(20)			1.00	3.00	0.70	
MEAN	0.66	1.30	1.01	3.25	1.87	0.59
VAR	0.01	0.11	0.01	0.56	7.15	0.01
CV	0.17	0.26	0.12	0.23	1.43	0.20
단조감소(40)			1.00	3.00	0.30	
MEAN	0.57	1.08	1.00	3.07	0.53	0.51
VAR	0.01	0.03	0.01	0.21	0.63	0.01
CV	0.15	0.16	0.09	0.15	1.51	0.16
단조감소(40)			1.00	3.00	0.50	
MEAN	0.61	1.16	1.00	3.07	0.86	0.56
VAR	0.01	0.04	0.01	0.21	1.13	0.01
CV	0.13	0.16	0.09	0.15	1.24	0.14
단조감소(40)			1.00	3.00	0.70	
MEAN	0.64	1.21	1.00	3.07	1.20	0.59
VAR	0.01	0.04	0.01	0.22	2.23	0.01
CV	0.12	0.17	0.08	0.15	1.24	0.13

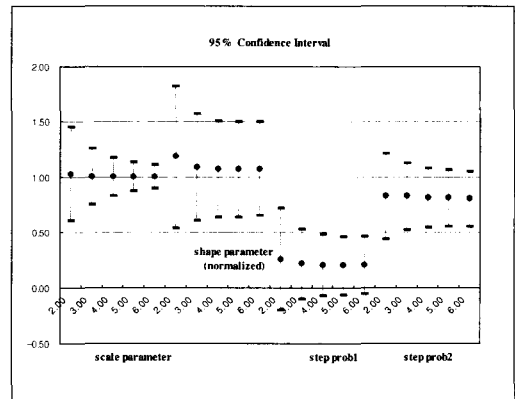
$p_2 = 0.8$ 로 설정한 후, $n = 20, 40, 60, 80, 100$ 등으로 증가시켜 가며 모의실험 하였다. [그림 3]은 각각의 경우에 대한 확률모수의 95% 신뢰구간을 나타내고 있다. 모든 경우에 있어서 표본크기가 큰 경우가 추정의 정확도와 정밀도 모두가 우수함을 알 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이 자료의 개수가 증가할수록 신뢰 구간의 폭이 좁아짐을 알 수가 있다. 따라서 MLE가 일치 추정치(consistent estimator)임을 알 수가 있다.



〈그림 3〉 표본크기의 증가에 따른 추정의 정밀도

5.2 형상 모수의 변화에 따른 효과

2단계 계단함수 모형에 대하여 입력 모수를 $n = 20, \beta = 1, p_1 = 0.2, p_2 = 0.8$ 로 설정한 후 형상 모수(shape parameter) 2, 3, 4, 5, 6에 대하여 모의실험을 실시하여, 각 확률모수의 95% 신뢰구간의 변화를 [그림 4]에 도식하였다. 그림에서 형상모수에 대한 신뢰구간은 모수 값을 1.0으로 규준화(normalize)하여 나타내었다. 형상모수가 증가할수록 추정의 정밀도가 증가하고 있음을 알 수 있다. 특히 척도모수의 경우, 형상모수가 증가함에 추정의 정밀도가 급격히 향상됨을 알 수 있다. 형상모수의 증가는 시스템 노후화(aging) 경향의 증가를 의미하므로, 열화가 급격히 발생하는 시스템 일수록 모수추정이 정확해짐을 의미한다.



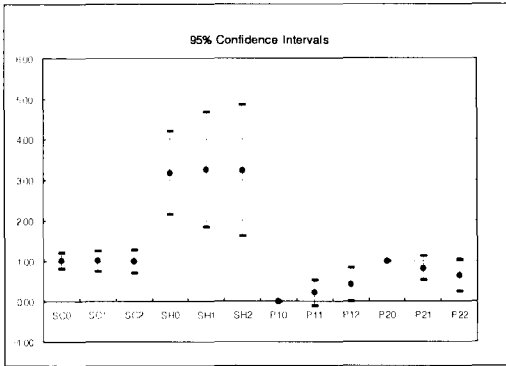
〈그림 4〉 형상 모수(α)에 따른 추정의 정밀도

5.3 완전수리 확률의 변화에 따른 효과

공변량 증속적 수리 모형에서 완전수리 확률이 2개의 구간으로 이루어진 계단 함수를 따르는 경우 완전수리 확률의 조합에 따라서 추정 특성의 변화를 알아보았다.

2단계 계단함수에서 완전수리 확률의 조합을 (0.0, 1.0), (0.2, 0.8), (0.4, 0.6)으로 잡고 각각의 경우에 대하여 95% 신뢰구간의 변화를 [그림 5]에 나타내었다. 그림에서 보듯 완전수리 확률의 차이

가 작아질수록 신뢰구간의 폭이 증가하고 있음을 알 수가 있다. 즉, 완전수리 확률의 차이가 작은 경우에는 모수의 추정이 정확하지 못한 것을 알 수가 있다.



[그림 5] 완전수리 확률에 따른 추정치의 95% 신뢰구간

5.4 외부효과 종속적 수리 모형의 예측력 평가

본 절에서는 기존의 IID 모형, 불완전수리 모형과 공변량 종속적 수리 모형의 다음 고장시간에 대한 예측력의 차에 대하여 모의 실험을 실시하였다. 먼저 고장시간 간격 t_1, t_2, \dots, t_n 을 발생시킨 후 각각의 모형에 대한 확률모수를 추정하였다. 이렇게 얻어진 모수 추정치를 이용하여 다음 고장시간 간격의 예측치 $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_n$ 를 발생시켜 MSE(Mean Square Error) ($\sum_{i=1}^n (t_i - \hat{t}_i)^2/n$) 를 구하였다.

다음 고장시간 간격의 예측치는 기대값 대신 최빈값을 사용하였으나, 형상모수가 1이하인 경우에는 최빈값이 0이 되므로 이때는 기대값을 사용하였다. 각 모형에 대한 예측치의 식은 다음과 같다.

<표 9> 외부효과 종속적 모형의 예측력 (MSE) (계단함수)

n=20	n=20			n=20								
	0 1	IID	BP	NSBP	.2-.8	IID	BP	NSBP	.4-.6	IID	BP	NSBP
2 단계	0.305	0.209	0.073	0.318	0.194	0.143	0.310	0.191	0.179			
단조감소	-	31.6%	76.2%		38.8%	55.0%		38.4%	42.2%			
3 단계	0.347	0.195	0.112	0.319	0.191	0.151	0.311	0.190	0.173			
단조감소	-	43.6%	67.8%		40.2%	52.5%		39.0%	44.4%			
4 단계	0.317	0.191	0.116	0.314	0.190	0.149						
단조감소	-	39.7%	63.3%		39.5%	52.5%						
2 단계	0.320	0.193	0.121	0.312	0.192	0.162	0.308	0.193	0.185			
교대	-	39.6%	62.2%		38.3%	48.1%		37.3%	39.8%			
3 단계	0.308	0.188	0.135	0.313	0.191	0.162	0.309	0.192	0.179			
교대	-	38.9%	56.2%		39.2%	48.4%		38.0%	42.3%			
4 단계	0.302	0.186	0.144	0.313	0.191	0.163						
교대	-	38.6%	52.2%		39.0%	47.9%						
n=40	n=40			n=40								
	0 1	IID	BP	NSBP	.2-.8	IID	BP	NSBP	.4-.6	IID	BP	NSBP
2 단계	0.225	0.221	0.065	0.325	0.202	0.149	0.336	0.196	0.187			
단조감소	-	2.0%	71.2%		37.8%	54.1%		41.6%	44.4%			
3 단계	0.294	0.209	0.107	0.337	0.199	0.160	0.341	0.196	0.184			
단조감소	-	28.7%	63.7%		40.8%	52.6%		42.4%	45.9%			
4 단계	0.310	0.205	0.119	0.338	0.198	0.161						
단조감소	-	33.7%	61.4%		41.3%	52.3%						
2 단계	0.324	0.193	0.125	0.336	0.195	0.168	0.339	0.197	0.191			
교대	-	40.5%	61.4%		42.0%	50.0%		42.0%	43.7%			
3 단계	0.332	0.194	0.145	0.338	0.195	0.172	0.342	0.197	0.188			
교대	-	41.6%	56.5%		42.3%	49.0%		42.3%	44.9%			
4 단계	0.329	0.193	0.151	0.332	0.195	0.172						
교대	-	41.3%	54.1%		41.3%	48.1%						

(*) % : IID모형의 MSE에 대한 감소분

IID 모형 : $\hat{t}_i = \hat{\beta}_1 \left(\frac{\hat{a}_1 - 1}{\hat{a}_1} \right)^{1/\alpha_1}$, if $\hat{a}_1 > 1$,

$(\hat{a}_1, \hat{\beta}_1) = \text{IID}$ 모형 하의 MLE

$\hat{t}_i = \hat{\beta}_1$, if $\hat{a}_1 \leq 1$.

BP 모형 : $\hat{t}_i = \hat{p} \hat{\beta}_2 \left(\frac{\hat{a}_2 - 1}{\hat{a}_2} \right)^{1/\alpha_2}$, if $\hat{a}_2 > 1$,

$(\hat{a}_2, \hat{\beta}_2, \hat{p}) = \text{BP}$ 모형 하의 MLE

$\hat{t}_i = \hat{p} \hat{\beta}_2$, if $\hat{a}_2 \leq 1$.

외부효과 종속 모형 :

$\hat{t}_i = \hat{p}(x_i) \hat{\beta} \left(\frac{\hat{a} - 1}{\hat{a}} \right)^{1/\hat{a}}$, if $\hat{a} > 1$,

$(\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{p}(x_i)) = \text{외부효과 모형 하의 MLE}$

각각의 함수에 대한 모의실험 결과는 <표 9> ~ <표 13>과 같다. 계단함수에 대한 결과는 [그림 6]에 나타내었다. 결과를 보면 기존의 불완전수리 모형과 비교해 볼 때, 공변량 종속적 수리 모형이 모든 경우에 있어서 모수추정 능력이 우수함을 알 수가 있다. 특히 기존의 IID 모형에 비해 MSE를 40% 이상 감소시키고 있음을 알 수 있다. 또한 계단 확률의 차이가 클수록 외부효과 종속적 모형이 기존의 BP 모형에 비해 MSE의 향상이 두드러짐을 알 수 있다.

<표 10> 외부효과 종속적 모형의 예측력 (MSE) (선형함수)

	n=20	IID	BP	NSBP	n=40	IID	BP	NSBP
$\gamma=0.3$	0.146	0.127	0.119		0.125	0.127	0.118	
단조감소	-	13.2%	18.7%		-	-1.1%	6.0%	
$\gamma=0.5$	0.208	0.167	0.152		0.173	0.167	0.149	
단조감소	-	19.6%	26.8%		-	3.9%	13.9%	
$\gamma=0.7$	0.268	0.187	0.166		0.238	0.190	0.163	
단조감소	-	29.9%	37.9%		-	19.9%	31.2%	
$\gamma=0.3$	0.148	0.128	0.122		0.124	0.126	0.122	
단조감소	-	14.1%	17.5%		-	-1.4%	1.3%	
$\gamma=0.5$	0.211	0.165	0.155		0.176	0.164	0.157	
단조감소	-	21.8%	26.6%		-	6.9%	11.2%	
$\gamma=0.7$	0.270	0.186	0.169		0.251	0.187	0.173	
단조감소	-	31.2%	37.4%		-	25.5%	30.9%	

(*) % : IID모형의 MSE에 대한 감소분

<표 11> 외부효과 종속적 모형의 예측력 (MSE) (로짓함수)

	n=20	IID	BP	NSBP	n=40	IID	BP	NSBP
$\gamma=0.5$	0.322	0.200	0.116		0.287	0.209	0.115	
단조감소	-	37.7%	64.1%		-	27.3%	60.1%	
$\gamma=0$	0.312	0.193	0.195		0.335	0.197	0.197	
단조감소	-	38.0%	37.5%		-	41.3%	41.3%	
$\gamma=-0.5$	0.291	0.200	0.117		0.264	0.206	0.117	
단조감소	-	31.5%	59.8%		-	21.8%	55.8%	
$\gamma=0.5$	0.305	0.187	0.141		0.337	0.194	0.150	
단조감소	-	38.8%	53.7%		-	42.3%	55.4%	
$\gamma=0$	0.305	0.191	0.192		0.335	0.198	0.198	
단조감소	-	37.4%	36.9%		-	41.1%	41.0%	
$\gamma=-0.5$	0.307	0.189	0.147		0.338	0.197	0.152	
단조감소	-	38.2%	52.1%		-	41.8%	55.0%	

(*) % : IID모형의 MSE에 대한 감소분

<표 12> 외부효과 종속적 모형의 예측력 (MSE) (볼록함수)

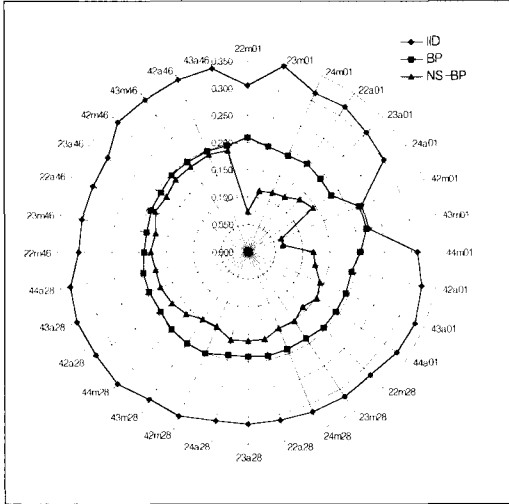
	n=20	IID	BP	NSBP	n=40	IID	BP	NSBP
$\gamma=0.3$	0.260	0.195	0.112		0.233	0.204	0.113	
단조감소	-	24.8%	56.9%		-	12.3%	51.3%	
$\gamma=0.5$	0.230	0.189	0.106		0.208	0.198	0.107	
단조감소	-	18.0%	53.9%		-	4.5%	48.4%	
$\gamma=-0.7$	0.213	0.183	0.102		0.198	0.193	0.102	
단조감소	-	14.2%	52.1%		-	2.9%	48.6%	
$\gamma=0.3$	0.304	0.189	0.138		0.334	0.194	0.145	
단조감소	-	37.9%	54.6%		-	41.7%	56.5%	
$\gamma=0.5$	0.291	0.189	0.139		0.310	0.194	0.143	
단조감소	-	35.2%	52.3%		-	37.5%	53.9%	
$\gamma=-0.7$	0.300	0.185	0.158		0.289	0.192	0.141	
단조감소	-	38.2%	47.5%		-	33.5%	51.2%	

(*) % : IID모형의 MSE에 대한 감소분

<표 13> 외부효과 종속적 모형의 예측력 (MSE) (오목함수)

	n=20	IID	BP	NSBP	n=40	IID	BP	NSBP
$\gamma=0.3$	0.321	0.195	0.155		0.334	0.201	0.159	
단조감소	-	39.3%	51.6%		-	40.0%	52.5%	
$\gamma=0.5$	0.329	0.193	0.156		0.357	0.199	0.159	
단조감소	-	41.2%	52.7%		-	44.2%	55.5%	
$\gamma=-0.7$	0.333	0.192	0.156		0.360	0.198	0.159	
단조감소	-	42.2%	53.1%		-	45.0%	55.8%	
$\gamma=0.3$	0.313	0.190	0.161		0.343	0.195	0.170	
단조감소	-	39.3%	48.4%		-	43.2%	50.3%	
$\gamma=0.5$	0.309	0.187	0.159		0.338	0.193	0.168	
단조감소	-	39.3%	48.3%		-	42.9%	50.1%	
$\gamma=-0.7$	0.300	0.185	0.158		0.326	0.191	0.167	
단조감소	-	38.2%	47.5%		-	41.3%	48.8%	

(*) % : IID모형의 MSE에 대한 감소분



[그림 6] 모형별 평균제곱오차(MSE)의 변화 (계단함수)

$$(ijxkl) : i = \begin{cases} 2, & \text{for } n=20. \\ 4, & \text{for } n=40' \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 2, & \text{for 2단계} \\ 3, & \text{for 3단계;} \\ 4, & \text{for 4단계} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} m, & \text{for 단조 공변량.} \\ a, & \text{for 교대 공변량'} \end{cases}$$

$$kl = \begin{cases} 01, & \text{for 확률 범위 (0, 1)} \\ 28, & \text{for 확률 범위 (.2, .8);} \\ 46, & \text{for 확률 범위 (.4, .6)} \end{cases}$$

6. 결론 및 추후 연구 방향

본 논문에서 불완전수리 모형을 확장한 수리 모형인 공변량 종속적 수리 모형을 제시하였다. 즉, 수리 가능한 시스템의 예방보수 정책에 자주 인용되는 BP 불완전수리 모형의 잠재성을 충분히 살린 개선 모형을 발견적·이론적으로 찾아내고 실제 고장자료로부터 모형을 추정하는 통계적 방법을 개발하였다. 이 모형은 수리시 외부요인에 의한 수리효과를 반영함으로써 매 수리시점마다 완전수리 확률이 공변량의 함수로 표현되어 외부효과에 대한 종속성을 반영할 수 있게 한다. 공변량 종속적 수리 모형의 완전수리 확률의 형태에 따라 여러 가

지 현실적 상황의 외부효과 반영이 가능하며, 기존의 신뢰성 모형을 포함하는 좀 더 유연한 신뢰성 모형이라 할 수 있다.

또한 위에서 제시한 모형에 대하여 수리후 시스템의 상태에 대한 자료가 주어지지 않는 상황인 불완전 자료 하에서 EM 알고리즘을 이용한 모수 추정 절차를 제시하였다. 또한 다양한 실험 예제를 통하여 추정의 정확성 및 모형의 타당성을 검증하여 보았다.

본 연구의 결과는 BP 모형의 미비점을 보완하여 시스템의 유지·보수 및 개선에 있어서 보다 효과적인 적용 방법이 제시될 수 있을 것이다. 수리효과에 미치는 공변량의 효과를 체계적으로 반영하여 시스템 신뢰도 평가를 보다 정확히 수행하게 될 것이며 수리가 반복됨에 따라 변하는 시스템 고장 시간간의 종속성을 규명할 수 있을 것이다. 즉 완전수리 확률을 동적인 함수로 모형화 함으로써 미래의 수리유형에 대한 예측력을 향상시킬 수 있고, 나아가 시스템의 다음 고장시간을 예측하는데 큰 도움을 줄 것으로 기대된다.

외부효과 종속적 수리 모형을 이용하여 공변량 간에 종속성이 발생하는 상황하에서의 최적 보수 정책 결정을 위한 연구가 더 필요하다고 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] 임태진 "Brown-Proschan 불완전 PM 모형에서 완전 PM 확률의 추정", 「한국경영과학회지」, 제22권, 제4호(1996), pp.151-165.
- [2] Ascher, H. and Feingold, H. "Comments on 'Models for reliability of repaired equipment,'" *IEEE Trans. Reliability*, R-19, (1979), 119.
- [3] Ascher, H. and Feingold H., *Repairable Systems Reliability*, Marcel Dekker, Inc., 1984.
- [4] Avriel, M., *Nonlinear Programming: Ana-*

- lysis and Methods, Prentice-Hall.
- [5] Barlow, R. and Hunter, L. "Optimum preventive maintenance policies," *Operations Research*, Vol.8(1960), pp.90-100.
- [6] Block, H., Borges, W., and Savits, T. "Age dependent minimal repair," *Journal of Applied Probability*, 22(1985), pp.370-385.
- [7] Brown, M. and Proschan F. "Imperfect repair," *Journal of Applied Probability*, 20 (1983), pp.851-859.
- [8] Chan, J. K. and Shaw, L. "Modeling repairable system with failure rate on age and maintenance," *IEEE Trans. Reliability*, 42(1993), pp.566-571.
- [9] Cox, D. R. and Lewis P. A. W., *The Statistical Analysis of Series of Events*, John Wiley & Sons(1966).
- [10] Cox, D. R. "Regression models and life tables (with discussion)," *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 34(1972), pp.187-202.
- [11] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 39 (1977), pp.1-22.
- [12] Jayabalan, V. and Chaudhuri, D. "Cost optimization of maintenance scheduling for a system with assured reliability," *IEEE Trans. Reliability*, 41(1992), pp.21-25.
- [13] Kumar, D. and Klefsjo, B. "Proportional hazards model: a review," *Reliability Eng. and Systems Safety*, 44(1994), pp.177-188.
- [14] Lange, K. "A gradient algorithm locally equivalent to the EM algorithm," *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 57(1995), pp.425-437.
- [15] Malik, M. A. K. "Reliable preventive maintenance scheduling," *AIIE Trans.*, Vol.11 (1979), pp.221-228.
- [16] Lawless, J. F. "Statistical methods in reliability," *Technometrics*, 25(1983), pp.305-316.
- [17] Lawless, J. F. "Regression method for Poisson process data," *Journal of American Stat. Asso.*, 82(1987), pp.808-815
- [18] Lee, J. H. *Nonstationary Markov Switching Models of Exchange Rates; The Pound-Dollar Exchange Rate*, Ph. D Dissertation, University of Pennsylvania(1991).
- [19] Lim, T. J. "Estimating system reliability with fully masked data under Brown-Proschan imperfect repair model," *Reliability Eng. and Systems Safety*, 59(1998), pp.277-289.
- [20] Lie, C. H. and Chun, Y. H. "An algorithm for preventive maintenance policy," *IEEE Trans. Reliability*, 35(1986), pp.71-75.
- [21] Nelson, W. *Applied Life Data Analysis*, John Wiley & Sons(1982).
- [22] Proschan. F., "Theoretical explanation of observed decreasing failure rate," *Technometrics*, 5(1963), pp.375-383.
- [23] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. "Multivariate imperfect repair," *Operations Research*, 34, No.3(1986), pp.437-448.
- [24] Shin, I., Lim, T. J., and Lie, C. H. "Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit," *Reliability Eng. and Systems Safety*, 54, (1996), pp.1-10.
- [25] Whitaker, L. R. and Samaniego F. J. "Estimating the reliability of systems subject to imperfect repair," *Journal of American Stat. Asso.*, 84, No.405(1989), pp. 301-309.

[부록 1]

[보조정리 1] $pz(0, 1) \equiv 1$ 로 정의하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} E[Z_i h(B_i) | \underline{t}_n, \underline{x}_n; \theta_0] &= \\ \sum_{k=1}^i h(t_{i,k}) [pz(i-1, k) - pz(i, k+1)] & \\ \text{for } i \geq 1. & \quad (A.1) \end{aligned}$$

[증명]

$$\begin{aligned} i=1 \text{ 일 때, } E[Z_1 h(B_1) | \underline{t}_n, \underline{x}_n; \theta_0] &= \\ h(t_1) E[Z_1 | \underline{t}_n, \underline{x}_n; \theta_0] & \\ = h(t_1) \Pr(H_{1,1} | \underline{t}_n, \underline{x}_n; \theta_0). & \\ = h(t_{1,1}) [pz(0, 1) - pz(1, 2)]. & \end{aligned}$$

$i \geq 2$ 일 때, 수리유형 $Z_i = 0$ 인 경우의 기대값은 0이므로, $Z_i = 1$ 인 경우만 고려하면

$$\begin{aligned} E[Z_i h(B_i) | \underline{t}_n, \underline{x}_n; \theta_0] &= \\ \sum_{k=1}^i h(t_{i,k}) P_0(H_{i-1,k}, Z_i = 1 | \underline{t}_n, \underline{x}_n) & \\ = \sum_{k=1}^i h(t_{i,k}) \cdot [P_0(H_{i-1,k} | \underline{t}_n, \underline{x}_n) & \\ - P_0(H_{i-1,k}, Z_i = 0 | \underline{t}_n, \underline{x}_n)]. & \\ = \sum_{k=1}^i h(t_{i,k}) \cdot [pz(i-1, k) - pz(i, k+1)] & \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[부록 2]

[식 (15)의 증명]

$$\begin{aligned} fp(i, k) &= P_0(H_{i,k} | \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_i) \\ &= f_0(t_{i+1}, H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) / f_0(t_{i+1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i). \quad (A.2) \end{aligned}$$

위 식에서 분자 항은

$$\begin{aligned} f_0(t_{i+1}, H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) & \\ = P_0(H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) f_0(t_{i+1} | H_{i,k}, \underline{t}_i, \underline{x}_i) & \quad (A.3) \end{aligned}$$

$k = 1$ 인 경우에는

$$\begin{aligned} f_0(t_{i+1}, Z_i = 1 | \underline{t}_i, \underline{x}_i) & \\ = P_0(Z_i = 1 | \underline{t}_i, \underline{x}_i) f_0(t_{i+1} | Z_i = 1, \underline{t}_i, \underline{x}_i) & \\ = p_0(x_i) w_0(t_{i+1}) & \quad (A.4) \end{aligned}$$

$k \geq 2$ 인 경우에는

$$\begin{aligned} P_0(H_{i,k} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) &= P_0(Z_i = 0, H_{i-1, k-1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) \\ &= P_0(Z_i = 0 | \underline{t}_i, \underline{x}_i) P_0(H_{i-1, k-1} | \underline{t}_i, \underline{x}_i) \\ &= [1 - p_0(x_i)] fp(i-1, k-1) \quad (A.5) \end{aligned}$$

수리이력이 $H_{i,k}$ 이면 $(i+1)$ 번째 고장 직전까지 실질적 가동시간은 $t_{i, k-1}$ 이 되므로, 식 (A.3)의 두 번째 항은

$$f_0(t_{i+1} | H_{i,k}, \underline{t}_i, \underline{x}_i) = w_0(t_{i+1} | t_{i, k-1}) \quad \blacksquare$$

[부록 3]

[식 (16), (17)의 증명]

먼저 식 (17)이 성립함을 보인다.

$i = n-1$ 일 때는 정의에 의하여

$$\begin{aligned} pz(n-1, k) &= P_0(H_{n-1, k} | \underline{t}_n, \underline{x}_{n-1}) \\ &= fp(n-1, k), \quad (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

$i = n-2$ 일 때는

$$\begin{aligned} pz(n-2, k) &= f_0(t_n, H_{n-2, k} | \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) \\ & \quad / f_0(t_n | \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) \\ &= P_0(H_{n-2, k} | \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) \\ & \quad f_0(t_n | H_{n-2, k}, \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) \\ & \quad / f_0(t_n | \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) = fp(n-2, k) f_0(t_n | \\ & \quad H_{n-2, k}, \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) / \\ & \quad f_0(t_n | \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) pz(n-2, k) \\ &= f_0(t_n, H_{n-2, k} | \underline{t}_{n-1}, \underline{x}_{n-1}) \end{aligned}$$

$i \leq n-3$ 일 때는

$$\begin{aligned} pz(i, k) &= P_0(H_{i,k} | \underline{t}_n, \underline{x}_{n-1}) \\ &= f_0(t_n, \dots, t_{i+2}, H_{i,k} | \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_{n-1}) \\ & \quad / f_0(t_n, \dots, t_{i+2} | \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_{n-1}) \\ &= P_0(H_{i,k} | \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_{n-1}) \\ & \quad f_0(t_n, \dots, t_{i+2} | H_{i,k}, \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_{n-1}) / \\ & \quad f_0(t_n, \dots, t_{i+2} | \underline{t}_{i+1}, \underline{x}_{n-1}) \\ &= fp(i, k) dz(i, k) / D \end{aligned}$$

식 (16)은 다음과 같이 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 dz(i, k) &= f_0(t_n, \dots, t_{i+2} \mid H_{i,k}, \underline{t_{i+1}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &= \sum_{j=0}^1 f_0(t_n, \dots, t_{i+2}, \\
 &\quad Z_{i+1}=j \mid H_{i,k}, \underline{t_{i+1}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &= \sum_{j=0}^1 P_0(Z_{i+1}=j \mid H_{i,k}, \underline{t_{i+1}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &\quad f_0(t_n, \dots, t_{i+2} \mid Z_{i+1}=j, H_{i,k}, \underline{t_{i+1}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &= p_0(x_{i+1})f_0(t_{i+2} \mid Z_{i+1}=1, H_{i,k}, \underline{t_{i+1}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &\quad f_0(t_n, \dots, t_{i+3} \mid Z_{i+1}=1, A_{i,k}, \underline{t_{i+2}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &\quad + [1 - p_0(x_{i+1})]f_0(t_{i+2} \mid Z_{i+1}=0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &H_{i,k}, \underline{t_{i+1}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &\quad f_0(t_n, \dots, t_{i+3} \mid Z_{i+1}=0, A_{i,k}, \underline{t_{i+2}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &= p_0(x_{i+1})w_0(t_{i+2})f_0(t_n, \dots, t_{i+3} \mid Z_{i+1}=1, \\
 &\quad \underline{t_{i+2}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &\quad + [1 - p_0(x_{i+1})]w_0(t_{i+2} \mid t_{i+1,k}) \\
 &\quad f_0(t_n, \dots, t_{i+3} \mid H_{i+1,k+1}, \underline{t_{i+2}}, \underline{x_{n-1}}) \\
 &= p_0(x_{i+1})w_0(t_{i+2})dz(i+1, 1) \\
 &\quad + [1 - p_0(x_{i+1})]w_0(t_{i+2} \mid t_{i+1,k}) \\
 &\quad dz(i+1, k+1)
 \end{aligned}$$