

본 연구는 1997년도 교육부 학술 연구조성비(ME97-D-08)에 의하여 연구되었음.

H_{∞} 제어기법에 의한 연속 냉간 압연시스템의 두께 제어

김 종 식* , 김 승 수**

Thickness Control of Tandem Cold Mills Using H_{∞} Control Techniques

Jong Shik Kim* , Sung Su Kim**

ABSTRACT

An H_{∞} controller with a roll eccentricity filter is proposed to alleviate the effect of entry thickness variation and roll eccentricity occurred in rolling stands themselves of tandem cold mills. A robust controller to the disturbances is designed by H_{∞} control techniques, which can reflect the input direction of disturbances and the knowledge of disturbance spectrum in the frequency domain. First, fundamental problems in tandem cold mills such as process transport delay inherent in the exit thickness measurement and the feedforward loading of roll eccentricity signals on the exit thickness be overcome by the roll eccentricity filtering and the compensation for the error of gaugemeter thickness estimator. And non-standard H_{∞} control problem caused by the selection of weighting function having poles on the $j\omega$ -axis is discussed. The resultant controller composed by an H_{∞} controller and an estimator for the roll eccentricity is evaluated through computer simulations. The effectiveness of the proposed control method is compared to that of the conventional LQ controller method and a feedforward controller for the roll eccentricity, which has been already studied.

Key Words : Non-standard H_{∞} Control(비표준 H_{∞} 제어), Roll Eccentricity Filter(롤편심필터), Thickness Control(두께 제어), Tandem Cold Mills(연속 냉간 압연시스템)

1. 서 론

연속 냉간 압연 제어시스템의 설계목적은 여러 외란이 존재하더라도 압연 스탠드간 판장력을 적정수준으로 유지하면서 출측 판두께의 정밀도를 향상시키고자 하는 데 있다. 판장력과 판두께를 교란시키는 주된 외란요소는 우

선 열간 압연모재 또는/그리고 전방 스탠드들에서 야기되는 입측 판두께 변동, 그리고 백업롤의 비원통형상 및 축과의 중심불일치 등으로 인한 롤편심이다. 특히, 압연 스탠드 자체에서 야기되는 측정 불가능한 롤편심의 효과는 압연 판두께 제어를 일반적으로 이용되고 있는 기존의 게이지미터(gaugemeter)방식 자동 두께 제어(automatic

* 부산대학교 기계공학부
 ** 부산대학교 기계기술연구소

gauge control)에서는 이의 악영향을 오히려 증폭시킬 수 있는 특별한 문제이다.

연속 냉간 압연시스템은 스탠드간 판장력을 매개로 하여 인접 스탠드와 상호간섭을 받는 특성을 가지며, 또한 각 압연 스탠드 사이에는 압연재의 판속도에 따른 시간지연이 존재한다. 이러한 특성 때문에 연속 냉간 압연시스템 전체를 하나의 제어대상으로 플랜트 모델을 구축하여 제어기를 설계하는 것은 대단히 어려운 일이다. 따라서 각 압연 스탠드를 완전히 독립된 하나의 블록으로 취급하기 위한 블록화 비간섭제어(blocked non-interacting control)⁽¹⁾가 제안되었다. 그러나 스탠드간 간섭요소를 완전히 제거하기 위해서는 상태변수와 같은 개수의 구동기가 필요하며, 복잡한 압연 플랜트에 대한 불가피한 모델링 오차를 감안하면 간섭항의 완전한 제거는 실질적으로는 대단히 어렵다. 이런 이유로 모든 압연 스탠드에 대한 분산제어 수행시 오히려 전체 압연시스템의 안정성을 보장할 수 없다.

기존의 대부분의 연속 냉간 압연현장에서는 비간섭 제어와 상관없이 전방 첫번째 또는/그리고 마지막 스탠드 등의 일부 압연 스탠드에 대해서만 분산제어를 수행하고 있다. 그리고 출측두께는 롤갭으로, 장력은 롤속도로 각각 분리하여 단일입출력 형태로 제어하고 있다. 그러나 실제의 냉간 압연시스템에서는 판두께와 장력이 강한 연성을 갖기 때문에 이들의 통합제어가 자연스러우며, 보다 좋은 시스템 성능을 기대할 수 있다. 1980년대 중반부터 LQ 최적 제어이론 등에 근거하여 냉간 압연시스템의 다변수 제어에 관한 연구⁽²⁾가 시도되었다. 그러나 고려된 압연 모델은 매우 단순화된 모델로서 구동기 동역학이 무시되고 작동중인 롤 스탠드 자체의 롤편심 외란 등이 고려되지 않았다. 한편 1970년대 이후 압연 판재의 두께 허용공차가 매우 엄격해짐에 따라 관심이 높아진 롤편심에 대한 연구^(3,4,5,6)는 주로 롤편심 추정을 이용한 출측두께 추정오차의 보정 및 피드포워드 롤편심 제어, 그리고 최근에는 롤편심에 대한 반복제어(repetitive control) 기법 등의 적용사례⁽⁷⁾를 볼 수 있다. 특히 압연 시스템에 대한 반복 제어기법은 아주 단순화된 단일입출력 압연모델을 대상으로 하였다. 또한, 롤편심이 전위 스탠드의 롤에서 기인된, 제어대상 스탠드 측면에서는 입측 판두께 변동으로 고려된 경우로서, 이는 제어대상 스탠드 자체의 롤편심과는 다른 문제이다. 한편 다변수 시스템에 대한 반복 제어기법⁽⁸⁾은 안정도 해석 및 설계과정이 일반화되었다고는 하지만, 출력측으로 반영되는 외란(롤편심) 그

리고 주요 출력신호(출측 두께변동)의 측정 시간지연 등 복잡한 특성을 갖는 다변수 압연 시스템에 적용하기에는 이론적 제약은 물론 설계과정에 과도한 시행착오를 수반해야 하는 어려움이 있다.

본 논문에서는 실공정 데이터를 근거로 한 다변수 냉간 압연모델에 대하여 입측두께 변동뿐만 아니라 당 압연스탠드 자체에서 야기되는 롤편심 모두를 외란입력으로 고려한다. 우선 출력측으로 반영되는 롤편심 신호 성분의 추정을 통해 게이지미터 두께 추정오차를 보정하며, 이는 출측두께 측정의 본질적인 공정 시간지연을 피할 수 있다. 그리고 압연 플랜트의 실제 외란들의 입력방법 및 주파수 특성을 효과적으로 반영할 수 있는 H_{∞} 외란억압 다변수 제어를 설계한다. 한편 기준입력 또는 외란의 주파수를 알고 있는 경우 정상상태 오차가 없고 파라미터 변동에 강인한 제어를 설계하고자 할 때 일반적으로 널리 알려진 내부 모델 원리(internal model principal)⁽⁹⁾를 이용한다. 본 논문에서는 이 내부 모델 원리를 H_{∞} 제어에 적용하기 위한 조건 및 설계방법을 해석적으로 제시한다. 그리고 압연 플랜트에 대해 제안한 H_{∞} 설계방법과 앞서 연구된 LQ 제어 및 추정된 롤편심 신호를 이용한 피드포워드 보상방법에 의한 결과들을 시뮬레이션을 통해 비교 검토하고, 그 유용성을 확인한다.

2. 다변수 냉간 압연모델

압연 판두께 제어공정은 Fig. 1에 표시된 바와 같이 압연스탠드 사이를 통과하는 판재의 두께를 축소시키는 생

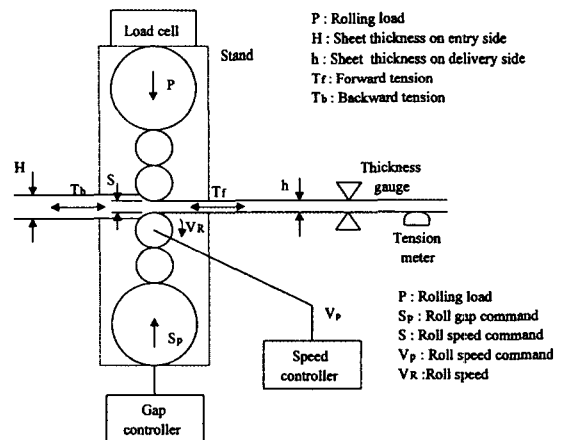


Fig. 1 Rolling process of a mill stand

산공정으로서, 이는 출측 판두께가 정한 기준값에 대해 가능한 한 오차가 작도록 롤갭과 롤속도 등의 제어입력을 적절히 조절하는 것이다.

연속 냉간 압연시스템의 모델링을 위해서는, 우선 정해진 압연생산계획, 즉 압연될 모재의 판두께와 판폭, 최종 스탠드에서 요구되는 출측 판두께와 판속도에 대해 각 스탠드의 압하율을 결정하고, 이에 따라 각 압연스탠드의 압연인자들에 대한 작동점(롤속도, 롤갭, 압연하중, 스탠드간 장력 등의 set-up 초기조건)이 선정되어야 한다.

그리고 압연시스템에 대한 선형모델을 얻기 위해서는 압연공정에 관한 비선형식들(압연하중 및 선진을 계산식)에서 관련인자들의 미소변동에 의한 영향계수 연산이 요구된다. 압연 공정에 관한 기본 방정식들을 요약하면 다음과 같다.

1) 압연하중 및 선진을 계산식

압연시 발생하는 압하력 및 선진은 입출측 판두께와 전후방 장력 등에 영향을 받는다. 이를 나타내는 대표적인 경험식으로서 각각 Hill의 압연하중 이론식⁽¹⁰⁾과 Bland와 Ford의 선진율 식⁽¹¹⁾이 이용되며, 이들 식을 선형화하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta P_{Ai} = \frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta H_i} \Delta H_i + \frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta h_i} \Delta h_i + \frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta T_{bi}} \Delta T_{bi} + \frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta T_{fi}} \Delta T_{fi} \quad (1)$$

$$\Delta f_i = \frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta H_i} \Delta H_i + \frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta h_i} \Delta h_i + \frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta T_{bi}} \Delta T_{bi} + \frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta T_{fi}} \Delta T_{fi} \quad (2)$$

2) 압하력 측정 및 구동기 동역학식

롤 스탠드에서 발생된 압하력을 측정하기 위한 Load cell이 부착된 하우징(housing), 작업롤의 간격을 조절하기 위한 유압식 구동기, 그리고 작업롤 속도 제어장치의 동역학 식들은 각각 다음과 같이 근사화될 수 있다.

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{T_{pi}} (-P_i + P_{Ai}) \quad (3)$$

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{T_{si}} (-S_i + S_{pi}) \quad (4)$$

$$\frac{dV_{Ri}}{dt} = \frac{1}{T_{vi}} (-V_{Ri} + V_{pi}) \quad (5)$$

여기서 T_{pi} , T_{si} , T_{vi} 는 각각 하우징, 압하장치, 롤속

도 제어장치의 시정수이다.

3) 체적속도(mass flow) 일정식

냉간 압연공정시 소재의 폭 변동량은 무시할 수 있으므로, 입측 판속도 V_{ei} 와 출측 판속도 V_{oi} 는 압연공정의 체적속도 일정법칙에 의해 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$H_i V_{ei} = h_i V_{oi} \quad (6)$$

4) 판속도 식

출측 판속도 V_{oi} 는 다음과 같이 롤속도 V_{Ri} 와 선진율 f_i 로 표현된다.

$$V_{oi} = (1 + f_i) V_{Ri} \quad (7)$$

5) 출측 판두께식

각 스탠드 출측에서의 판두께 h_i 는 무부하시 롤갭 S_i , 압연하중 P_i 에 의한 압연시스템의 탄성변형량 그리고 롤 편심량 e_i 의 합으로 표시된다.

$$h_i = S_i + \frac{P_i}{M_i} + e_i \quad (8)$$

여기서, M_i 는 Mill의 탄성계수이다.

6) 장력식

각 스탠드 사이에 압연중인 판재에 작용하는 장력 T_{bi} 는 판속도의 차에 의해 결정된다.

$$\frac{dT_{bi}}{dt} = \frac{EbH_i}{L} (V_{ei} - V_{oi-1}) \quad (9)$$

여기서, E 는 Young 룰, b 는 판폭, L 은 스탠드간 거리이다.

위 식들을 미소 증분식으로 나타낸 후, 미분방정식 (3), (4), (5), (9)에 대해 나머지 식들을 종합하면 연속 냉간 압연공정을 다음과 같은 상태공간 모델식으로 표현할 수 있다. 여기서는 본 논문의 목적상 인접 스탠드간의 간섭항은 비간섭 제어(1)에 의해 소거되었다고 가정하고, 독립된 압연 스탠드에 대한 모델식으로 간략화하였다.

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + E_i w_i \quad (10)$$

$$y_i = C_i x_i + F_i w_i \quad (11)$$

여기서, i 는 스탠드의 번호를 의미하며, 시스템행렬 A_i , B_i , C_i , E_i , F_i 의 각 요소들을 계산하는 식들은 부록에 표시

하였다. 그리고 압연 플랜트의 상태벡터 x_i , 제어입력벡터 u_i 및 외란입력벡터 w_i 그리고 주요 제어변수인 출력벡터 y_i 는 각각 다음과 같다.

$$x_i = [\Delta S_i \ \Delta P_i \ \Delta V_{Ri} \ \Delta T_{bi}]^T, \quad u_i = [\Delta S_{pi} \ \Delta V_{pi}]^T, \\ w_i = [\Delta H_i \ e_i]^T, \quad y_i = [\Delta h_i \ \Delta T_{bi}]^T,$$

출력방정식 (11)에 표시된 바와 같이 측정 불가능한 롤편심은 주요 제어변수인 출측두께 변동에 직달 외란항으로 작용한다. 그리고 출측두께 센서는 롤 바이트(roll bite)에서 적당거리 떨어진 위치에 설치되기 때문에 이를 측정할 때 출측두께 신호의 공정 수송 지연(process transport delay)을 피할 수 없게 된다. 이와 같이 냉간 압연 제어시스템에서 압연스탠드 자체의 롤편심이 외란 입력으로 고려되는 경우, 흔히 참고문헌⁽⁷⁾에서와 같이 시간 지연문제를 해결하기 위해 이용되는 Smith 예측기의 적용을 근본적으로 어렵게 한다⁽¹²⁾.

3. 롤편심을 고려한 게이지미터(gaugemeter) 두께 추정

압연공정에서 압연 롤로 유입되는 판재의 불균일성, 특히 판두께 및 재료의 경도 변동은 롤하중의 변화를 일으킨다. 그리고 압연스탠드는 탄성적이고, 롤 또한 하중에 의해 변형되기 때문에 압연하중의 변화는 실질적인 롤갭의 변화를 가져다 주며, 결국 이는 출측 판두께 변동으로 나타나게 된다. 게이지미터 두께오차 추정기법은 롤하중과 롤갭의 측정량으로부터 동시의 출측 판두께를 추정하는 것으로서, 이는 출측두께의 직접 측정시 본질적인 공정 시간지연을 피할 수 있으나, 중대한 롤편심이 존재하는 경우 심각한 추정오차를 야기한다. 우선 출측 판두께 식 (8)로부터 측정 불가능한 롤편심을 무시하면 다음과 같은 출측 두께변동의 추정치 $\Delta \hat{h}_g$ 를 얻을 수 있다.

$$\Delta \hat{h}_g = \frac{1}{M} \Delta P + \Delta S \quad (12)$$

만일 $\Delta \hat{h}_g$ 를 이용한 고-게인(high-gain) 피드백 제어 시스템을 구성하면 롤편심 이외의 외란효과는 줄일 수 있다. 그러나 롤편심 효과는 압연하중의 증감과는 독립적으로 실제적인 작업롤의 간격도 변화시킨다. 이 경우 롤편심은 실제적인 출측두께에 측정잡음의 효과를 주게 된다. 따라서 롤편심이 배제된 출측두께의 추정신호 $\Delta \hat{h}_g$ 를 이

용한 고-게인 피드백은 오히려 롤편심의 악영향을 증폭시킬 수 있다.

그래서 이 절에서는 전형적인 게이지미터 기법과 관련하여 출측 두께의 추정오차를 해결할 수 있는 방법을 제시하기로 한다. 롤하중과 롤갭 그리고 출측두께 등의 다른 측정신호를 이용하여 측정불가능한 롤편심 신호를 추정한다. 롤편심 추정 신호 \hat{e}^* 는 식 (8)로부터 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{e}^* = \Delta h - \frac{1}{M} \Delta P - \Delta S \quad (13)$$

실제 측정되는 출측두께 변동량 $\Delta h_m(t)$ 의 시간지연 τ_d 를 고려하면, 시간 $(t - \tau_d)$ 에서의 롤편심 추정신호 $\hat{e}^*(t - \tau_d)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{e}^*(t - \tau_d) = \Delta h_m(t) - \frac{1}{M} \Delta P(t - \tau_d) - \Delta S(t - \tau_d) \quad (14)$$

여기서, ΔP 와 ΔS 의 과거 신호들은 저장되어 있다고 가정한다. 이 때 롤편심의 주기 τ 를 알고, 또한 일반적으로 $\tau > \tau_d$ 이면 다음의 주기성을 이용하여 현재 시간의 롤편심 신호를 추정할 수 있다.

$$\hat{e}(t) = \hat{e}(t - \tau) \quad (15)$$

그러나 식 (13)에서 얻어지는 실제의 롤편심 신호는 일반적으로 식 (16)과 같은 여러 개의 주기를 가지는 조화 성분들과 측정잡음 $n(t)$ 의 합으로 표현할 수 있다. 식 (15)로 표현되는 주기적인 성질을 이용하기 위해서는 \hat{e}^* 에서 서로 다른 주기를 가지는 롤편심 성분 e_j 를 각각 분리하여 추정할 필요가 있다.

$$\hat{e}^* = \sum_{j=1}^p e_j + n = \sum_{j=1}^p G_j \sin(\omega_j t + \phi_j) + n(t) \quad (16)$$

위의 각 조화성분 e_j 에서 주파수 ω_j 를 제외한 크기 G_j , 위상 ϕ_j 는 알지 못하며, 롤편심 신호는 비정상적(non-stationary)이다.

이와 같이 비정상적이며 주기적인 롤편심 신호의 추정을 위한 최적 필터로서 Goodwin⁽¹³⁾이 제안한 시불변 필터를 사용하기로 한다. 이에 대한 구체적인 설계방법은

참고문헌⁽⁶⁾에 제시되어 있다. 여기서는 롤편심 신호의 추정을 위해 설계된 최적필터의 펄스 전달함수만을 명시하기로 한다.

$$\hat{e}_j(z) = \frac{\epsilon C_j z - \epsilon}{z^2 - (2 - \epsilon)C_j z + (1 - \epsilon)} \hat{e}_j^*(z) \quad (17)$$

여기서 C_j 는 $\cos \omega_j T$ 를 나타내며, ω_j 는 어떤 한 조화성분에 대한 주파수이고, T 는 샘플링 시간이다. 그리고 ϵ 는 설계 파라미터 ($0 < \epsilon < 1$)로서 추정하고자 하는 주기적 신호의 변화에 대한 추정속도 그리고 롤편심 주기의 미소변동에 대한 정현파 추정신호의 크기 및 위상차의 감도를 결정한다. 이 필터의 주파수 응답특성은 롤편심의 조화성분 e_j 의 주파수 ω_j 에서 정확하게 크기 1 이고, 위상차 0 이나, ω_j 와 다른 주파수역에서는 저-게인(low-gain)을 갖는다.

식 (16)의 각 롤편심 성분에 대한 필터(식 (17))를 구성하고, 각각의 주기에 대응한 필터의 출력신호들에 대해 식 (15)를 이용하면, 다음과 같이 전체 롤편심 $\hat{e}(t)$ 및 롤편심이 보상된 출측 두께변동 $\Delta \hat{h}(t)$ 를 추정할 수 있다.

$$\hat{e}(t) = \sum_{j=1}^p \hat{e}_j(t - \tau_j) \quad (18)$$

$$\Delta \hat{h}(t) = \frac{1}{M} \Delta P(t) + \Delta S(t) + \hat{e}(t) \quad (19)$$

그리고 Fig. 2는 롤편심 및 출측두께의 실시간 신호를 온-라인에서 추정하는 방법을 간략화하여 나타낸 블록선도이다.

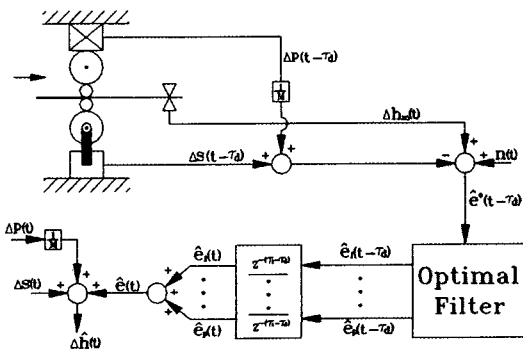


Fig. 2 Eccentricity estimator and exit thickness predictor

4. H_∞ 외란제거 제어

본 절에서는 앞 절에서 언급한 롤편심이 고려된 출측 두께변동의 추정이 가능한 상태에서, 냉간 압연시스템의 강인한 외란제거 H_∞ 제어기 설계를 위한 피드백 제어시스템을 제안한다. Fig. 3은 H_∞ 제어기 설계를 위한 무게함수를 포함한 일반화된 플랜트에 대한 피드백 제어시스템의 구조이다.

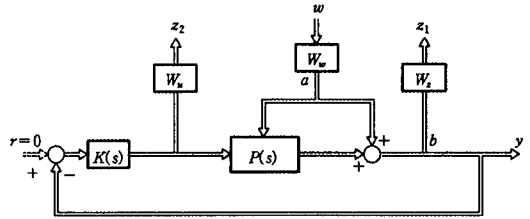


Fig. 3 Feedback control system for the generalized plant with weighting functions

외란제거 제어목적은 Fig. 3에서 a점을 통해 들어가는 외란의 영향이 b점에서 가능한 한 나타나지 않도록 제어기 $K(s)$ 를 설계하는 것이다. 여기서 무게함수 W_u 는 외란 입력의 스펙트럼, 특히 롤 편심의 일정 주기의 조화신호를 고려하여 선정하고, 무게함수 W_w 는 강인-안정성 또는 제어입력의 적절한 제한을 고려하여 선정한다. 그리고 무게함수 W_z 는 저주파 입력에 대한 외란제거 성능을 고려하여 선정한다. 그리고 $W_u \in RH_\infty$, $W_w \in RH_\infty$, $W_z \in RH_\infty$ 및 압연 플랜트모델 P 를 각각 다음과 같은 상태공간 모델로 가정하기로 한다.

$$W_u = \begin{bmatrix} A_u & B_u \\ C_u & D_u \end{bmatrix}, \quad W_w = \begin{bmatrix} A_w & B_w \\ C_w & D_w \end{bmatrix},$$

$$W_z = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ C_z & D_z \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} A_p & [E_p & B_p] \\ C_p & [F_p & 0] \end{bmatrix},$$

이 때, 일반화된 플랜트 모델 $G(s)$ 는 다음과 같다.

$$G(s) \equiv \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [W_z(I+P)W_w] & [W_z P] \\ 0 & [W_u] \\ (I+P)W_w & P \end{bmatrix} \quad (20)$$

그리고 이를 상태공간 모델로 표현하면 다음과 같다.

$$G(s) \equiv \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$= \begin{bmatrix} A_p & 0 & E_p C_w & 0 & E_p D_w & B_p \\ B_z C_p & A_z & B_z F_p C_w & 0 & B_z F_p D_w & B_u \\ 0 & 0 & A_w & 0 & B_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_u & 0 & B_u \\ D_z C_p & C_z & D_z F_p C_w & 0 & D_z F_p D_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_u & 0 & D_u \\ C_p & 0 & F_p C_w & 0 & F_p D_w & 0 \end{bmatrix}$$

만일 무계함수 W_w, W_z 가 허수축상의 극점을 가지면, 이는 표준 H_∞ 제어문제⁽¹⁴⁾에서 안정화 제여기가 보장되기 위한 필요조건인 일반화된 플랜트의 가안정성 또는/그리고 가검출성이 만족되지 않는다.

4.1 비표준 H_∞ 제어문제

일반적으로 제어시스템 설계시 정상상태 오차가 없고 파라미터 변동에 강한 제어시스템의 설계가 요구된다. 따라서 H_∞ 제어기 설계에서도 마찬가지이다. 이를 위해서는 설계파라미터인 무계함수에 허수축상의 극점을 포함시킨 비표준 H_∞ 제어문제로 해결할 수 있다. 이 경우에는 표준 H_∞ 제어문제의 전제조건을 충족시키지 못한다.

우선, 실질 안정성(플랜트 $G_{22}(s)$ 와 제어기 $K(s)$ 로 구성되는 폐루프시스템(G_{22}, K)가 내부안정)을 확보한 상태에서

$$G_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \in RH_\infty \quad (22)$$

$$\|G_{zw}\|_\infty < 1 \quad (23)$$

즉, G_{zw} 를 안정화하여 H_∞ 노음을 1보다 작게 하는 제어기 $K(s)$ 를 설계하는 것이 목적이다.

Fig. 4는 w 혹은 z 에 직접 결합된 무계함수 $W_w(s), W_z(s)$ 의 어느쪽인가에 허수축상의 극점을 갖는 일반화된 플랜트를 나타낸 것이다. 단, 점선으로 싸인 부분의 결선상태, 즉 무계함수가 실제 제어대상 $G_{22}(s)$ 에 연결되는

위치는 특별히 지정할 수 없으며, 나중에 서술할 가정을 충족시키면 된다.

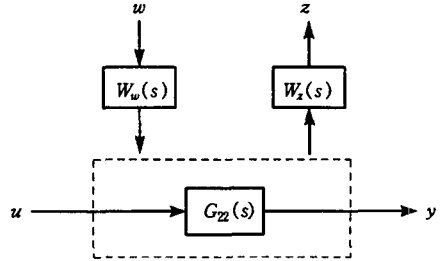


Fig. 4 Weightings W_w or W_z having poles on $j\omega$ axis

허수축상의 극점을 갖는 W_w 또는 W_z 에 대해서 우선, $G_{zw} \in RH_\infty$ 를 만족하기 위해서는 W_w 와 W_z 의 허수축 모드 A_w 및 A_z 는 G_{zw} 의 영점에서 상쇄되어 각각 z 로부터 불가관측, 그리고 w 로부터 불가제어가 되어야만 한다. 그러므로 설계하려고 하는 제어기 $K(s)$ 와는 별도로 $G_{zw} \in RH_\infty$ 가 가능하기 위한 일반화된 플랜트 조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다. 여기서는 외부입력에 대한 무계함수 W_w 에 허수축 모드가 있을 경우만 언급하고, W_z 의 경우는 전자의 경우와 듀얼(dual)형태이다.

정리 : W_w 에 허수축상의 모드 A_w 가 있을 경우 $G_{zw} \in RH_\infty$ 가 되기 위해서는

$$1. (A - B_2 D_{12}^+ C_1)V = VA_w, \quad D_{12}^+ C_1 V = 0 \quad (24)$$

를 충족시키는 열 플랭크 V 가 존재해야 한다. 즉, A_w 는 $G_{12}(s)$ 의 영점 모드가 될 필요가 있다. 여기서, D_{12} 의 의사역행렬 D_{12}^+ 및 정규 직교성분 D_{12}^\perp 는 다음과 같이 정의된다.⁽¹⁴⁾

$$D_{12}^+ = (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T, \quad (D_{12}^\perp)^T D_{12}^\perp = I - D_{12} D_{12}^+$$

2. A_w 가 (A, C_2) 의 가관측 모드라면 식 (24)와 함께

$$C_2 V = 0 \quad (25)$$

이 성립하면 $G_{zw} \in RH_\infty$ 로 하는 제어기 $K(s)$ 는 A_w 를 실제 모드(가제어, 가관측 모드)로서 갖게 된다.

위 정리에서 식 (24)는 앞서 언급한 대로 불안정한 모드 A_w 가 z 의 불가관측 모드가 되기 위한 조건이며, 이 조

건 하에서도 H_∞ 제어문제를 풀 수는 있다. 그러나 무계함수를 포함한 일반화된 플랜트에서 불안정한 모드(허수축 모드 포함)의 상쇄가 있는 경우도(이 경우 어떠한 제어기로도 내부안정이 될 수 없다) 이 조건을 만족시키므로 식 (25)는 이러한 경우를 배제한 것이다. 즉, A_w 가 내부모델로서 제어기 $K(s)$ 에 나타나기 위한 충분조건이다. 위 정리는 G_w 의 상태공간 표현에서 불가관측 모드의 일반화 정의⁽¹⁶⁾와 약간의 행렬 조작으로 도출될 수 있다.

이상을 포함하여 허수축 모드 A_w 가 있는 경우 H_∞ 제어문제의 해가 존재하기 위한 전제조건으로서, 표준 H_∞ 제어문제의 가정들은 다음과 같이 대체된다.

A1) 허수축 모드 A_w 를 제외하고, (A, B_2) 는 안정가능하다.

A2) D_{12} 는 열 풀랭크이다.

A3) A_w 는 $G_{12}(s)$ 의 영점모드가 된다. 단, A_w 이외의 허수축 영점은 없다.

A4) $C_2V = 0$, 즉 A_w 는 $(A - B_2D_{12}^+C_1, C_2)$ 의 불가관측 모드이다.

위의 일반화된 플랜트에 대한 전제 조건하에서 G_w 의 안정성 이외에 G_w 의 무한 노름(norm)을 1 미만으로 하는 H_∞ 제어문제는 다음과 같은 의사 안정화 해(pseudo-stabilizing solution)⁽¹⁷⁾의 개념을 이용하여 해를 구할 수 있다.

4.2 의사 안정화 해

우선, 표준 H_∞ 제어문제와 관련된 Riccati 방정식의 실대칭해 X 및 안정화 해를 판정하는 행렬 A_x 는 다음과 같다.

$$X(A - B_2D_{12}^+C_1) + (A - B_2D_{12}^+C_1)^T X + X(B_1B_1^T - B_2E_{12}^{-1}B_2^T)X + (D_{12}^+ C_1)^T D_{12}^+ C_1 = 0 \quad (26)$$

$$A_x = A - B_2D_{12}^+C_1 + (B_1B_1^T - B_2E_{12}^{-1}B_2^T)X \quad (27)$$

여기서, $E_{12} = D_{12}^T D_{12}$

이 때, A_w 가 $G_{12}(s)$ 의 영점모드이면 식 (24)를 만족하는 열 풀랭크 V 가 존재하고, Riccati 방정식(26)의 양변에 V 를 오른쪽에 곱하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$XVA_w + A_x^T XV = 0 \quad (28)$$

따라서 A_x 가 안정하고, 또한 A_w 가 안정하면

$$XV = 0 \quad (29)$$

이 성립한다. 그리고 식 (27)의 양변에 V 를 오른쪽에 곱하면 식 (24)에 의해

$$A_x V = VA_w \quad (30)$$

이 성립하며, $G_{12}(s)$ 가 허수축 영점(A_w 의 허수축 고유치)을 가지는 경우도 위 식들은 성립된다.⁽¹⁷⁾ 이는 A_x 가 $G_{12}(s)$ 의 허수축을 포함한 안정 영점을 고유치에 반드시 포함하게 됨을 의미한다. 따라서 안정화 해는 존재하지 않으며, 이 경우 표준 H_∞ 제어문제의 범위를로 간주된다.

정의 : 의사 안정화 해

$$\text{Re}\{\lambda_i(A_w)\} \leq 0, \forall i \quad (31)$$

$$(A - B_2D_{12}^+C_1)V = VA_w, \quad D_{12}^+C_1V = 0 \quad (32)$$

을 충족시키는 열 풀랭크 V 에 대해 $XV = 0$ 이 성립하며, 동시에 A_x 에서 $\lambda_i(A_w)$ 이외의 고유치는 안정하다. 이와 같은 조건을 만족시키는 Riccati 방정식 (26)의 해 X 를 의사 안정화 해라 하며, 이를 도출하는 방법은 다음과 같다.

식 (32)에서 얻어지는 기저 V 를 불가관측 공간으로 분리하는 표준형(canonical form)을 만들어 이 공간에 대응하는 X 의 성분을 0이라 놓고 구할 수 있다. 즉, $T = (H, V)$ 를 정칙(non-singular)으로 하는 적당한 보조기저 H 를 선정하면 식 (32)로부터

$$\hat{A} \equiv T^{-1}(A - B_2D_{12}^+C_1)T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{1p} & A_w \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\hat{C}_1 \equiv D_{12}^+C_1T = [\gamma_{11} \quad 0] \quad (34)$$

의 형식으로 변환할 수 있고, B_1 및 B_2 도 다음과 같이 적당한 형식으로 변환할 수 있다.

$$\hat{B}_1 \equiv T^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 \equiv T^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서, B_{12} 및 B_{22} 는 나중에 이용되지 않는 요소이다.

이 때 T, T 를 각각 Riccati 방정식 (26)의 좌우에 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\hat{X}\hat{A} + \hat{A}^T\hat{X} + \hat{X}(\hat{B}_1 \hat{B}_1^T - \hat{B}_2 E_{12}^{-1} \hat{B}_2^T)\hat{X} + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 = 0 \quad (36)$$

여기서, $\hat{X} = T^T X T$ 이다. 따라서 구하려고 하는 안정화 해 X 는 다음과 같이 된다.

$$X = (T^T)^{-1} \text{diag}(X_1, 0) T^{-1} \quad (37)$$

여기서, X_1 은 식 (26)에서 식 (33)~식 (35)에 의해 차원이 축소된 다음 Riccati 방정식의 안정화 해이다.

$$X_1 A_1 + A_1^T X_1 + X_1 (B_{11} B_{11}^T - B_{21} E_{12}^{-1} B_{21}^T) X_1 + \gamma_{11}^T \gamma_{11} = 0 \quad (38)$$

결론적으로 H_∞ 제어문제의 무계함수 W_w 가 허수축상의 극점을 포함하는 경우 일반화된 플랜트 모델에서 (A, B_2) 가 불안정, 그리고 $G_{12}(s)$ 의 허수축 영점모드가 되는 고유치 $\lambda_i(A_w)$ 가 존재하여 표준 H_∞ 제어문제의 해가 직접 사용될 수 없다. 이 경우 의사 안정화 해의 성질과 함께 내부 모델 원리에 의해 다음의 순서로 보다 용이하게 이 문제를 해결할 수 있다.

1. 가정 A1) ~ A4)를 반영하는 시스템 $G(s)$ 를 구성한다.
2. 정리에 의한 가정 A4) 하에서 설계된 제어기 $K(s)$ 는 실제 모드로서 A_w 를 포함하게 되므로 미리 $\lambda_i(A_w)$ 를 극점으로 하고, 또 적당한 안정된 영점을 갖는 인자 $U(s)$ 에 의해 $K(s) = U(s)\tilde{K}(s)$ 라 둔다. 여기서, $\tilde{K}(s)$ 는 새로운 제어기이다.
이 때 $G_w = F_1\{G, U\tilde{K}\} = F_1\{\tilde{G}, \tilde{K}\}$ 을 만족시키는 변환된 일반화된 플랜트 $\tilde{G}(s)$ 를 구할 수 있다. 여기서 $F_1\{\}$ 는 lower LFT(Linear Fractional Transformation)⁽¹⁵⁾를 의미한다.
3. 이 때 $\tilde{G}(s)$ 는 표준 H_∞ 제어문제의 가정을 충족시키는 일반화된 플랜트가 되며, 이 때 \tilde{G} 로부터 도출되는 안정화 해와 G 의 의사 안정화 해가 수치적으로 같게 된다.
4. \tilde{G} 에 대해 표준 H_∞ 제어문제의 주정리를 이용하여 \tilde{K} 를 구하고, $K = U\tilde{K}$ 를 역산한다.

4.3 냉간 압연 제어시스템 설계

본 논문의 냉간 압연시스템에서 주요하게 고려된 외란은 입측 두께변동(w_1)과 롤편심(w_2)이다. 입측 두께변동은 당 압연스탠드의 관점에서는 압연소재의 두께 그리고

경도 불균일 또는 용접이음부 등을 포함하며, 이는 롤속도가 상대적으로 아주 느린 열간 또는/그리고 냉간 압연시스템의 전방 스탠드를 통과하면서 기인된 것으로 저주파신호의 특성을 가진다. 반면 롤편심의 주파수특성은 당 제어대상 압연시스템의 정상 롤속도(ω_0)와 직접 관계하는 것으로, 입측 두께변동에 비해 고주파 신호이다. 따라서 여기서는 롤편심 외란을 주요하게 제거할 목적으로 다음과 같이 허수축상의 극점($\pm j\omega_0$)을 갖는 W_w 를 선정하였다.

$$W_w(s) = \frac{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} I_2 \quad (39)$$

분자 다항식을 분모 다항식과 동차로 한 것은 식 (21)의 D_{21} ($= F_p D_w$)이 행 플랭크가 되게 하기 위해서이며, ξ 는 설계 파라미터이고 I_2 는 (2×2) 단위행렬을 의미한다.

그리고 W_c 와 W_u 는 일반적인 H_∞ 혼합 감도문제의 성능 및 강인-안정성을 위한 가중함수에 대응되는 것이다. W_c 는 압연 제어시스템의 저감도화를 고려하여 저주파역에서의 게인은 크고, 고주파역에서 게인이 작도록 식 (40)과 같이 일차 가중함수로 선정하였다. 그리고 W_u 는 압연 플랜트의 모델 불확실성을 반영하여, 프로퍼(proper)하면서 고주파역에서 큰 게인을 가지도록 식 (41)과 같이 선정하였으며, $W_u(0) = 1$ 이 되도록 하였다.

$$W_c(s) = \frac{a}{s + 0.001} I_2 \quad (40)$$

$$W_u(s) = \frac{2000(s+100)(s+500)}{(s+10000)^2} I_2 \quad (41)$$

여기서, a 는 설계 파라미터이다.

이와 같은 무계함수들에 대해 식 (22), (23)을 만족하는 H_∞ 제어기 $K(s)$ 는 4.2절의 설계절차에 따라 Glover와 Doyle이 제안한 알고리즘⁽¹⁴⁾을 이용하여 설계될 수 있다. 이 때 무계함수의 파라미터 ξ 와 a 는 안정한 해가 존재하고, 적절한 성능을 갖는 제어시스템이 설계되도록 특이값선도를 분석하며 시행착오를 통해 선정하였다.

5. 컴퓨터 시뮬레이션 및 성능 분석

제안한 냉간 압연 제어시스템의 시뮬레이션을 위해 사용된 주된 파라미터의 값들은 다음과 같다. Mill 탄성계

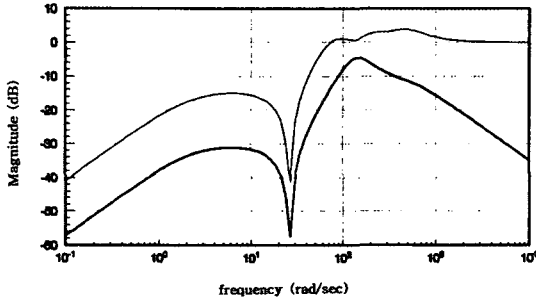


Fig. 5 Singular value plots of the transfer function matrix from disturbances to outputs

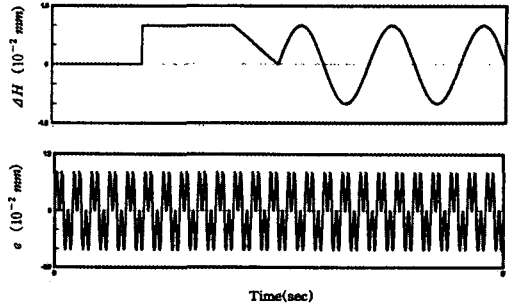


Fig. 6 Entry thickness variation $\Delta H(t)$ and roll eccentricity $e(t)$

수 M : 0.39MN/mm, 출측두께의 측정 시간지연 τ_d : 0.15 sec, 정상 백업롤 주기 τ_0 : 0.25sec(주파수 ω_0 : 25.13rad/sec)이다. 그리고 필터게인의 설계파라미터 ϵ 은 백업롤 주기의 미소변동에 의한 위상차를 고려하여 0.005로 하였고, 무계함수의 설계 조정상 ξ 와 a 는 시행착오를 통하여 각각 3과 20으로 선정하였다. Fig. 5는 페루프 전달함수 $G_{zw}(s)$ 의 특이값선도로서 우선 입측 두께변동이 에너지를 갖는 저주파역(주로 1 Hz 이하)뿐만 아니라 비교적 고주파(4 Hz 근처)의 롤편심 신호에 대해서도 충분히 작은 게인을 보여주고 있다.

본 시뮬레이션에 이용된 외란입력 신호들은 앞서 언급한 바와 같이 가능한 한 실제적인 외란특성을 반영하기 위하여 입측두께변동 (w_2)은 용접이음부 및 압연모재(전방 스탠드에서의 출측 두께)의 불균일성 등을 고려하여 각각 스텝 및 1Hz(이하)의 정현파신호, 그리고 롤편심 (w_3)은 본 압연모델의 백업롤 정상 회전주기에 대응한 4 Hz 와 이의 3차 조화성분(Fig. 6)으로 가정하였다. Fig. 7 과 Fig. 8은 기존의 LQ 피드백 및 피드포워드 롤편심 제어(LQ 통합제어)와 본 논문에서 제안한 H_∞ 제어의 외란 제거성능을 비교한 것이다. 이미 참고문헌⁽⁵⁾에서, 외란 입력으로 입측 두께변동만 고려되는 경우 LQ 피드백 제어로서, 그리고 롤편심만이 고려되는 경우는 롤편심 추정을 통한 피드포워드 롤편심 제어로 만족한 출측두께 성능을 얻을 수 있음을 확인하였다. 그러나 보다 실제적인 경우로 두가지 외란요소를 동시에 고려하여 통합 제어기법을 적용하였을 경우 각각의 결과에 비해서는 두 외란성분 모두 다소 제거효과가 약해짐을 알 수 있었다. 즉, LQ 피드백 제어요소는 롤편심을 다소 증폭시키고, 피드포워드 롤편심 제어는 입측 두께변동의 제거성능을 저하시킴도 확인하였다. 한편 Fig. 7의 출측 두께변동(Δh)에서 본

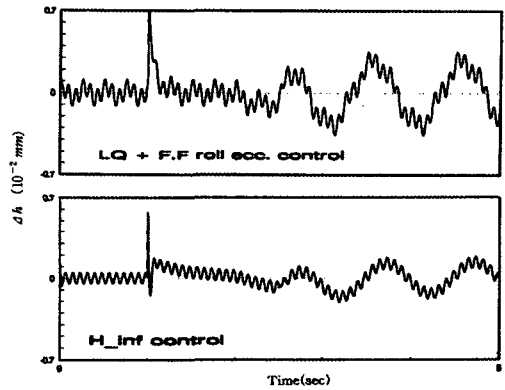


Fig. 7 Time responses of delivery thickness variation for mill control systems

논문에서 제안한 H_∞ 제어는 LQ 통합제어에 비해 롤편심 뿐만 아니라 입측 두께변동의 제거성능 모두 개선됨을 보여주고 있다. 이는 입력방향뿐만 아니라 주파수 스펙트럼이 구별되는 다른 두 외란신호의 특성상 H_∞ 제어의 효율성을 보여준다. Fig. 8의 장력변동(ΔT_b)에서도 H_∞ 제어는 LQ 통합제어와 비교할 때 입측 두께변동의 영향은 큰 차이가 없는 반면 롤편심으로 인한 영향은 크게 감소됨을 보여주고 있다. 이와 같이 출측 두께변동뿐만 아니라 장력변동을 크게 줄일 수 있다면 연속 냉간 압연시스템에서 판장력을 매개로 한 압연 스탠드간 간섭효과가 약화되고, 이는 보다 많은 스탠드에서 분산제어를 수행하는 데 바람직한 효과를 줄 수 있다. 한편 특이값선도(Fig. 5)에서 이미 알 수 있듯이 제안한 H_∞ 제어시 출력에 롤편심의 영향이 나타나는 것은 설계의 복잡성과 제어기 차수의 과도함을 피하기 위해 롤의 정상속도에 대응한 주 성분 4 Hz에 대해서만 가중치를 고려하였기 때문이다.

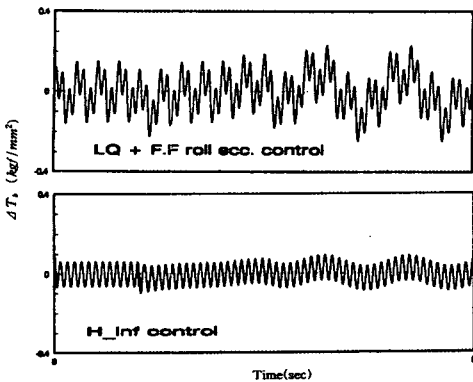


Fig. 8 Time responses of backward tension variation for mill control systems

6. 결 론

본 논문에서는 다변수 냉간 압연시스템을 고려하여 입축 판두께변동과 압연 스탠드 자체의 롤편심의 서로 다른 외란요소 모두를 효과적으로 제거할 수 있는 H_∞ 외란억압 제어를 설계하였다. 우선 본 논문의 압연 제어모델에서 주 제어변수인 출축 판두께는 본질적인 측정 시간지연은 물론 외란요소인 롤편심이 직달항으로 작용하기 때문에 기존의 게이지미터 판두께 추정기법을 보완하기 위한 롤편심 추정필터를 설계하였다. 그리고 H_∞ 제어계 설계시 정상상태 응답특성이 좋고 파라미터 변동에 강인한 제어시스템을 설계하고자 할 때, 허수축상의 극점을 갖는 무게함수를 선점함으로써 비롯되는 비표준 H_∞ 문제의 설계방법을 해석적으로 제시하였다. 마지막으로 다변수 냉간 압연시스템에 대한 H_∞ 제어기법의 적용은 기존의 LQ 피드백 제어 및 피드포워드 롤편심 제어와 비교하여 롤편심뿐만 아니라 입축 두께변동의 영향도 동시에 개선할 수 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. 김종식, "연속 냉간압연 다변수 AGC 시스템 설계," 포항제철(주) 기술연구소 위탁과제 연구보고서, 1994.
2. Hoshino, I., Maekawa, Y., Fujimoto, T. and Kimura, H., "Observer-based Multivariable Control of the Aluminum Cold Tandem Mill," *Automatica*, Vol. 24, No. 6, pp. 751~

- 745, 1988.
3. Waltz, M. D. and Reed, L. E., "Roll Eccentricity Filter for Rolling Mills," *Instrumentation Metals Industry*, Vol. 21, pp. 1~9, 1971.
4. Mike, T., S. Takai, and T. Yanaguchi, "A New Roll Eccentricity Compensation System," *Nisshin Steel Technical Report No. 51*, p. 77, 1984.
5. Edwards, W. J. and Goodwin, G. C., "Roll Eccentricity Control for Strip Rolling Mills," 10th IFAC World Congress, Munich, Vol. 2, pp. 200~211, 1987.
6. 김종식, 김승수, "롤편심을 포함한 냉간압연 시스템의 다변수 제어," *대한기계학회 논문집*, 제21권, 제3호, pp. 502~510, 1997.
7. Garimella, S. S. and Srinivasan, K., "Application of Repetitive Control to Eccentricity Compensation in Rolling," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 118, pp. 657~664, 1996.
8. Hara, S., Yamamoto, Y., Omata, T., and Ntano, M., "Repetitive Control Systems: A New Type Servo Systems for Periodic Exogenous Signals," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, pp. 657~689, 1988.
9. Francis, B. A. and Wonham, W. M., "The Internal Model Principal for Linear Multivariable Regulators," *Applied Mathematics & Optimization*, Vol. 2, No. 2, pp. 170~194, 1975.
10. Bland, D. R. and Ford, H., "The Calculation of Roll Force and Torque in Cold Strip Rolling with Tensions," *Proc. Institute of Mech. Eng.*, Vol. 159, pp. 144~153, 1948.
11. Ginzburg, V. B., "Basic Principles of Customized Computer Models for Cold and Hot Strip Mills," *Iron and Steel Engineer*, pp. 21~35, 1985.
12. Watanabe, K., and Ito, M., "A Process Model Control for Linear Systems with

- Delay." IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 26, pp. 1261~1269, 1981.
13. Goodwin, G. C., R. J. Evans, R. L. Leal and R. A. Feik, "Sinusoidal Disturbance Rejection with Application to Helicopter Flight Data Estimation," IEEE ASSP, Vol. 34, No. 3, pp. 479~485, 1986.
14. J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard H_∞ and H_2 Control Problems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, pp. 831~847, 1989.
15. 美多 勉 著, H_∞ 制御, 昭晃堂, 1994.
16. B. A. Francis, A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag, New York, 1987.
17. 美多, 栗山, 劉, " $j\omega$ 축상에 極을 갖는 가중함수를 허용하는 제어계의 설계," 計測自動制御學會 論文集, 제29권, 11호, pp. 1320~1329, 1993.

부 록

압연 시스템행렬 (A_i, B_i, C_i, E_i, F_i)

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_{si}} & 0 & 0 & 0 \\ a^i_{2,1} & a^i_{2,2} & 0 & a^i_{2,4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_{vi}} & 0 \\ a^i_{4,1} & a^i_{4,2} & a^i_{4,3} & a^i_{4,4} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{si}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{vi}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^i_{2,1} & e^i_{2,2} \\ 0 & 0 \\ e^i_{4,1} & e^i_{4,2} \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$a^i_{2,1} = \frac{1}{T_{pi}} \left(\frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta H_i} \right), \quad a^i_{2,4} = \frac{1}{T_{pi}} \left(\frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta T_{bi}} \right),$$

$$a^i_{2,2} = \frac{1}{T_{pi}} \left\{ \frac{1}{M_i} \left(\frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta H_i} \right) - 1 \right\}$$

$$a^i_{4,1} = \frac{E_i b}{L_i} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta h_i} \right) h_i V_{Ri} + V_{oi} \right\}$$

$$a^i_{4,2} = \frac{E_i b}{L_i M_i} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta h_i} \right) h_i V_{Ri} + V_{oi} \right\}$$

$$a^i_{4,3} = \frac{-E_i H_i b}{L_i} (1 + f_{i-1})$$

$$a^i_{4,4} = \frac{E_i b}{L_i} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta T_{bi}} \right) h_i V_{Ri} - \left(\frac{\partial \Delta f_{i-1}}{\partial \Delta T_{fi-1}} \right) H_i V_{Ri-1} \right\}, \quad e^i_{2,1} = \frac{1}{T_{pi}} \left(\frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta H_i} \right),$$

$$e^i_{2,2} = \frac{1}{T_{pi}} \left(\frac{\partial \Delta P_{Ai}}{\partial \Delta T_{fi}} \right), \quad e^i_{4,1} = \frac{E_i b}{L_i} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta H_i} \right) h_i V_{Ri} - V_{oi-1} \right\}$$

$$e^i_{4,2} = \frac{E_i b}{L_i} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta f_i}{\partial \Delta h_i} \right) h_i V_{Ri} + V_{oi} \right\}$$